SOLUŢII ELEMENTARE PENTRU O CLASĂ DE ECUAŢII CU DERIVATE PARŢIALE LINIARE DE ORDINUL PATRU

DE

LUCIA DOBRESCU-PURICE

(Bucureşti)

Lucrare prezentată la Colocviul de analiză numerică din 8—13 decembrie 1960, Cluj

Soluţiile elementare ale ecuaţiilor cu derivate parţiale, sînt soluţii admiţînd singularităţi pe conoidul caracteristic.

Importanţa teoretică a acestor soluţii este că ele sînt la baza metodelor de rezolvare a problemelor la limită, care pornesc de la relaţia de reciprocitate, cum sînt metodele lui Riemann, Hadamard, metoda funcţiei lui Green etc.

Importanţa practică a acestor soluţii este că ele conduc la formule de reprezentare integrală a soluţiilor ecuaţiilor cu derivate parţiale şi chiar a altor mărimi legate de acestea. De exemplu reprezentarea cîmpurilor scalare prin potenţiali, care este fundamentală în teoria potenţialului şi în alte extensiuni ale ei :

$$\rho\varphi(P)=\int\limits_{\Sigma}\frac{1}{\Omega}\frac{d\varphi}{dx}\,d\sigma-\int\limits_{\Sigma}\varphi\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\Omega}\right)d\sigma-\int\limits_{\Omega}\frac{1}{\Omega}\,\Delta\varphi\,d\omega$$

foloseşte soluţia elementară $\frac{1}{r}$ a ecuaţiei $\Delta\varphi=0$.

Dacă există o reprezentare integrală pentru soluţii, se pot studia proprietăţile pentru aceste clase de funcţii şi funcţiile pot fi apoi evaluate numeric.

Ecuaţiile de ordin superior, îşi găsesc aplicaţii din ce în ce mai largi în problemele fizicii matematice şi ale tehnicii. Determinarea soluţiilor elementare pentru aceste ecuaţii, conduce la procedee de aproximări succesive şi dă posibilitatea unui calcul efectiv al termenilor succesivi. De asemenea se poate studia convergenţa şirului, cu mijloace care rezultă din procedeul de construcţie însuşi.

Într-o lucrare anterioară [1], am determinat pentru ecuaţia :

$$\bar{a}^{kl}\,\frac{\partial^2}{\partial x^k\partial x^l}\left(a^{ij}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^i\partial x^j}\right)+b^{ijk}\,\frac{\partial^3 u}{\partial x^i\partial x^j\partial x^k}+c^{ij}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^i\partial x^j}+d^i\,\frac{\partial u}{\partial x^i}+e\,u=0 \qquad (1)$$

soluţii singulare pe o varietate caracteristică regulată, de un indice oarecare l [2]. Particularitatea pe care o are ecuaţia considerată, anume de a avea forma caracteristică descompusă într-un produs de doi factori pătratici, ne-a permis să efectuăm operaţiile într-un spaţiu Riemann. Coeficienţii ecuaţiei au fost consideraţi funcţii analitice în variabilele $x^1, x^2, \ldots, x^n$.

Am determinat pentru ecuaţia (1) soluţii cu singularitate algebrică şi algebrică-logaritmică de formele :

$$u = UG^p \tag{2}$$

şi

$$u = UG^p + V \log G, \tag{3}$$

cu U şi V funcţii olomorfe într-o vecinătate a lui $G = 0$ şi pe această varietate, cu $U \neq 0$ şi $V \neq 0$ pe $G = 0$.

$G = 0$ este una din pînzele suprafeţelor caracteristice ale ecuaţiei (1) provenind din ecuaţia :

$$P = a^{ij} \frac{\partial G}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial G}{\partial x^j} = 0,$$

iar p o constantă dată.

Pentru U şi V am determinat serii de puteri ale lui G :

$$U = U_0 + U_1 G + U_2 G^2 + \ldots + U_h G^h + \ldots \tag{4}$$

$$V = V_0 + V_1 G + V_2 G^2 + \ldots + V_h G^h + \ldots, \tag{5}$$

unde coeficienţii succesivi U_h şi V_h, erau soluţiile unor anumite ecuaţii diferenţiale, determinate. Convergenţa seriilor (4) şi (5) a fost demonstrată utilizînd un procedeu de majorare.

În această lucrare vom determina soluţiile elementare pentru ecuaţiile de ordinul IV cu coeficienţi constanţi de forma :

$$\bar{a}^{kl} \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l} \left(a^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \right) u = 0, \tag{6}$$

unde operatorul $a^{ij} \dfrac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}$ este neparabolic.

În acest caz teorema lui T. Boggio spune că soluţia ecuaţiei (6) este o sumă de două funcţii, una soluţie a ecuaţiei $\bar{a}^{kl} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^k \partial x^l} = 0$ şi cealaltă a ecuaţiei $a^{ij} \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^j} = 0$.

Forma caracteristică, considerată ca o formă algebrică omogenă de gradul IV, este descompusă într-un produs de doi factori pătratici :

$$A = P \cdot Q = a^{ij}\, p_i\, p_j\, \bar{a}^{kl}\, p_k\, p_l,$$

cu :

$$P = a^{ij}\, p_i\, p_j,$$

$$Q = \bar{a}^{kl}\, p_k\, p_l,$$

coeficienţii a^{ij} şi $\bar{a}^{kl}$ fiind distincţi şi simetrici în raport cu indicii i, j şi k, l.

Suprafeţele caracteristice ale ecuaţiei (6) vor fi compuse din două pînze : una provenind din ecuaţia

$$P = a^{ij} \frac{\partial G}{\partial x^i} \frac{\partial G}{\partial x^j} = 0$$

şi cealaltă din ecuaţia

$$Q = \bar{a}^{kl} \frac{\partial S}{\partial x^k} \frac{\partial S}{\partial x^l} = 0.$$

O discontinuitate produsă în punctul M la momentul iniţial, se va propaga după $G + S$, sau propagarea va putea să aibă loc după o singură pînză determinată.

Conoidul caracteristic al ecuaţiei (6), pentru că ecuaţia are coeficienţi constanţi, va fi un con de ordinul patru, compus din două pînze pătratice, o pînză Γ dată de ecuaţia $P = 0$ şi o pînză $\bar{\Gamma}$ dată de ecuaţia $Q = 0$, ecuaţiilor lor fiind

$$\frac{(x^i - a^i)(x^j - a^j)}{a^{ij}} = 0 \quad \text{şi} \quad \frac{(x^k - a^k)(x^l - a^l)}{\bar{a}^{kl}} = 0$$

dacă vîrful conului e în punctul $M(a^1, a^2, \ldots, a^n)$.

Vom construi soluţia elementară singulară pe pînza Γ, corespunzătoare factorului $P = 0$. În acest caz soluţia elementară a ecuaţiei (6) va fi chiar soluţia elementară a ecuaţiei :

$$a^{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} = 0 \tag{7}$$

şi influenţa factorului $\bar{a}^{kl} \dfrac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l}$ este nulă. Într-adevăr, existenţa unei soluţii singulare pe Γ pentru ecuaţia (6) antrenează existenţa unei soluţii elementare pentru ecuaţia :

$$\bar{a}^{kl} \frac{\partial^2 v}{\partial x^k \partial x^l} = 0. \tag{8}$$

Pentru aceasta este suficient să luăm $v = a^{ij} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}$. Funcţia v e singulară pe $\Gamma = 0$ sau se reduce la o funcţie regulată $f(x^1, \ldots, x^n)$. Dar dacă ea e singulară pe $\Gamma = 0$, se contrazice teorema lui Le Roux și Delassus, care cere ca toate suprafețele singulare pentru o soluție a unei ecuații cu derivate parțiale să fie suprafețe caracteristice, ceea ce nu e posibil pentru $\Gamma = 0$, conul caracteristic al ecuației (7) și nu al ecuației (8). Dacă însă v este regulată pe $\Gamma = 0$, rezultă că u este o soluție singulară a ecuației $a^{ij}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} = f$ și în consecință se compune dintr-un termen regulat pe $\Gamma = 0$, soluție a ecuației cu membrul doi și dintr-un termen singular pe Γ, soluție a ecuației omogene $a^{ij}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} = 0$. Deci nu putem obține soluții singulare pe $\Gamma = 0$ pentru ecuația (6), care să nu fie în același timp soluții pentru ecuația (7).

Într-o lucrare anterioară [1] am construit soluția elementară pentru ecuația generală de ordinul IV :

$$\bar{a}^{kl}\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l}\left(a^{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}\right) + b^{ijk}\frac{\partial^3 u}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k} + c^{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + d^i\frac{\partial u}{\partial x^i} + eu = 0,$$

unde operatorul $a^{ij}\dfrac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}$ este neparabolic și cu coeficienți analitici și am obținut :

O ecuație liniară cu derivate parțiale de ordinul IV a cărei foomă caracteristică este un produs de doi factori pătratici P și Q, admite o soluție elementară singulară pe pînza exterioară a conoidului.

În cazul cînd avem un număr impar de variabile independente $n = 2K + 1$, soluția are singularitate algebrică și este de forma :

$$u = \frac{U}{\Gamma^{K-\frac{1}{2}}}, \tag{9}$$

funcția U fiind olomorfă în interiorul conoidului și pe conoid, exceptînd vîrful conoidului.

În cazul unui număr par de variabile $n = 2K$, soluția e de forma :

$$u = \frac{U}{\Gamma^{K-1}} + V \log \Gamma, \tag{10}$$

cu $U = U_h\,\Gamma^h$ și $V = V_h\,\Gamma^h$, funcțiile U_{-p}, U_{-p+1}, U_{-p+2} rămînînd nedeterminate.

Atît în primul caz, cît și în cel de al doilea caz, funcțiile U și V sînt obținute ca serii de puteri ale lui Γ, coeficienții U_h și V_h succesivi fiind soluțiile unor ecuații diferențiale determinate [1].

Pentru cazul particular considerant, cînd coeficienții $\bar{a}^{kl}$ și a^{ij} sînt constanți, iar $b^{ijk} = c^{ij} = d^i = e = 0$, obținem :

$$U_0 = 1$$

pentru ambele cazuri și $U_1 = U_2 = \ldots = U_h = \ldots = 0$ în primul caz și $V_0 = V_1 = \ldots = V_h = \ldots = 0$ și $U_h = 0\ (h \neq 0)$, exceptînd U_{-p}, U_{-p+1}, U_{-p+2}

care rămîn nedeterminați, pentru cel de al doilea caz. Dacă luăm $U_{-p} = U_{-p+1} = U_{-p+2} = 0$, atunci obținem :

O ecuație liniară cu derivate parțiale cu coeficienți constanți de forma (1) admite o soluție elementară singulară pe pînza exterioară Γ a conului caracteristic.

În cazul cînd avem un număr impar de variabile independente $n = 2K + 1$, soluția este de forma :

$$u = \frac{1}{\Gamma^{K-\frac{1}{2}}}. \tag{11}$$

În cazul cînd avem un număr par de variabile $n = 2K$, soluția e de forma :

$$u = \frac{1}{\Gamma^{K-1}}. \tag{12}$$

Aplicație. Cazul micilor mișcări ale unui corp elastic izotrop. În cazul micilor mișcări ale unui corp elastic izotrop, componentele vectorului lui Galerkin satisfac ecuația (3)

$$\left(\mu\Delta - \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left[(\lambda + 2\mu)\Delta - \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\Phi = 0,$$

λ și μ fiind constantele lui Lamé și ρ densitatea.

Dacă notăm :

$$\frac{\partial G}{\partial x} = p_x,\quad \frac{\partial G}{\partial y} = p_y,\quad \frac{\partial G}{\partial z} = p_z,\quad \frac{\partial G}{\partial t} = p_t,$$

forma caracteristică este :

$$A = [\mu(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \rho p_t^2][(\lambda + 2\mu)(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \rho p_t^2],$$

unde

$$P = (\lambda + 2\mu)(p_x^2 + p_y^2 + p_t^2) - \rho p_t^2$$

$$Q = \mu(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \rho p_t^2.$$

Coeficienții fiind constanți, conoidul caracteristic este un con de ordinul patru, compus din două pînze pătratice. Ecuația conului cu vîrful în $M(a, b, c, d)$ este :

$$\left[\frac{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}{\mu} - \frac{(t-d)^2}{\rho}\right]\left[\frac{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}{\lambda + 2\mu} - \frac{(t-d)^2}{\rho}\right] = 0.$$

Soluția elementară pe care o vom determina va admite o singularitate pe pînza exterioară :

$$\Gamma = \frac{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}{\lambda + 2\mu} - \frac{(t-d)^2}{\rho}.$$

Cum ecuaţia are patru variabile independente, avem $n = 4$ şi $K = 2$. De unde soluţia elementară va fi : $u = \frac{1}{\Gamma^{K-1}} = \frac{1}{\Gamma}$, deci :

$$u = \frac{1}{\frac{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}{\lambda + 2\mu} - \frac{(t-d)^2}{\rho}}.$$

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящем труде строятся элементарные решения уравнения с постоянными коэффициентами:

$$E(u) \equiv \bar{a}^{kl} \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l} \left(a^{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} \right) = 0$$

имея характеристическую форму

$$A = \bar{a}^{kl} p_k p_l \, a^{ij} p_i p_j,$$

состоящую из двух квадратных множителей.

$$A = P \cdot Q \quad \text{с} \quad P = a^{ij} p_i p_j \quad \text{и} \quad Q = \bar{a}^{kl} p_k p_l.$$

Получается линейное уравнение с частными производными вида $E(u) = 0$, где оператор $a^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}$ является непараболическим, допускает элементарное решение, единственное на внешней полосе характеристического конуса.

В том случае, когда имеет нечетное число независимых переменных $n = 2K + 1$ решение имеет вид:

$$u = \frac{1}{\left[\frac{(x^i - a^i)(x^j - a^j)}{a^{ij}}\right]^{K - \frac{1}{2}}}.$$

В том случае, когда имеем четное число независимых переменных $n = 2K$ решение имеет вид:

$$u = \frac{1}{\left[\frac{(x^i - a^i)(x^j - a^j)}{a^{ij}}\right]^{K-1}}.$$

SOLUTIONS ÉLÉMENTAIRES POUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES LINÉAIRES DU QUATRIÈME ORDRE

RÉSUMÉ

Dans ce travail, on construit les solutions élémentaires de l'équation aux coefficients constants

$$E(u) \equiv \bar{a}^{kl} \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l} \left(a^{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} \right) = 0,$$

ayant la forme caractéristique

$$A = \bar{a}^{kl} p_k p_l \, a^{ij} p_i p_j,$$

formée du produit de deux facteurs quadratiques

$$A = P \cdot Q \quad \text{avec} \quad P = a^{ij} p_i p_j \quad \text{et} \quad Q = \bar{a}^{kl} p_k p_l.$$

On obtient la propositions suivant : Une équation linéaire aux dérivées partielles de la forme $E(u) = 0$, où l'opérateur $a^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}$ est non-parabolique, admet une solution élémentaire, singulière sur la nappe extérieure du cone caractéristique.

Lorsqu'on a un nombre impair de variables indépendantes $n = 2K + 1$, la solution est de la forme :

$$u = \left[\frac{(x^i - a^i)(x^j - a^j)}{a^{ij}}\right]^{-\left(K - \frac{1}{2}\right)}.$$

Au cas d'un nombre paire de variables indépendantes $n = 2K$, la solution est de la forme :

$$u = \left[\frac{(x^i - a^i)(x^j - a^j)}{a^{ij}}\right]^{-(K-1)}.$$

BIBLIOGRAFIE

1. L. Dobrescu-Purice, *Soluţii singulare pe caracteristici regulate pe o clasă de ecuaţii cu derivate parţiale liniare de ordinul IV*. Studii şi cercetări de Matematică — Acad. R.P.R., Secţia de ştiinţe matematice şi fizice, **X**, *1*, 183—218 (1959).
2. N. Teodorescu, *Asupra necesităţii caracterului algebric sau algebrico-logaritmic al singularităţilor soluţiilor elementare*. Bul. ştiinţ. — Acad. R.P.R., Secţia de ştiinţe matematice şi fizice, **VII**, *4*, 939—951 (1955).
3. M. Iacovache, *O extindere a metodei lui Galerkin pentru sistemul ecuaţiilor elasticităţii*. Bul. ştiinţ. — Acad. R.P.R., Ser. A, **I**, *6*, 593 (1949).

Primit la 12. XII. 1960.