DESPRE TEOREMELE DE SCUFUNDARE, PRELUNGIRE ȘI DE APROXIMARE A FUNCȚIILOR DERIVABILE DE MAI MULTE VARIABILE*)

DE

S. M. NIKOLSKI

(Moscova)

§ 1. Teoreme de scufundare

Fie R_n spațiul n-dimensional al punctelor $\bar{x}=(x_1, \ldots, x_n)$ de coordonate reale. Vom considera întodeauna că numărul p satisface inegalitățile $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Unele rezultate despre care se va vorbi în cele ce urmează vor fi valabile numai pentru $1 < p < \infty$.

Dacă $\mathcal{G} \subset R_n$ este o mulțime deschisă (domeniu) și $f(\bar{x})$ o funcție măsurabilă în $\mathcal{G}$, al cărei modul este p-sumabil în $\mathcal{G}$, atunci luăm

$$\|f\|_{L_p(\mathcal{G})} = \Big(\int_{\mathcal{G}} |f|^p d\mathcal{G}\Big)^{1/p} \qquad (1 \leqslant p \leqslant \infty).$$

Ca de obicei, pentru $p = \infty$ vom considera

$$\|f\|_{L_\infty(\mathcal{G})} = \sup_{\bar{x}\in\mathcal{G}} \text{vrai}\ |f(\bar{x})|.$$

Fie r un număr întreg nenegativ. Spunem că funcția f aparține clasei $W_p^{(r)}(\mathcal{G})$ a lui Sobolev, dacă ea este p-sumabilă în domeniul $\mathcal{G}$ împreună cu derivatele ei generalizate pînă la ordinul r inclusiv. Cu această ocazie se introduce norma funcției f în metrica spațiului $W_p^{(r)}(\mathcal{G})$ cu ajutorul egalității

$$\|f\|_{W_p^{(r)}(\mathcal{G})} = \Big\{\|f\|_{L_p(\mathcal{G})} + \sum \|f^{(r)}\|_{L_p(\mathcal{G})}\Big\}^{1/p}, \tag{1}$$

*) Ciclul de conferințe ținute la Institutul de calcul din Cluj, la 29 noiembrie 1960. Această lucrare se publică și în limba rusă în revista ,,Revue de mathématiques pures et appliquées'', tom. VI, nr. 2 (1961).

unde $f^{(r)}$ reprezintă o derivată generalizată oarecare a funcției f, de ordinul r, iar suma se extinde asupra tuturor acestor derivate. Pentru $r = 0$, $W_p^{(0)}(\mathcal{G}) = L_p(\mathcal{G})$ reprezintă spațiul funcțiilor ale căror valori absolute sînt p-sumabile în domeniul $\mathcal{G}$.

În acest paragraf vom considera ca domenii $\mathcal{G}$, fie întreg spațiul R_n, fie subspații R_m $(1 \leqslant m < n)$ ale lui R_n. Vom presupune întotdeauna că m și n reprezintă numere naturale și că sînt satisfăcute inegalitățile $1 \leqslant m < n$, $r \geqslant 0$, $1 \leqslant p \leqslant p' \leqslant \infty$, sau niște inegalități mai restrictive, despre care se va vorbi aparte.

S. L. Sobolev [1, 2] a demonstrat teoremele sale pentru domenii stelare, relativ la o sferă oarecare. Aici vom formula rezultatele lui fundamentale numai pentru spațiul R_n și subspațiul lui m-dimensional R_m.

Întrucît funcțiile $f(\bar{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ considerate de noi sînt definite în R_n abstracție făcînd de o mulțime n-dimensională de măsură nulă, este necesar să explicăm ce vom înțelege prin urma

$$\varphi = f|_{R_m}$$

în subspațiul m-dimensional R_m al punctelor $\bar{x}$ avînd coordonate $x_1, \ldots, x_m$ arbitrare iar coordonatele $x_{m+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ fixe.

Pentru a trece la alte probleme care ne vor interesa, dăm mai jos definiția urmei unei funcții f pe R_m, care conduce la o funcție unică φ, cu o precizie pînă la echivalența relativă la R_m.

Fiecare punct $\bar{x} \in R_n$ îl vom nota sub forma perechii $\bar{x} = (\bar{u}, \bar{w})$, unde $\bar{u} = (x_1, \ldots, x_m)$, $\bar{w} = (x_{m+1}, \ldots, x_n)$ și fie $R_m(\bar{w})$ subspațiul m-dimensional al punctelor $(\bar{u}, \bar{w})$, unde $\bar{w}$ e fix, iar $\bar{u}$ parcurge toate valorile posibile. În particular, fie $R_m(0) = R_m$.

Fie $f \in L_p(R_n)$. Vom spune că funcția

$$\varphi = \varphi(\bar{u}) = f|_{R_m}$$

este urma funcției f pe R_m, dacă se poate modifica funcția f pe o mulțime n-dimensională de măsură nulă, astfel încît după această modificare să fie îndeplinite următoarele condiții :

1) $f(\bar{u}, \bar{w}) \in L_p(R_m(\bar{w}))$ pentru orice $\bar{w}$,
2) $f(\bar{u}, 0) = \varphi(\bar{u})$,
3) $\| f(\bar{u}, \bar{w}) - \varphi(\bar{u}) \|_{L_p(R_m(\bar{w}))} \to 0$ cînd $|\bar{w}| \to 0$.

Dacă φ_1 și φ_2 sînt două urme ale funcției f pe R_m respectiv în sensul L_p și $L_{p'}$, atunci ele diferă numai pe o mulțime m-dimensională de măsură nulă.

TEOREMA 1. (S. L. Sobolev [1] cu completarea lui V. P. Iliin [37]).

Dacă funcția $f \in W_p^{(r)}(R_n)$ *și*

$$0 \leqslant k = r - \frac{n}{p} + \frac{m}{p'}, \qquad (2)$$
$$1 < p < p' < \infty,$$

atunci există urma $f|_{R_m} = \varphi$, *aparținînd clasei* $W_{p'}^{([k])}(R_m)$. *Totodată există o constantă* C *independentă de* f, *astfel încît să aibă loc inegalitatea***)

$$\| f \|_{W_{p'}^{([k])}(R_m)} \leqslant C \| f \|_{W_p^{(r)}(R_n)}. \qquad (3)$$

S. L. Sobolev a mai demonstrat că în această teoremă pentru $m = n$ se poate considera $p = 1$.

Convenim să notăm pe scurt afirmația acestei teoreme, prin relația :

$$W_p^{(r)}(R_n) \subset W_{p'}^{([k])}(R_m). \qquad (4)$$

Astfel prin definiție, relația (4) înseamnă nu numai relația de incluziune în sensul teoriei mulțimilor a clasei $W_p^{(r)}(R_n)$ în clasa $W_p^{([k])}(R_m)$, ci și existența inegalității (3).

În cele ce urmează, alături de spațiile funcționale W, vom considera și spații care se vor nota cu H și B. De fiecare dată cînd se vor stabili relații de scufundare între spații, ca de exemplu $W \subset W'$, $H \subset H'$, $B \subset B'$, $W \subset B$, aceste relații vor fi însoțite de inegalitățile respective

$$\|f\|_{W'} < C \|f\|_W, \ \|f\|_{H'} < C \|f\|_H, \ldots,$$

unde C este o constantă care depinde de clasele ce intervin în inegalitatea respectivă, dar nu depinde de diferitele funcții ale acestor clase. De aceea, atunci cînd vom constata o anumită scufundare a claselor amintite, nu vom scrie explicit inegalitatea corespunzătoare dintre normele funcțiilor.

Teorema lui Sobolev dă posibilitatea să se deducă din proprietățile diferențiale ale funcției, exprimate în metrica $L_p(R_n)$, proprietățile ei diferențiale exprimate în metrica $L_{p'}(R_m)$, în ipoteza că sînt îndeplinite relațiile (2).

V. I. Kondrașev ([2], § 11, [3]) a precizat aceste teoreme ale lui Sobolev arătînd că derivatele parțiale de ordinul $[k]$ ale funcțiilor din clasa $W_{p'}^{([k])}(R_m)$, care intervin în membrul drept al relației de scufundare (4), satisfac anumite condiții ale lui Hölder în metrica respectivă.

Etapa următoare în această teorie o constituie teoremele mele [4, 5] pentru clasele pe care le numesc clase H.

Să notăm cu $\mathcal{G}_\delta$ mulțimea punctelor $\bar{x}$, aparținînd mulțimii deschise $\mathcal{G}$, care se găsesc la o distanță mai mare ca δ de frontiera mulțimii $\mathcal{G}$.

Fie $r > 0$ și $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Presupunem că $r = \bar{r} + \alpha$, unde $\bar{r}$ este un număr întreg și $0 < \alpha \leqslant 1$. Conform definiției, dacă funcția $f \in H_p^{(r)}(\mathcal{G})$ este p-sumabilă împreună cu toate derivatele ei generalizate $f^{(\varrho)}$ pînă la ordinul $\bar{r}$ inclusiv și dacă satisface inegalitatea lui Hölder

$$\| f^{(\bar{r})}(\bar{x} + \bar{h}) - f^{(\bar{r})}(\bar{x}) \|_{L_p(\mathcal{G}_\delta)} \leqslant M |\bar{h}|^\alpha, \qquad (5)$$

**) Rezultatul general al lui S. L. Sobolev poate fi scris sub forma inegalității (3), unde trebuie să se înlocuiască R_n și R_m respectiv cu $\mathcal{G}$, $\Lambda_m = R_m \mathcal{G}$ și să se considere că $\mathcal{G}$ este un domeniu stelat relativ la o sferă n-dimensională oarecare.

pentru $0 < \alpha < 1$, sau inegalitatea lui Zygmund

$$\| f^{(\bar r)}(\bar x + \bar h) - 2f^{(\bar r)}(\bar x) + f^{(\bar r)}(\bar x - \bar h)\|_{L_p(\mathcal{G}_\delta)} \leqslant M |\bar h| \tag{5'}$$

$$|\bar h| < \delta, \qquad \text{pentru } \alpha = 1,$$

atunci $H_p^{(r)}(\mathcal{G})$ formează un spațiu Banach, dacă se introduce norma

$$\|f\|_{H_p^{(r)}(\mathcal{G})} = \|f\|_{L_p(\mathcal{G})} + M_f,$$

unde M_f este constanta cea mai mică cu care se satisface inegalitate (5) sau (5′) pentru toți δ, pentru care $\mathcal{G}_\delta$ are sens.

În lucrările mele citate, se arată că pentru clasele cu orice r pozitiv nu neapărat întreg, sînt valabile teoremele de scufundare de tipul I și II :

$$\text{I.}\ H_p^{(r)}(R_n) \subset H_{p'}^{\left(r - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}\right)n\right)}(R_n),$$

$$\text{dacă}\quad 1 \leqslant p \leqslant p' \leqslant \infty, \quad r - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}\right) n > 0.$$

$$\text{II.}\ H_p^{(r)}(R_n) \subset H_p^{\left(r - \frac{n-m}{p}\right)}(R_m),$$

dacă

$$1 \leqslant p \leqslant \infty, \quad r - \frac{n-m}{p} > 0, \quad 1 \leqslant m < n.$$

Teoremele de tipul I și II sînt conținute într-o teoremă combinată care afirmă că are loc scufundarea :

$$\text{III.}\ H_p^{(r)}(R_n) \subset H_{p'}^{([k])}(R_m), \tag{6}$$

$$0 < k = r - \frac{n}{p} + \frac{m}{p'}. \tag{7}$$

Aceste teoreme pentru clasele H, într-o serie de cazuri generalizează și precizează teoremele lui S. L. Sobolev și V. I. Kondrașev, în alte cazuri ele coincid. Acest fapt rezultă din următoarele scufundări care se stabilesc ușor

$$H_p^{(r+\varepsilon)}(R_n) \subset W_p^{(r)}(R_n) \subset H_p^{(r)}(R_n),$$

$$r > 0 \text{ întreg}, \quad \varepsilon > 0$$

și

$$H_p^{(r)}(R_n) \subset H_p^{(r')}(R_n) \qquad (0 < r' < r).$$

S-a demonstrat [4, 6] că aceste teoreme nu pot fi întărite, în orice caz pentru clasele H.

În ceea ce privește teorema de tipul II, pentru ea s-a demonstrat un fapt și mai esențial, anume că ea este inversabilă.

TEOREMA RECIPROCĂ. *Dacă se dă funcția*

$$\varphi \in H_p^{\left(r - \frac{n-m}{p}\right)}(R_m) \qquad \left(r - \frac{n-m}{p} > 0\right),$$

atunci există o funcție $f \in H_p^{(r)}(R_n)$ *pentru care are loc* $f|_{R_m} = \varphi$. *Cu această ocazie, pentru o anumită constantă* C *independentă de* φ, *are loc inegalitatea*

$$\|f\|_{H_p^{(r)}(R_n)} \leqslant C \|\varphi\|_{H_p^{\left(r - \frac{n-m}{p}\right)}(R_m)}.$$

Afirmația acestei teoreme în baza convenției făcute anterior o vom exprima sub forma scufundării

$$H_p^{\left(r - \frac{n-m}{p}\right)}(R_m) \subset H_p^{(r)}(R_n).$$

Ea mai poate fi formulată și în următorul limbaj :

Dacă $r - \frac{n-m}{p} > 0$, atunci operatorul liniar $Af = f|_{R_m} = \varphi$ transformă spațiul $H_p^{(r)}(R_n)$ al funcțiilor f în spațiul $H_p^{\left(r - \frac{n-m}{p}\right)}(R_m)$ al funcțiilor φ în mod mărginit, fiind un operator mărginit.

Teorema reciprocă afirmă că operatorul A transformă întreg spațiul $H_p^{(r)}(R_n)$ în tot spațiul $H_p^{\left(r - \frac{n-m}{p}\right)}(R_m)$ și în consecință operatorul A este normal rezolubil.

Trăsătura caracteristică a teoremelor pentru clasele H constă în faptul că ele sînt demonstrate pentru numere $r > 0$ arbitrare, nu neapărat întregi, și în afara de aceasta în ele se consideră cazul important $p = p'$ (teoremele directe și reciproce de tipul II).

În cele ce urmează, atunci cînd vom introduce noi clase $W_p^{(r)}$ și $B_p^{(r)}$ pentru $r \geqslant 0$ arbitrar, ne vor interesa teoremele de tip I, II, precum și teoremele mixte pentru aceste clase.

După ce s-a stabilit pentru clasele H inversarea teoremelor de tipul II, a apărut tendința de a se obține inversări asemănătoare pentru clasele W ale lui Sobolev.

Ca rezultat al cercetărilor lui N. A r o n s z a i n [7], L. I. S l o b o d e ț k i [8, 34], E. G a g l i a r d o [9], O. V. B e s o v [10] și ale altora, a apărut noțiunea de clasă $W_p^{(r)}(\mathcal{G})$ definită pentru r neîntregi. Ea se definește în felul următor [33] :

Fie $1 \leqslant p < \infty$, $r > 0$, $r = \bar r + \alpha$, unde $\bar r$ e întreg și $0 < \alpha < 1$. Funcția f aparține clasei $W_p^{(r)}(\mathcal{G})$, dacă aparține clasei $W_p^{(\bar r)}(\mathcal{G})$ a lui Sobolev și dacă pentru orice derivată parțială a ei $f^{(\bar{r})}$ de ordinul $\bar{r}$, are o valoare finită expresia

$$\| f^{(\bar{r})} \|_{\overline{W}_p^{(\alpha)}(\mathcal{G})} = \left(\int_{R_n} \int_{R_n} \frac{| f^{(\bar{r})}(\bar{x}) - f^{(\bar{r})}(\bar{y}) |^p}{| \bar{x} - \bar{y} |^{n+p\alpha}} d R_n \, d R_n \right)^{1/p} < \infty,$$

$$| \bar{x} - \bar{y} | = \sqrt{\sum_1^n (x_i - y_i)^2}.$$

În clasa $W_p^{(r)}(\mathcal{G})$ se introduce norma

$$\| f \|_{W_p^{(r)}(\mathcal{G})} = \{ \| f \|^p_{W_p^{(\bar{r})}(\mathcal{G})} + \sum \| f^{(\bar{r})} \|_{\overline{W}_p^{(\alpha)}(\mathcal{G})} \}^{1/p},$$

unde suma se extinde asupra tuturor derivatelor parțiale ale funcției f, de ordinul $\bar{r}$. Se poate demonstra că spațiul normat $W_p^{(r)}(\mathcal{G})$ este complet, adică este un spațiu Banach.

În lucrările autorilor citați se arată că pentru r întreg și pentru $m = 1$ are loc teorema de scufundare de timpul II:

$$W_p^{(r)}(R_n) \subset W_p^{\left(r - \frac{n-m}{p}\right)}(R_m), \tag{8}$$

dacă

$$r - \frac{n-m}{p} > 0, \qquad 1 < p < \infty \tag{9}$$

și teorema reciprocă respectivă, dacă sînt îndeplinite inegalitățile (9).

În afară de aceasta, (O. V. B e s o v [10]) s-a arătat că aceste afirmații sînt valabile pentru m arbitrar, dacă $r - \frac{n-m}{p}$ nu este un număr întreg. L. N. Slobodețki a obținut de asemenea sub formă completă teorema directă de tipul II, precum și reciproca ei pentru orice r și $p = q$.

În teoremele indicate se realizează deja trecerea de la r întreg la $r - \frac{n-m}{p}$ neîntreg, pentru $r = 1, 2, \ldots$ arbitrar, iar pentru $p = 2$ se realizează orice treceri posibile de la $r > 0$ la $r - \frac{n-m}{p}$ precum și inversele teoremelor respective.

În mod natural se naște întrebarea dacă teorema de tipul I, precum și teorema de tipul II și reciproca ei sînt valabile pentru orice r, p, n, m, admisibili. Cu alte cuvinte se pune problema dacă în teoremele mele enunțate mai sus, obținute pentru clasele $H_p^{(r)}R_n)$ nu se poate înlocui pretutindeni H cu W.

Cercetările făcute de curînd de către tinerii mei elevi O. V. B e s o v [10, 11] și S. V. U s p e n s k i [12, 13], care au studiat pînă la capăt această problemă, au arătat că rezolvarea ei are un caracter afirmativ

numai în cazul teoremei de tipul I, iar în ceea ce privește teorema de tipul II, au loc excepții esențiale.

În cele ce urmează r, n, m au semnificațiile anterioare, iar $k = r - \frac{n}{p} + \frac{m}{p'}$.

Teorema de mai jos conține rezultatele lui O. V. Besov și S. V. Uspenski, privitoare la clasele W ale autorilor premergători, citați anterior.

Teorema 2 (a lui O. V. Besov și S. V. Uspenski). *Dacă* $1 < p \leqslant p' < \infty$ *și dacă mai este satisfăcută una din următoarele două condiții*

1) $k \geqslant 0$, $p < p'$,

2) $k > 0$, k neîntreg,

atunci are loc scufundarea

$$W_p^{(r)}(R_n) \subset W_{p'}^{(k)}(R_m) \tag{10}$$

Scufundarea (10) are loc de asemenea pentru $p = p'$ și $k = r - \frac{n-m}{p}$ întreg, numai dacă $1 < p \leqslant 2$.

În cazul $p > 2$. această ultimă afirmație este neadevărată. Se pot alege numerele r, n, m și p astfel încît r și $k = r - \frac{n-m}{p}$ să fie întregi și totodată

$$W_p^{(r)}(R_n) \not\subset W_p^{\left(r - \frac{n-m}{p}\right)}(R_m).$$

Astfel, teorema de tipul II poate să nu fie adevărată chiar dacă se consideră clasele clasice ale lui Sobolev $W_p^{(r)}(R_n)$, $W_p^{(k)}(R_m)$ pentru r și k întregi. Prin urmare nu poate fi vorba de extinderea claselor $W_p^{(r)}(R_n)$ de la r întreg la r fracționar, astfel că familia de clase obținută să fie închisă relativ la teoremele de tipul II.

Teorema reciprocă (a teoremei II), de asemenea nu întotdeauna poate fi exprimată în cadrul claselor W. În orice caz, are loc următoarea teoremă :

TEOREMA 3. *Dacă* $k = r - \frac{n-m}{p} > 0$, *atunci pentru un* k *neîntreg* (S. V. U s p e n s k i [13] și P. I. L i z o r k i n [19]), *sau dacă* k *este întreg, pentru* $p \geqslant 2$ (S. V. U s p e n s k i [13]) *are loc scufundarea*

$$W_p^{(k)}(R_m) \subset W_p^{(r)}(R_n). \tag{11}$$

Pentru k întreg și $p < 2$ această afirmație nu mai are loc.

În lumina acestor rezultate, prezintă un mare interes lucrările lui O. V. B e s o v [10, 11], care a arătat că se pot extinde clasele $W_2^{(r)}(R_n)$ ($r = 0, 1, 2, \ldots$) la p ($1 \leqslant p < \infty$) și $r > 0$ arbitrari, astfel încît familiile de clase $B_p^{(r)}(R_n)$ obținute să fie complet închise relativ la teoremele de scufundare de tipul I, II și de tip mixt, precum și relativ la teorema reciprocă (a teoremei de tipul II). Mai precis, dacă în relațiile I, II, III formulate pentru clasele H se înlocuiește pretutindeni H cu B, atunci ele se mențin adevărate. Pentru clasele B are loc de asemenea și teorema reciprocă (a teoremei II), absolut analoagă cu teorema respectivă enunțată anterior pentru clasele H.

Clasa $B_p^{(r)}(R_n)$ se definește în felul următor: pentru r fracționar această clasă coincide cu $W_p^{(r)}(R_n)$ cu aceeași metrică. Pentru $r > 0$ întreg, funcția f aparține clasei $B_p^{(r)}(R_n)$, dacă ea este p-sumabilă în R_n împreună cu derivatele ei parțiale nemixte generalizate, pînă la ordinul $r-1$ inclusiv și dacă în afară de aceasta, are o valoare finită norma

$$\|f\|_{B_p^{(r)}(R_n)} = \|f\|_{L_p(R_n)} + \sum_{i=1}^{n} \left\{ \int_0^1 t^{-p\alpha-1} \omega_2^p\left(\frac{\partial^{r-1} f}{\partial x_i^{r-1}},\ te_i\right) dt \right\}^{1/p}_p. \tag{12}$$

Aici

$$\omega_2(\varphi,\ te_i) = \sup_{|h| \leq t} \|\Delta^2(\varphi, h e_i)\|_{L_p(R_n)} =$$

$$= \sup_{|h| \leq t} \|\varphi(\bar{x} + he_i) - 2\varphi(\bar{x}) + \varphi(\bar{x} - he_i\|_{L_p(R_n)}$$

este modulul de continuitate de ordinul al doilea al funcției φ în metrica L_p în raport cu variabila x_i (e_i reprezintă versorul axei x_i).

Dacă introducem noțiunea de cea mai bună aproximație

$$A_e(f)_p = \inf_{g_e} \|f - g_e\|_{L_p(R_n)}$$

a funcției f cu ajutorul funcțiilor întregi $g_e = g_e(x_1, \ldots, x_n)$ de tip exponențial de gradul e în raport cu fiecare din variabilele x_i ($i = 1, \ldots, n$), atunci norma funcției $f \in B_p^{(r)}(R_n)$ pentru r oarecare întreg sau neîntreg este echivalentă cu norma

$$\|f\|_{B_p^{(r)}(R_n)} = \|f\|_{L_p(R_n)} + \left\{\sum_1^{\infty} a^{kpr} A_{a^k}(f)_p^p\right\}^{1/p} < \infty \qquad (a > 1), \tag{13}$$

care are acum un aspect unitar.

Trebuie să remarcăm că echivalența normelor (12) și (13) în cazul periodic (vezi observația de la sfîrșitul acestui paragraf), pentru $n = 1$ rezultă de asemenea din rezultatele lui A. A. K o n i u ș k o v [38].

Clasele $W_p^{(r)}$ și $B_p^{(r)}$ sînt strîns legate între ele. Ele coincid în cazul cînd r este fracționar și de asemenea pentru orice r dacă $p = 2$. Dacă $p \neq 2$ și r este întreg, atunci ele diferă. Legătura dintre ele apare încă cu ocazia formulării teoremei de scufundare de tipul II. După cum au arătat O. V. Besov și S. V. Uspenski, dacă $k = r - \frac{n-m}{p} > 0$, atunci

$$W_p^{(r)}(R_n) \subset B_p^{(k)}(R_m) \tag{14}$$

și

$$B_p^{(k)}(R_m) \subset W_p^{(r)}(R_n).$$

În afară de aceasta au loc scufundările

$$\begin{aligned} B_p^{(r)}(R_n) &\subset W_p^{(r)}(R_n) \quad (1 < p \leqslant 2) \\ W_p^{(r)}(R_n) &\subset B_p^{(r)}(R_n) \quad (p \geqslant 2). \end{aligned} \tag{15}$$

Dacă r este întreg iar $p \neq 2$, atunci membrii stîngi ai acestor relații diferă esențial de membrii drepți respectivi, iar pentru r fracționar, coincid.

Din cele spuse, rezultă că teoremele de scufundare de tipul II nu se pot formula în cazul general numai în cadrul claselor W. În ceea ce privește clasele B, în acest sens ele sînt închise în sine, întocmai ca și clasele H.

Voi mai remarca, că în aceste cercetări un rol important l-a avut de asemenea studiul așa-numitelor clase ponderate de funcții, ale căror derivate parțiale sînt p-sumabile cu o anumită pondere ce intervine pe frontiera domeniului pe care se face integrarea (vezi § 5).

Studiul sistematic al claselor ponderate a fost început în lucrările lui L. D. K u d r i a v ț e v [14, 15] și apoi a fost continuat în lucrările lui A. A. V a ș a r i n [16], P. I. L i z o r k i n [17, 19] și S. V. U s p e n s k i [12, 13]. Rezultate definitive în această direcție au fost obținute în cercetările lui S. V. Uspenski.

În sfîrșit, relevăm faptul că rezultatele despre care s-a vorbit aici au fost extinse în unele cazuri la domenii $\mathcal{G} \subset R_n$ care au o frontieră suficient de netedă. Spațiul R_n din formulările anterioare se înlocuiește aici cu $\mathcal{G}$ iar R_m, respectiv cu frontiera m-dimensională Γ a domeniului $\mathcal{G}$. Pe de altă parte, aceste rezultate au fost extinse de asemenea atît la clasele mai generale $H_p^{(r_1, \ldots, r_n)} = H^{(\vec{r})}$, cît și la clasele $W_p^{(\vec{r})}$, $B_p^{(\vec{r})}$ și chiar $H_{p_1, \ldots, p_n}^{(r_1, \ldots, r_n)} = H_{\vec{p}}^{(\vec{r})}$ de funcții, care au derivate parțiale în raport cu diverse variabile de diferite ordine, putînd avea chiar și norme diferite. Despre acestea se va vorbi în paragrafele următoare.

Mai facem încă următoarea observație. Se pot considera funcțiile definite în R_n, periodice în raport cu fiecare din variabilele x_k ($k = 1, \ldots, n$) de perioadă 2π și pentru asemenea funcții se pot defini clasele $W_{p*}^{(r)}(R_n)$, $H_{p*}^{(r)}(R_n)$, $B_{p*}^{(r)}(R_n)$ analoage respectiv cu clasele $W_p^{(r)}(R_n)$, $H_p^{(r)}(R_n)$, $B_p^{(r)}(R_n)$. Ele se definesc exact la fel, cu singura deosebire că norma $\|f\|_{L_p(R_n)}$ se înlocuiește pretutinde cu norma

$$\|f\|_{L^*_p(R_n)} = \left(\int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} |f|^p dR_n\right)^{1/p}$$

și în afară de aceasta, cea mai bună aproximație $A_e(f)_p$ a funcției f prin funcții întregi de tip exponențial de grad e trebuie înlocuită respectiv cu cea mai bună aproximație $E_e^*(f)_p$ a funcției periodice f prin polinoame trigonometrice $T_e(\bar{x})$ de ordinul e în raport cu fiecare din variabile. Toate aceste afirmații rămîn valabile și în cazul periodic, adică pretutindeni W, H, B se pot înlocui respectiv cu W^*, H^*, B^*.

Această afirmație trebuie avută în vedere și în cele ce urmează. Claselor $H^{(r)}_{\vec{p}}(R_n)$, $W^{(r)}_{\vec{p}}(R_n)$, $B^{(r)}_{\vec{p}}(R_n)$ în tot spațiul R_n (dar nu în $\mathcal{G} \subset R_n$) le corespund clasele periodice $H^{(r)}_{\vec{p}*}(R_n)$, $W^{(r)}_{\vec{p}*}(R_n)$, $B^{(r)}_{\vec{p}*}(R_n)$ definite analog, dar cu norme calculate nu relativ la întreg spațiul R_n, ci relativ la intervalele $\{0 \leqslant x_k \leqslant 2\pi\, ;\ k = 1, \ldots, n\}$. Teoremele enunțate pentru clasele $H(R_n)$, $W(R_n)$ și $B(R_n)$ sînt valabile și se demonstrează analog respectiv pentru clasele $H_*(R_n)$, $W_*(R_n)$, $B_*(R_n)$.

Trebuie să mă mai opresc asupra unui rezultat aparținînd lui G. H a r d y și J. L i t t l e w o o d [45], care au considerat clasele $\widetilde{W}^{(r)}_p(R_1)$ ale lui Weyl de funcții periodice unidimensionale, de perioadă 2π, avînd derivată (întreagă sau fracționară în sensul lui Weyl) de ordinul $r > 0$. Funcția f de perioadă 2π aparține clasei $\widetilde{W}^{(r)}_{p*}$, dacă admite reprezentarea integrală:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} K_r(x-t)\, \varphi(t)\, dt,$$

unde φ este o funcție periodică aparținînd lui $L^*_p = L_p(0, 2\pi)$, iar

$$K_r(t) = \sum_1^\infty \frac{1}{k^r} \cos\left(kt - \frac{r\pi}{2}\right) \qquad (r > 0)$$

este sîmburele lui Weil. Pentru $r = 0, 1, 2, \ldots$ întregi, are loc egalitatea

$$\widetilde{W}^{(r)}_{p*} = W^{(r)}_{p*}.$$

Ca normă a lui f în sensul $\widetilde{W}^{(r)}_{p*}$ este natural să se ia valoarea

$$\|f\|_{\widetilde{W}^{(r)}_{p*}} = \|\varphi\|_{L^*_p}.$$

H a r d y și L i t t l e w o o d au demonstrat o teoremă (vezi [45] sau [46], § 9.82 (1)), din care rezultă îndată scufundarea

$$\widetilde{W}^{(r)}_{p*} \subset \widetilde{W}^{\left(r - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}\right)\right)}_{p'*}, \quad 1 < p < p' < \infty, \quad r - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}\right) \geqslant 0.$$

Aici r este un număr pozitiv oarecare. Astfel, această teoremă este o analoagă completă a teoremei 2, enunțată mai sus pentru $n = m = 1$. Trebuie să spunem că dezvoltarea teoriei scufundării claselor pentru funcții de mai multe variabile a avut loc independent de teorema lui Hardy și Littlewood.

Funcțiile de clasă $\widetilde{W}^{(r)}_{p*}$ se definesc sub formă de integrale cu sîmbure, în timp ce funcțiile claselor considerate anterior, printre care și cele ale claselor W, se definesc prin alte considerente.

În sfîrșit, voi aminti o notă recentă a lui I. A. K i p r i a n o v [41], în care printr-o metodă originală se dă definiția claselor fracționare $W^{(r)}_p$ și se demonstrează pentru ele unele teoreme de scufundare.

§ 2. Clasele $\overset{(r)}{H}_{x_i p}$, $\overset{(r)}{W}_{x_i p}$, $\overset{(r)}{H}_{\vec{p}}$, $\overset{(r)}{W}_{\vec{p}}$

Fie $\mathcal{G}$ o mulțime deschisă aparținînd spațiului R_n și fie $\mathcal{G}^{(i)}_\delta$ o mulțime de puncte $\bar{x} \in \mathcal{G}$, care se găsesc față de frontiera lui $\mathcal{G}$ la o distanță mai mare ca $\delta > 0$, considerîndu-se distanța în direcția axei Ox_i.

În cele ce urmează n și m vor reprezenta numere naturale care satisfac inegalitățile $1 \leqslant m \leqslant n$, iar r și p — numere reale, neobligatoriu întregi, satisfăcînd inegalitățile $r > 0$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Astfel, p poate fi egal cu $+\infty$. Convenim să reprezentăm numărul r sub forma $r = \bar{r} + \alpha$, unde $\bar{r}$ este întreg iar $0 < \alpha \leqslant 1$.

Conform definiției (vezi [3]), funcția $f = f(\bar{x})$ aparține clasei $H^{(r)}_{x_i p}(\mathcal{G})$ dacă ea aparține clasei $L_p(\mathcal{G})$ împreună cu derivatele ei parțiale generalizate $\frac{\partial^k f}{\partial x_i^k} = f^{(k)}_{x_i}$ pînă la ordinul $\bar{r}$, inclusiv și dacă există o constantă M, depinzînd de f, astfel încît să fie satisfăcută inegalitatea

$$\|f^{(\bar{r})}_{x_i}(\bar{x} + \bar{h}_i) - f^{(\bar{r})}_{x_i}(\bar{x})\|_{L_p(\mathcal{G}^{(i)}_\delta)} \leqslant M |\bar{h}_i|^\alpha \tag{1}$$

dacă $0 < \alpha < 1$ și inegalitatea

$$\|f^{(\bar{r})}_{x_i}(\bar{x} + \bar{h}_i) - 2 f^{(\bar{r})}_{x_i}(\bar{x}) + f^{(\bar{r})}_{x_i}(\bar{x} - \bar{h}_i)\|_{L_p(\mathcal{G}^{(i)}_\delta)} \leqslant M |\bar{h}_i| \tag{2}$$

dacă $\alpha = 1$, unde $\bar{h}_i$ este vector arbitrar avînd direcția axei x_i și satisfăcînd inegalitatea $|\bar{h}_n| < \delta$. Inegalitățile (1), (2) trebui să fie satisfăcute pentru orice $\delta > 0$, pentru care mulțimea $\mathcal{G}^{(i)}_\delta$ nu este vidă. Constanta cea mai mică M, pentru care sînt satisfăcute aceste inegalități, o notăm cu $M^{(r)}_{x_i p}(f, \mathcal{G})$. Introducem norma

$$\|f\|_{H^{(r)}_{x_i p}(\mathcal{G})} = \|f\|_{L_p(\mathcal{G})} + M^{(r)}_{x_i p}(f, \mathcal{G}). \tag{3}$$

Clasa $H^{(r)}_{x_i p}(\mathcal{G})$ cu această normă, reprezintă după cum este ușor de văzut, un spațiu funcțional liniar normat. Se poate demonstra că el este complet astfel că $H^{(r)}_{x_i p}(\mathcal{G})$ reprezintă un spațiu Banach.

Se mai poate considera (vezi [18], § 4) spaţiul $W_{x_i p}^{(r)}(\mathcal{G})$, unde deocamdată în expunerea noastră r reprezintă un număr întreg pozitiv. Conform definiţiei, funcţia f aparţine spaţiului, $W_{x_i p}^{(r)}(\mathcal{G})$, dacă ea împreună cu derivatele sale parţiale $f_{x_i}^{(k)}$ pînă la ordinul r inclusiv aparţine spaţiului $L_p(\mathcal{G})$. Pentru fiecare funcţie de acest fel se poate considera norma

$$\|f\|_{W_{x_i p}^{(r)}(\mathcal{G})} = \|f\|_{L_p(\mathcal{G})} + \sum_1^r \|f_{x_i}^{(k)}\|_{L_p(\mathcal{G})},$$

cu ajutorul căreia $W_{x_i p}^{(r)}(\mathcal{G})$ devine un spaţiu de tip Banach.

Să considerăm mulţimea deschisă $\mathcal{G} \subset R_n$ de tipul $\mathcal{G} = R_1 \times \mathcal{G}'$, unde R_1 reprezintă întreaga axă reală $-\infty < x_1 < \infty$ iar $\mathcal{G}'$ este o mulţime deschisă de puncte $(x_2, \ldots, x_n)$. Astfel $\mathcal{G}$ este produsul topologic al lui R_1 cu $\mathcal{G}'$.

Considerăm funcţiile

$$g_{x_1 v} = g_v(\bar{x})_{x_1} = g_v(x_1, \ldots, x_n)_{x_1} \qquad (v > 0),$$

avînd următoarele proprietăţi :

1) $g_v(\bar{x})_{x_1} \in L_p(\mathcal{G})$,

2) Aproape pentru toate punctele $(x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{G}'$ funcţia $g_v(\bar{x})_{x_1}$ în raport cu variabila x_1 este întreagă de tip exponenţial de gradul v.

Considerăm de asemenea valoarea

$$A_{x_1 v}(f)_{L_p(\mathcal{G})} = \inf_{g_{x_1 v}} \|f - g_{x_1 v}\|_{L_p(\mathcal{G})},$$

unde limita inferioară se extinde la toate funcţiile $g_{x_1 v}$ pentru un $v > 0$ dat.

Are loc următoarea teoremă de aproximare (vezi [4], teoremele 6, 8) :

Teorema 1. *Pentru ca $f \in H_{x_1 p}^{(r)}(\mathcal{G})$, este necesar şi suficient ca pentru o constantă $C > 0$ nedepinzînd de $v \geqslant 1$ să fie îndeplinită inegalitatea*

$$A_{x_1 v}(f)_{L_p(\mathcal{G})} \leqslant \frac{c}{v^r} \quad (v \geqslant 1). \tag{4}$$

Pentru clasa $W_{x_1 p}^{(r)}$ nu mai există o astfel de teoremă închisă ; totuşi este util să se ştie că pentru funcţia $f \in W_{x_1 p}^{(r)}(\mathcal{G}) \subset H_{x_1 p}^{(r)}(\mathcal{G})$, $1 \leqslant p < \infty$, are loc o proprietate mai tare decît (4). Pentru $p = \infty$ această proprietate de asemenea are loc, dacă derivatele parţiale de ordinul r ale lui f sînt uniform continue.

Remarcăm că au loc următoarele scufundări

$$H_{x_1 p}^{(r)}(\mathcal{G}) \subset H_{x_1 p}^{(r')}(\mathcal{G}) \qquad (0 < r' < r), \tag{5}$$

$$W_{x_1 p}^{(\rho)}(\mathcal{G}) \subset H_{x_1 p}^{(\rho)}(\mathcal{G}) \qquad (\rho = 1, 2, \ldots), \tag{6}$$

$$H_{x_1 p}^{(r)}(\mathcal{G}) \subset W_{x_1 p}^{(\rho)}(\mathcal{G}) \qquad (0 \leqslant \rho < r, \ \rho \text{ întreg}), \tag{7}$$

$$W_{x_1 p}^{(\rho)}(\mathcal{G}) \subset W_{x_1 p}^{(\rho')}(\mathcal{G}) \qquad (0 \leqslant \rho' \leqslant \rho\ ;\ \rho', \rho = 1, 2, \ldots) \tag{8}$$

Trebuie să amintim convenţia pe care am făcut-o în capitolul 1, în baza căreia aceste scufundări sînt însoţite de inegalităţi corespunzătoare.

Proprietăţile (5)—(8) se demonstrează uşor cu ajutorul teoremei de aproximare formulată anterior.

Considerăm acum sistemele de numere pozitive $\vec{r} = (r_1, \ldots, r_n)$ şi de numere $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, care satisfac inegalităţile $1 \leqslant p_k \leqslant \infty$ $(k = 1, \ldots, n)$.

Conform definiţiei, funcţia f aparţine clasei $H_{\vec{p}}^{(\vec{r})}(\mathcal{G}) = H_{p_1, \ldots, p_n}^{(r_1, \ldots, r_n)}(\mathcal{G})$ (vezi [18]), dacă aparţine tuturor claselor $H_{x_i p_i}^{(r_i)}$.

Introducem de asemenea norma

$$\|f\|_{H_{(\vec{p})}^{(\vec{r})}(\mathcal{G})} = \sum_1^n \|f\|_{H_{x_i p_i}^{(r_i)}(\mathcal{G})}$$

cu ajutorul căreia $H_{\vec{p}}^{(\vec{r})}$ formează, după cum este uşor de demonstrat, un spaţiu Banach.

Vom considera funcţiile

$$g_{\vec{v}}(\bar{x}) = g_{v_1, \ldots, v_n}(\bar{x}) \qquad (v_k > 0) \tag{9}$$

aparţinînd spaţiului $L_p(R_n)$ şi fiind funcţii întregi de tip exponenţial de grade $v_1, \ldots, v_n$, referitor la variabilele $x_1, \ldots, x_n$. Aici unele dintre numerele v_k pot fi egale cu ∞, ceea ce înseamnă că funcţia $g_{\vec{v}}$ nu este neapărat întreagă în raport cu variabila x_k corespunzătoare.

Are loc teorema de aproximare (vezi [18], teorema 2.2) :

Teorema 2. *Dacă $f \in H_{\vec{p}}^{(\vec{r})}(R_n)$ atunci există o familie de funcţii $g_{\vec{v}}$ definite pentru $1 \leqslant v_k \leqslant \infty$ şi satisfăcînd inegalităţile :*

$$\begin{gathered}
\|f - g_{v_1, \infty, \ldots, \infty}\|_{L_{p_1}(R_n)} < \frac{C}{v_1^{r_1}}, \\
\|g_{v_1, \infty, \ldots, \infty} - g_{v_1, v_2, \infty, \ldots, \infty}\|_{L_{p_2}(R_n)} < \frac{C}{v_2^{r_2}}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\|g_{v_1, \ldots, v_{k-1}, \infty} - g_{v_1, \ldots, v_n}\|_{L_{p_n}(R_n)} < \frac{C}{v_n^{r_n}},
\end{gathered} \tag{10}$$

unde constanta C are forma

$$C = C_0 M_{\vec{p}}^{(\vec{r})}(f, R_n) = C_0 \sum_1^n M_{x_i p_i}^{(r_i)}(f, g),$$

iar C_0 depinde numai de $\vec{p}$, $\vec{r}$ şi n.

Pentru familia $g_{\vec{v}}$ de asemenea sînt satisfăcute inegalități de tipul (10), unde variabilele $x_1, \ldots, x_n$ se pot permuta oricum.

Clasa $W^{(\vec{r})}_{\vec{p}}(\mathcal{G})$ (vezi [18]) se definește ca intersecția claselor $W^{(r_i)}_{x_i p_i}(\mathcal{G})$, cu norma

$$\|f\|_{W^{(\vec{r})}_{\vec{p}}(\mathcal{G})} = \sum_{i=1}^{n} \|f\|_{W^{(r_i)}_{x_i p_i}(\mathcal{G})},$$

cu ajutorul căreia $W^{(\vec{r})}_{\vec{p}}(\mathcal{G})$ devine un spațiu Banach.

În teorema 2, dacă f aparține unei clase mai restrînse $W^{(\vec{r})}_{\vec{p}}(R_n)$ decît $H^{(\vec{r})}_{\vec{p}}(R_n)$, atunci membrii drepți ai inegalităților (10) se pot înlocui respectiv cu

$$O(-v_1^{r_1}),\ v_1 \to \infty;\ \ldots;\ O(-v_n^{r_n}),\ v_n \to \infty.$$

Are loc următoarea teoremă (vezi [18], teorema 2.4 pentru $n = m$):

TEOREMA 3. *Presupunem că sînt satisfăcute inegalitățile* $r_i > 0$, $1 \leqslant p_i < p' \leqslant \infty$,

$$\varkappa = 1 - \sum_{e=1}^{n} \frac{1}{r_e}\left(\frac{1}{p_e} - \frac{1}{p'}\right) > 0, \tag{11}$$

$$\varkappa_i = 1 - \sum_{e=1}^{n} \frac{1}{r_e}\left(\frac{1}{p_e} - \frac{1}{p_i}\right) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{12}$$

și $\rho_i = \frac{r_i \varkappa}{\varkappa_i}$. (*astfel că* $\varkappa_i > 0$, $\rho_i > 0$).

Fie mai departe, $\vec{r} = (r_1, \ldots, r_n)$, $\vec{\rho} = (\rho_1, \ldots, \rho_n)$, $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n)$. *Atunci are loc scufundarea*

$$H^{(\vec{r})}_{\vec{p}}(R_n) \subset M^{(\vec{\rho})}_{p'}(R_n) = H^{(\rho_1, \ldots, \rho_n)}_{p', \ldots, p'}(R_n).$$

Această teoremă se demonstrează prin metodele teoriei aproximării funcțiilor, prin funcții întregi $g_{\vec{v}}(x)$ de grad $\vec{v}(v_1, \ldots, v_n)$, adică avînd respectiv gradele $v_1, \ldots, v_n$ relativ la variabilele $x_1, \ldots, x_n$. Aici un rol important în demonstrație îl au teoremele 1 și 2, precum și următoarele inegalități (vezi [4], § 1), care au loc pentru aceste funcții:

$$\left\| \frac{\partial g_{x_1 v}}{\partial x_1} \right\|_{L_p(R_1 \times \mathcal{G}')} \leqslant v \| g_{x_1 v} \|_{L_p(R_1 \times \mathcal{G}')} \tag{14}$$

$$\| g_{\vec{v}} \|_{L_{p'}(R_m)} \leqslant 2^{n-m} \prod_{k=1}^{n} v_k^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}} \prod_{m+1}^{n} v_k^{\frac{1}{p'}} \| g_{\vec{v}} \|_{L_p(R_n)} \tag{15}$$

$$(1 \leqslant m \leqslant n,\ 1 \leqslant p \leqslant p' \leqslant \infty).$$

In prima inegalitate, care reprezintă o generalizare a inegalității lui S. N. Bernstein, funcția $g_{x_1 v}$ după cum am convenit anterior, este întreagă în raport cu x_1, de gradul v aproape pentru toate punctele mulțimii $\mathcal{G}'$. În demonstrația teoremei 3, această inegalitate se aplică pentru $R_1 \times \mathcal{G}' = R_n$. A doua inegalitate se aplică în cazul dat pentru $m = n$.

Vom face următoarea observație. Teorema 3 în condițiile specificate în enunțul ei, exprimă scufundarea

$$H^{(\vec{r})}_{\vec{p}'}(R_n) \subset H^{(\vec{\rho})}_{p'}(R_n).$$

Însă acum clasa $H^{(\vec{\rho})}_{p'}(R_n)$ se poate considera ca inițială și în cazul inegalităților

$$1 \leqslant p' < p'' \leqslant \infty, \quad \varkappa' = 1 - \left(\frac{1}{p'} - \frac{1}{p''}\right) \sum_{1}^{n} \frac{1}{\rho_n} > 0.$$

În baza aceleiași teoreme 3, se poate trage concluzia că are loc scufundarea

$$H^{(\vec{\rho})}_{p'}(R_n) \subset M^{(\vec{\rho}')}_{p''}(R_n),$$

unde $\vec{\rho}' = (\rho_1', \ldots, \rho_n') = \varkappa' \vec{\rho}$.

Este de remarcat faptul că dacă am trece dintr-odată de la $\vec{p}$ la p'', am obține chiar vectorul $\vec{\rho}'$. Astfel teorema 3, în sensul arătat, are un caracter tranzitiv.

Un exemplu interesant de funcție f de clasă $H^{(\vec{r})}_{\vec{p}}(R_n)$ pentru care constantele $\varkappa_i$ definite de (12) satisfac inegalitățile $\varkappa_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, este funcția (vezi [4, 19, 20]):

$$f(\overline{x}) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{n} F_a\, v \frac{r_1 \cdots r_n}{r_j}\, \varkappa_j(x_j)}{a^{v r_1 \ldots r_n \left\{1 + \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{q_i}\right) \frac{1}{r_i}\right\}}}, \tag{16}$$

$$\frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i} = 1, \quad F_N(x) = \left(\frac{\sin \frac{N}{2}}{x}\right)^2, \quad a > 1.$$

Se poate demonstra că seria (16) converge în sensul $L_p(R_n)$ către o funcție $f(\overline{x}) \in H^{(\vec{r})}_{\vec{p}}(R_n)$. Cu această ocazie, pentru un $\mathcal{G}$ destul de mare, această funcție apare ca funcție-limită a clasei $H^{(\vec{r})}_{\vec{p}}(R_n)$, înțelegînd prin aceasta că funcția nu aparține clasei $H_{\vec{p}}^{(r_1, \ldots, r_{i-1}, r_i+\varepsilon, r_{i+1}, \ldots, r_n)}(R_n)$ oricare ar fi i și $\varepsilon > 0$. Mai departe se poate demonstra că dacă $1 \leqslant p < p' \leqslant \infty$ și dacă sînt satisfăcute toate condițiile teoremei 3, atunci funcția f se poate reprezenta de asemenea sub forma unei serii convergente în $L_{p'}(R_n)$:

$$f(\bar{x}) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} F_b\, v\, \frac{\varrho_1 \cdots \varrho_n}{\varrho_j}(x_j)}{b^{v(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)}\left\{1 + \left(1 + \frac{1}{q'}\right) \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\varrho_i}\right\}}, \tag{17}$$

unde $b = a^{\frac{\varkappa_1 \ldots \varkappa_n}{\varkappa^{n-1}}}$, de unde, în baza celor spuse anterior, rezultă că $f(\vec{x})$ nu numai că aparține clasei $H_{p'}^{(\vec{\varrho})}(R_n)$, dar este și o funcție-limită a acestei clase. Acest fapt arată că afirmația făcută de teorema 3 nu poate fi îmbunătățită în cadrul claselor H.

Ne vom opri încă și asupra teoremelor privind prelungirea funcțiilor din clasa $H_{\vec{p}}^{(\vec{r})}(\mathcal{G})$ (vezi [5], teorema 2.2) :

TEOREMA 4. *Fie $\mathcal{G} \subset R_n$ o mulțime oarecare deschisă, $f \in H_{\vec{p}}^{(\vec{r})}(\mathcal{G})$ (respectiv $f \in W_{\vec{p}}^{(\vec{r})}(\mathcal{G})$)* și $\delta > 0$ *în așa fel încît $\mathcal{G}_\delta$ să fie o mulțime nevidă. Atunci există o funcție $\bar{f} \in H_{\vec{p}}^{(\vec{r})}(R_n)$ (respectiv $\bar{f} \in W_{\vec{p}}^{(\vec{r})}(R_n)$) astfel încît $\bar{f} = f$ pe $\mathcal{G}_\delta$ și*

$$\|\bar{f}\|_{H_{\vec{p}}^{(\vec{r})}(R_n)} \leqslant C_\delta \|f\|_{H_{\vec{p}}^{(\vec{r})}(\mathcal{G})}$$

$$\left(\textit{respectiv } \|\bar{f}\|_{W_{(\vec{p})}^{(\vec{r})}(R_n)} \leqslant C_\delta \|f\|_{W_{\vec{p}}^{(\vec{r})}(\mathcal{G})}\right),$$

unde C_δ este o constantă care depinde de δ și $\vec{r}$.

Trebuie să relevăm faptul că în general constanta C_δ crește nelimitat atunci cînd $\delta \to 0$.

Enunțăm de altfel :

TEOREMA 5. *Dacă* (vezi [28, 21, 49])

$$\mathcal{G} = \Delta = \{a_i \leqslant x_i \leqslant b_i\,;\ i = 1, \ldots, n\}$$

este un paraliliped, avînd laturile paralele cu axele de coordonate, atunci constanta C_δ pentru $\delta \to 0$ este mărginită pentru clasa H, dacă toate numerele $r_1, \ldots, r_n$ sînt neîntregi și este posibilă o prelungire pe R_n din Δ.

În cazul cînd r_k reprezintă numere întregi, această afirmație, după cîte se pare, este de asemenea adevărată, dar ea nu este demonstrată. Ea este valabilă pentru clasele W [21].

§ 3. Clasele $H_p^{(\vec{r})}$, $B_p^{(\vec{r})}$, $W_p^{(\vec{r})}$

Clasele $H_{\vec{p}}^{(\vec{r})}(R_n)$ în cazul cînd $p_1 = \ldots = p_n = p$ le notăm prin $H_p^{(\vec{r})}(R_n)$. Aceste clase mai particulare, posedă proprietăți mult mai bogate. În cele ce urmează vom expune proprietățile lor mai importante.

În definiția funcției f din clasa $H_p^{(\vec{r})}(R_n)$ au intervenit explicit numai proprietăți ale unor derivate nemixte ale ei. Teorema de mai jos dă un răspuns la întrebarea : ce fel de derivate mixte are f și care sînt proprietățile ei (vezi [5], teorema 3.2).

TEOREMA 1. *Fie $f \in H_p^{(\vec{r})}(R_n)$ și fie n numere întregi nenegative $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ satisfăcînd inegalitățile*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\varrho_k}{r_k} < 1. \tag{1}$$

Atunci există în R_n derivata parțială

$$\frac{\partial^{\varrho_1 + \ldots + \varrho_n} f}{\partial x_1^{\varrho_1} \ldots \partial x_n^{\varrho_n}},$$

aparținînd clasei $H_p^{(\vec{r}_1)}(R_n)$, unde

$$\vec{r}_1 = (r'_1, \ldots, r'_n),\ r'_k = r_k\left(1 - \sum_{s=1}^{n} \frac{\varrho_s}{r_s}\right) \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

și

$$\left\|\frac{\partial^{\varrho_1 + \ldots + \varrho_n} f}{\partial x_1^{\varrho_1} \ldots \partial x_n^{\varrho_n}}\right\|_{H_p^{(\vec{r}_1)}(R_n)} \leqslant C \|f\|_{H_p^{(\vec{r})}(R_n)},$$

unde constanta C nu depinde de factorul alăturat ei.

TEOREMA 2 (*a compactității*) (vezi [25, 26]). *Fie dat șirul de funcții f_e avînd una din următoarele proprietăți (despre clasele H_*, vezi sfîrșitul paragrafului 1) :*

$$\text{a)}\ \|f_e\|_{H_{p*}^{(\vec{r})}(R_n)} \leqslant K,$$

$$\text{b)}\ \|f_e\|_{H_p^{(\vec{r})}(\mathcal{G})} \leqslant K,$$

$\mathcal{G}$ fiind o mulțime deschisă.

Atunci se poate extrage un subșir $\{f_{e_k}\}$ *și există o astfel de funcție* f, *satisfăcînd condițiile* a), b) *și astfel încît să aibă loc următoarele proprietăți* :

Oricare ar fi vectorul $\vec{r}'$, *care satisface inegalitățile* $0 < \vec{r}' < \vec{r}$, *are loc în cazul* a)

$$\lim_{k\to\infty} \|f_{e_k} - f\|_{H^{(\vec{r}')}_{p^*}(R_n)} = 0$$

iar în cazul b)

$$\lim_{k\to\infty} \|f_{e_k} - f\|_{H^{(\vec{r}')}_{p^*}(\mathcal{G}')} = 0$$

pentru orice domeniu mărginit $\mathcal{G}' \subset \overline{\mathcal{G}}' \subset \mathcal{G}$.

Dacă $\mathcal{G} = \Delta = \{a_i \leqslant x_i \leqslant b_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ este un paralelipiped, avînd laturile paralele cu axele de coordonate, atunci se poate considera $\mathcal{G}' = \Delta$.

Exemplele ne arată că pentru clasa $H^{(\vec{r})}_{\vec{p}} = H^{(r_1, \ldots, r_n)}_{p_1, \ldots, p_n}$, unde numerele p_n nu sînt egale cu unul și același număr p, teorema compactității de tipul dat, nu mai rămîne valabilă în general.

În baza teoremei 3, putem să obținem numai scufundarea

$$H^{(\vec{r})}_{\vec{p}} \subset H^{(\vec{\varrho}')}_{p'} \qquad \{p' \geqslant p_i\,;\ i = 1, \ldots, n\}$$

și apoi să aplicăm teorema compactității formulată anterior, considerînd mulțimea dată de funcții ca o mulțime aparținînd clasei $H^{(\vec{\varrho})}_{p'}$.

Are loc următoarea teoremă de scufundare (de tipul II), care dă posibilitatea ca din proprietățile diferențiale ale funcției f definite în R_n, să se afle proprietăți diferențiale ale ei în $R_m \subset R_n$ (vezi [4], teorema 12 pentru $p = p'$).

TEOREMA 3. *Dacă*

$$\varkappa = 1 - \frac{1}{p}\sum_{m+1}^{n} \frac{1}{r_i} > 0, \tag{2}$$

atunci are loc scufundarea

$$H^{(\vec{r})}_{p}(R_n) \subset H^{(\varkappa \vec{r})}_{p}(R_m).$$

În cadrul claselor H, această afirmație nu poate fi îmbunătățită. Combinînd această teoremă cu teorema 3, § 2, se poate obține următoarea teoremă de scufundare mai generală, pentru clasele $H^{(\vec{r})}_{\vec{p}}(R_n)$, demonstrată în lucrarea [18].

TEOREMA 4. *Dacă pentru numerele* $r_i > 0$, $1 \leqslant p_i \leqslant p' \leqslant \infty$, *și numerele naturale* $1 \leqslant m \leqslant n$ *sînt îndeplinite inegalitățile*

$$\varkappa = \begin{vmatrix} 1 - \sum\limits_{1}^{n} \frac{1}{r_e}\left(\frac{1}{p_e} - \frac{1}{p'}\right) & -\frac{1}{p'}\sum\limits_{1}^{n} \frac{1}{r_e} \\ -\sum\limits_{m+1}^{n} \frac{1}{r_e}\left(\frac{1}{p_e} - \frac{1}{p'}\right) & 1 - \frac{1}{p'}\sum\limits_{m+1}^{n} \frac{1}{r_e} \end{vmatrix} > 0,$$

$$\varkappa_i = 1 - \sum_{e=1}^{n} \frac{1}{r_e}\left(\frac{1}{p_e} - \frac{1}{p_i}\right) > 0 \quad (i = 1, \ldots, n),$$

atunci notînd cu $\rho_i = \frac{r_i \varkappa}{\varkappa_i}$, *are loc relația de scufundare*

$$H^{(\vec{r})}_{\vec{p}}(R_n) \subset H^{(\vec{\varrho})}_{\vec{p}'}(R_m).$$

În cadrul claselor H, această afirmație nu poate fi îmbunătățită. De acest fapt ne putem convinge (vezi [6]) cu ajutorul exemplului funcției-limită f, a clasei $H^{(\vec{r})}_{\vec{p}}(R_n)$ definită de relația (17) § 2. Dacă sînt satisfăcute condițiile teoremei, atunci se poate arăta că această funcție poate fi scrisă pentru un $b > 1$, de asemenea sub forma

$$f(\overline{x}) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} F_b v \frac{\rho_1 \cdots \rho_n}{\rho_j}(x_j)}{b^{v\varrho_1 \cdots \varrho_n \left\{1 + \left(1 + \frac{1}{q'}\right) \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{1}{\varrho_j}\right\}}}$$

De aceea, după cum știm deja din § 2, pentru un b suficient de mare, $f(\overline{x})$ este o funcție-limită a clasei $H^{(\vec{\varrho}')}_{p}(R_n)$, adică nu aparține unei clase H mai bune.

Teorema 4 este teorema cea mai generală care ia în considerații diferitele ordine posibile ale derivatelor nemixte pe care poate să le aibă funcția dată, aceste derivate fiind sumabile la diferite puteri. Numerele $\varkappa$ și $\varkappa_i$ sînt astfel încît teorema 4 se bucură de o proprietate tranzitivă întocmai ca și teorema 3 § 2. Trecerea de la $(\vec{p}, \vec{r}, n)$ la $(p', \vec{\rho}, m)$ și apoi la $(p'', \vec{\rho}', e)$, unde $p_i \leqslant p' \leqslant p''$, $1 \leqslant e \leqslant m \leqslant n$ poate fi înlocuită printr-o singură trecere de la $(p, \vec{r}, n)$ la $(p'', \vec{\rho}', e)$ și invers, dacă la fiecare trecere sînt satisfăcute condițiile teoremei 3. În particular, trecerea de la $(\vec{p}, \vec{r}, n)$ la $(p', \vec{r}', n)$ și apoi la $(p', \vec{r}'', m)$, duce la următoarea afirmație :

TEOREMA 5. *Are loc relaţia de scufundare*

$$H_p^{(\vec r)}(R_n) \subset H_{p'}^{(\overrightarrow{\varkappa r})}(R_m),$$

dacă $1 \leqslant m \leqslant n$, $1 \leqslant p \leqslant p' \leqslant \infty$ *şi dacă*

$$\varkappa = 1 - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}\right)\sum_{1}^{m} \frac{1}{r_i} - \frac{1}{p}\sum_{m+1}^{n} \frac{1}{r_i} > 0.$$

În cadrul claselor H această afirmaţie nu poate fi îmbunătăţită. Ultima afirmaţie poate fi verificată cu ajutorul unei funcţii-limită de clasă $H_p^{(\vec r)}(R_n)$, [6]. Mai remarcăm încă următoarea teoremă care completează teorema 2 (demonstraţia vezi [18], 4.1) :

TEOREMA 6. *Dacă* $f \in H_p^{(\vec r)}(R_n)$ *şi dacă este satisfăcută inegalitatea*

$$\varkappa = 1 - \frac{1}{p}\sum_{m+1}^{n} \frac{1}{r_i} > 0,$$

atunci în urma unei modificări convenabile a ei pe o mulţime n-dimensională de măsură nulă, pentru funcţia modificată f_1 *au loc inegalităţile*

$$\|f_1(\bar x + \bar h) - f(\bar x)\|_{L_p(R_m)} < C\|f\|_{H_p^{(\vec r)}(R_n)} \sum_{i=1}^{n} \begin{cases} |h_i|^{\rho_i} & (0 < \rho_i < 1),\\ |h_i \ln |h_i|| & (\rho_i = 1),\\ |h_i| & (\rho_i > 1),\end{cases} \qquad (3)$$

unde $\bar h = (h_1, \ldots, h_n)$, *iar* $\rho_i = r_i \varkappa$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Dacă $f \in W_p^{(\vec r)}(R_n)$, atunci inegalitatea poate fi înlocuită cu relaţia mai tare

$$\|f_1(\bar x + \bar h) - f(\bar x)\|_{L_p(R_m)} = \sum_{i=1}^{n} \begin{cases} O(|h_i|^{\rho_i}) & (0 < \rho_i < 1),\\ O(|h_i \ln |h_i||) & (\rho_i = 1),\\ O(|h_i|) & (\rho_i > 1).\end{cases} \qquad (4)$$

Vom observa că egalitatea (4) întăreşte rezultatele lui V. I. Kondraşev pentru funcţiile $f \in W_p^{(r)}(\mathcal{G})$ despre care s-a vorbit deja în § 1 (vezi [3]).

Ordinul în formulele (3), (4) în cazul $\rho_i = 1$, nu este definitiv. Aceste formule pot fi precizate dacă se evaluează a doua diferenţă

a funcţiei f în locul primei diferenţe şi atunci în condiţiile teoremei 4 vom avea pentru $f \in H_p^{(\vec r)}(R_n)$ inegalitatea

$$\|f_1(\bar x + \bar h) - 2f_1(\bar x) + f_1(\bar x - \bar h)\|_{L_p(R_m)} < C\sum_{i=1}^{n} \begin{cases} |h_i|^{\rho_i} & (0 < \rho_i \leqslant 1)\\ |h_i| & (\rho_i \geqslant 1)\end{cases} \qquad (5)$$

iar pentru $f \in W_p^{(\vec r)}(R_n)$ inegalitatea

$$|f_1(\bar x + \bar h) - 2f_1(\bar x) + f_1(\bar x - \bar h)\|_{L_p(R_m)} < C\sum_{i=1}^{n} \begin{cases} O(|h_i|^{\rho_i})\\ O(|h_i|)\end{cases} \quad (h_i \to 0) \qquad (5')$$

Într-un anumit sens, evaluările date de formulele (5), (5′) sînt definitive, întrucît ele se transformă în egalităţi pentru o funcţie-limită de clasa $H_p^{(\vec r)}(R_n)$, [20].

Teorema 3 poate fi completată în sensul că în anumite condiţii referitoare la funcţia f din clasa $H_p^{(\vec r)}(R_n)$ se poate afirma existenţa nu numai a urmei ei $f|_{R_m}$ ci şi a urmelor pe R_m a unor derivate parţiale ale ei. Cu această ocazie, chiar şi în forma preçizată, această teoremă se inversează complet. Anume, au loc următoarele două teoreme, directă şi reciprocă (vezi [4], teoremele 3.3 şi 3.4).

TEOREMA 7. *Fie dată funcţia* $f(\bar x)$, *care aparţine clasei* $H_p^{(\vec r)}(R_n)$, *fie* $1 \leqslant m < n$ *şi fie date numerele nenegative* $\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n$ *formînd un sistem* (λ). *Presupunem că sînt satisfăcute inegalităţile*

$$\rho_i^{(\lambda)} = r_i\left(1 - \sum_{j=m+1}^{n} \frac{\lambda_j}{r_j} - \frac{1}{p}\sum_{i=m+1}^{n} \frac{1}{r_j}\right) > 0.$$

Atunci derivata parţială $\dfrac{\partial^{\lambda_{m+1} + \cdots + \lambda_n} f}{\partial x_{m+1}^{\lambda_{m+1}} \cdots \partial x_k^{\lambda_k}}$, *în urma unei modificări convenabile pe o mulţime n-dimensională de măsură nulă, considerată ca funcţie de variabilele* $x_1, \ldots, x_m$, *pentru orice* $x_{m+1}, \ldots, x_n$ *fixaţi, aparţine clasei* $H_p^{(\vec\rho^{(\lambda)})}(R_m)$, $\vec\rho^{(\lambda)} = (\rho_1^{(\lambda)}, \ldots, \rho_m^{(\lambda)})$ *şi are loc inegalitatea*

$$\|\psi\|_{H_p^{(\vec\rho^{(\lambda)})}(R_m)} < C\|f\|_{H_p^{(\vec r)}(R_n)},$$

unde R_m *reprezintă subspaţiul m-dimensional al lui* R_n, *obţinut prin fixarea sistemului, de altfel arbitrar* $(x_{m+1}, \ldots, x_n)$;

$$\psi = \psi(x_1, \ldots, x_m) = \left.\frac{\partial^{\lambda_{m+1} + \cdots + \lambda_n} f}{\partial x_1^{\lambda_{m+1}} \cdots \partial x_m^{\lambda_n}}\right|_{R_m},$$

iar C este o constantă care nu depinde de factorul ce se găseşte alăturat ei.

Ultima afirmaţie se verifică în cazul funcţiei-limită.

TEOREMA 8 (reciproca teoremei 7). *Fie dat vectorul pozitiv* $\vec{r} = (r_1, \ldots, r_n)$ *şi toate sistemele posibile de numere întregi nenegative* $(\lambda) = (\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n)$, *pentru care vectorii* $\vec{\rho}^{(\lambda)} = (\rho_1^{(\lambda)}, \ldots, \rho_m^{(\lambda)})$ *sînt pozitivi. Presupunem că fiecărui sistem* (λ) *îi corespunde o funcţie* $\varphi_{(\lambda)}(x_1, \ldots, x_m)$ *de* m *variabile, care aparţine clasei* $H_p^{(\vec{\rho}^{(\lambda)})}(R_m)$:

$$\varphi^{(\lambda)} \in H_p^{(\vec{\rho}^{(\lambda)})}(R_m). \tag{6}$$

Atunci se poate construi în R_n *funcţia* $f(\bar{x})$, *avînd următoarele proprietăţi* :

1) $$f \in H_p^{(\vec{r})}(R_n)$$

$$\|f\|_{H_p^{(\vec{r})}(R_n)} \leqslant C \sum_{(\lambda)} \|\varphi_{(\lambda)}\|_{H_p^{(\vec{\rho}^{(\lambda)})}(R_n)},$$

unde constanta C *nu depinde de factorul alăturat ei, iar suma se extinde asupra tuturor sistemelor* (λ) *posibile.*

2) $$\left.\frac{\partial^{\lambda_{m+1} + \cdots + \lambda_m} f}{\partial x_{m+1}^{\lambda_{m+1}} \cdots \partial x_n^{\lambda_n}}\right|_{R_m} = \varphi_{(\lambda)}$$

D. D. Kudriavţev ([15], cap. 1) a arătat că funcţia $f \in H_p^{(\vec{r})}(R_n)$, care figurează în această teoremă, poate fi definită astfel, încît ea să fie infinit derivabilă pe $R_n - R_m$. Se poate defini efectiv un operator liniar care să facă ca fiecărui sistem (6) de funcţii $\varphi_{(\lambda)}$ să-i corespundă o funcţie $f \in H_p^{(\vec{r})}(R_n)$ infinit derivabilă pe $R_n - R_m$.

Toate teoremele date în acest capitol sînt demonstrate prin metodele teoriei aproximării funcţiilor. În particular, în demonstraţia teoremelor 2–5 un rol important îl are inegalitatea noastră ([4] § 1) :

$$\|g_{v_1 \ldots v_n}\|_{L_p(R_m)} \leqslant 2^{n-m} \left(\prod_{k=m+1}^{n} v_k \right)^{1/p} \|g_{v_1 \ldots v_k}\|_{L_p(R_n)}$$

pentru funcţii întregi de tip exponenţial $g_{v_1 \ldots v_n}$.

Făcînd abstracţie de o constantă, ea este un caz particular al inegalităţii (16) § 2. Trebuie să avem în vedere faptul că are loc următoarea teoremă de aproximare ([4], teoremele 7, 10), care generalizează teorema lui Jackson-Bernstein de aproximaţie.

TEOREMA 9. *Pentru ca funcţia* $f \in H_p^{(\vec{r})}(R_n)$, *este necesar şi suficent ca să aibă loc relaţiile*

$$A_{\bar{v}}(f)_p = A_{v_1, \ldots, v_n}(f) < C \sum_{1}^{n} \frac{1}{v_k^{r_k}} \qquad (v_k \geqslant 1),$$

unde constanta C *nu depinde de* v_k.

Aici

$$A_{\bar{v}}(f)_p = \inf_{g_{\bar{v}}} \|f - g_{\bar{v}}\|_{L_p(R_n)}$$

unde limita inferioară este extinsă asupra tuturor funcţiilor întregi de tip exponenţial de grad $\bar{v}$ dat.

În baza teoremei 9, se obţine uşor şi următoarea teoremă (O. V. Besov [31]).

TEOREMA 10. *Norma*

$$\|f\|'_{H_p^{(\vec{r})}(R_n)} = \|f\|_{L_p(R_n)} + \sup_k b^k A_{a^{\frac{k}{r_1}}, \ldots, a^{\frac{k}{r_k}}}(f)_p \tag{8}$$

este echivalentă cu norma $\|f\|_{H_p^{(\vec{r})}(R_n)}$, *adică au loc inegalităţile*

$$C_1 \|f\|_{H_p^{(\vec{r})}(R_n)} < \|f\|'_{H_p^{(\vec{r})}(R_n)} < C_2 \|f\|_{H_p^{(\vec{r})}(R_n)},$$

unde C_1, C_2 *sînt constante care nu depind de* f *şi* $b > 1$.

Trecem acuma la definirea claselor $W_p^{(\vec{r})} = W_p^{(r_1, \ldots, r_n)}$ şi $B_p^{(\vec{r})} = B_p^{(r_1, \ldots, r_n)}$ şi la descrierea proprietăţilor mai importante ale acestora.

În § 2 s-au definit deja clasele $W_p^{(\vec{r})}(R_n)$ pentru $r_1, \ldots, r_n$ întregi şi s-au relevat unele proprietăţi ale lor. În cele ce urmează se dă definiţia claselor $W_p^{(\vec{r})}(R_n)$ în cazul cînd r_k sînt fracţionari (L. M. Slobodeţki [33, 34]).

Fie $r > 0$ un număr diferit de un număr întreg, $r = \bar{r} + \alpha$, unde $\bar{r}$ e întreg şi $0 < \alpha < 1$.

Fixăm un număr natural i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ şi scriem pe R_n sub forma produsului topologic $R_n = R^{(i)} \times R'$, unde $R^{(i)} = (-\infty < x_i < \infty)$ este axa i-unidimensională, iar R' este subspaţiul punctelor $\bar{w} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$. În felul acesta, orice punct $\bar{x} \in R_n$ poate fi reprezentat sub forma perechei $x = (x_i, \bar{w})$, iar funcţia f se poate reprezenta sub forma

$f(\bar{x}) = f(x_i, \bar{w})$. Conform definiției, funcția $f \in W_{x_i p}^{(r)}(R_n)$ dacă $f \in W_{x_i p}^{(\bar{r})}(R_n)$ (vezi paragraful 2) și dacă în afară de aceasta :

$$\|f_{x_i}^{(r)}\|_{\overline{W}_{x_i p}^{(\alpha_i)}(R_n)} = \int\limits_{R^{(i)}} \int\limits_{R_n} \frac{|f_{x_i}^{(\bar{r})}(x_i, \bar{w}) - f_{x_i}^{(\bar{r})}(y_i, \bar{w})|^p}{|x_i - y_i|^{n+p\alpha_i}} \, dx_i \, dy_i \, d\bar{w}.$$

Vom scrie prin definiție

$$\|f\|_{W_{x_i p}^{(r)}(R_n)} = \left\{ \|f\|^p_{W_{x_i p}^{(\bar{r})}(R_n)} + \|f_{x_i}^{(\bar{r})}\|_{\overline{W}_{x_i p}^{(\alpha_i)}(R_n)} \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Mai departe, conform definiției avem $f \in W_{p_1, \ldots, p_n}^{(r_1, \ldots, r_n)} = W_p^{(\vec{r})}(R_n)$ unde de data aceasta numerele r_k pot fi atît întregi cît și diferite de numere întregi, dacă $f \in W_{x_i p}^{(r_i)}(R_n)$ pentru $i = 1, \ldots, n$. Odată cu aceasta se introduce norma :

$$\|f\|_{W_p^{(\vec{r})}(R_n)} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \|f\|^p_{W_{x_i p}^{(r_i)}(R_n)} \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

L. N. S l o b o d e ț k i a demonstrat în cazul $p = 2$ teoreme analoage cu teoremele 7, 8 stabilite anterior pentru clasele H. Teoremele lui se formulează exact la fel ca teoremele noastre, dacă în ele se înlocuiește pretutindeni H cu W, iar p cu 2.

În nota lui [43] s-a obținut și teorema 1 pentru clasele $W_p^{(\vec{r})}$.

În paragraful 1 am examinat clasele $B_p^{(r)}(R_n)$ ale lui O. V. Besov. Ele sînt cazuri particulare ale unor clase mai generale, considerate tot de către O. V. B e s o v :

$$B_{p\theta}^{(\vec{r})}(R_n) = B_{p\theta}^{(r_1, \ldots, r_n)}(R_n),$$

care depind, în afară de parametrii obișnuiți p, $\vec{r}$, n și de parametrul θ $(1 \leqslant \theta < \infty)$. Ne vom mărgini aici la descrierea proprietăților acestor clase în cazul cînd $p = \theta$ $(1 \leqslant p < \infty)$, deși cazul $p \neq \theta$ prezintă și el interes ; în acest caz alături de p finit se poate considera și cazul $p = \infty$.

Vom începe cu definiția claselor $B_{pp}^{(\vec{r})}(R_n)$, pe care le vom nota cu simbolul mai simplu $B_p^{(\vec{r})}(R_n)$. Atît definiția, cît și teoremele despre care va fi vorba mai jos aparțin lui O. V. Besov.

Vom introduce modulul de continuitate de ordinul întîi și cel de ordinul al doilea al funcției $f \in L_p(R_n)$ în raport cu variabila x_i cu ajutorul relațiilor :

$$\omega_1(f, te_i) = \omega(f, te_i) = \sup_{|u| \leqq t} \|f(\bar{x} + ue_i) - f(\bar{x})\|_{L_p(R_n)}$$

$$\omega_2(f, te_i) = \sup_{|u| \leqq t} \|f(\bar{x} + 2ue_i) - 2f(\bar{x} + ue_i) + f(\bar{x})\|_{L_p(R_n)},$$

unde e_i este versorul axei x_i.

Fie, ca mai înainte $1 \leqslant p < \infty$, $r_i > 0$, $r_i = \bar{r}_i + \alpha_i$, unde $\bar{r}_i$ este întreg, $0 < \alpha_i \leqslant 1$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Vom spune că o funcție $f(\bar{x})$ aparține spațiului funcțional $B_p^{(\vec{r})}(R_n) = B_p^{(r_1, \ldots, r_n)}(R_n)$, dacă ea are derivate parțiale generalizate $\frac{\partial kf}{\partial x_i^k}$ în raport cu cîte o variabilă x_i, p-sumabile în R_n $(k = 0, 1, \ldots, \bar{r}_i; i = 1, \ldots, n)$ și dacă

$$\|f\|_{B_p^{(\vec{r})}(R_n)} = \|f\|_{L_p(R_n)} + \sum_{i=1}^{n} \left\{ \int_0^1 t^{-p\alpha_i - 1} \omega^p_{1+[\alpha_i]} \left(\frac{\partial^{\bar{r}_i} f}{\partial x_i^{\bar{r}_i}}, te_i \right) dt \right\}^{1/p} < \infty. \tag{8'}$$

Aici $[\alpha_i]$ este partea întreagă a lui α_i, iar ω^p înseamnă puterea de ordinul p a lui ω.

Această definiție este echivalentă cu următoarea definiție exprimată în termenii celei mai bune aproximații $A_{\bar{v}}(f)_p$ a funcției f cu ajutorul funcțiilor întregi de grad $\bar{v}$ în metrica lui $L_p(R_n)$:

Vom scrie pentru $b > 1$

$$\|f\|'_{B_p^{(\vec{r})}(R_n)} = \|f\|_{L_p(R_n)} + \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} b^{kp} A^p_{b^{\frac{k}{r_1}}, \ldots, b^{\frac{k}{r_k}}}(f)_p \right\} \tag{9}$$

(compară cu teorema 7 din acest paragraf).

Vrem să spunem că caracterul finit al uneia din normele (8'), (9) pentru o funcție oarecare f, atrage după sine caracterul finit al celeilalte și că, în afară de aceasta, au loc inegalitățile

$$C_1 \|f\|_{B_p^{(\vec{r})}(R_n)} \leqslant \|f\|'_{B_p^{(\vec{r})}(R_n)} \leqslant C_2 \|f\|_{B_p^{(\vec{r})}(R_n)}, \tag{10}$$

unde C_1, C_2 sînt constante, care nu depind de funcțiile f considerate.

Spațiul $B_p^{(\vec{r})}(R_n)$ este un spațiu Banach (vezi [10]). El este un spațiu separabil, spre deosebire de spațiul $H_p^{(\vec{r})}(R_n)$ care nu este un spațiu separabil (vezi [32, 31]).

Pentru spațiul $B_p^{(\vec{r})}(R_n)$ au loc exact aceleași teoreme de scufundare ca teoremele 1, 3, 5, 7, 8 pentru clase, adică ele rămîn adevărate dacă se înlocuiește H cu B (vezi [10]).

În particular, din teorema 1 rezultă că clasele $B_p^{(r)}(R_n)$ și $B_p^{(r, \ldots, r)}(R_n)$ sînt echivalente, ceea ce vom nota prin egalitatea

$$B_p^{(r)}(R_n) = B_p^{(r, \ldots, r)}(R_n).$$

O. V. B e s o v a arătat că pentru r_k fracționari, clasele $B_p^{(\vec{r})}(R_n)$ și $W_p^{(\vec{r})}(R_n)$ sînt echivalente. În felul acesta are loc relația

$$B_p^{(\vec{r})}(R_n) = W_p^{(\vec{r})}(R_n), \tag{11}$$

dacă toţi r_k sînt fracţionari. Această egalitate (de echivalenţă) se menţine şi pentru orice $\vec{r}$ dacă $p = 2$.

O. V. Besov a stabilit de asemenea valabilitatea următoarelor scufundări

$$\begin{aligned} B_p^{(\vec{r})}(R_n) &\subset W_p^{(\vec{r})}(R_n) \qquad \text{dacă} \quad 1 < p \leqslant 2 \\ W_p^{(\vec{r})}(R_n) &\subset B_p^{(\vec{r})}(R_n) \qquad \text{dacă} \quad 2 \leqslant p < \infty, \end{aligned} \tag{12}$$

care au loc pentru orice $\vec{r}$. Aceste fapte au fost deja remarcate de noi în cazul $r_1 = r_2 \ldots = r_n = r$ în paragraful 1 (vezi (9)). Acolo s-a observat că pentru r întregi şi $p \neq 2$ expresiile din membrii stîngi ai relaţiilor (12) se deosebesc esenţial de cele din membrii drepţi.

Legătura dintre clasele corespunzătoare H şi B sau H şi W se vede din următoarele relaţii:

$$H_p^{(\vec{r})}(R_n) \subset \left\{ \begin{matrix} B_p^{(\vec{r})}(R_n) \\ W_p^{(\vec{r})}(R_n) \end{matrix} \right\} \subset H_p^{(\vec{r}')}(R_n) \qquad (\vec{r} < \vec{r}').$$

De aici urmează, de exemplu, că evaluările (3), (4), (5), (6) din teorema 6 se extind asupra claselor B şi W. Dar pentru clasele B s-au obţinut [32] şi evaluări speciale, proprii lor.

Pentru a ne da seama de rezultatele care decurg din (11) şi (12), să căutăm să vedem în ce măsură este adevărată pentru clasele $W_p^{(\vec{r})}(R_n)$ teorema analoagă cu teorema 5.

Fie $1 \leqslant m \leqslant n$, $1 \leqslant p \leqslant p' < \infty$ şi

$$\varkappa = 1 - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}\right) \sum_{1}^{m} \frac{1}{r_i} - \frac{1}{p} \sum_{m+1}^{n} \frac{1}{r_i} > 0.$$

Atunci scufundarea

$$W_p^{(\vec{r})}(R_n) \subset W_{p'}^{(\vec{r}, \varkappa)}(R_m) \tag{13}$$

are totdeauna loc în cazurile enumerate mai jos:

1) $\vec{r}$ şi $\varkappa \vec{r}$ fracţionari;

2) $\vec{r}$ este fracţionar iar $\varkappa \vec{r}$ este oarecare, dacă $1 < p' \leqslant 2$,

3) $\vec{r}$ este oarecare, iar $\varkappa \vec{r}$ este fracţionar, dacă $2 \leqslant p < \infty$.

Folosindu-se proprietăţile (11) şi (12), pentru clasele W se pot obţine de asemenea teoreme analoage ale teoremei mai generale 7 şi ale teoremei 8, inversa teoremei 7.

§ 4. Proprietăţi ale funcţiilor din clasele $H_p^{(r)}$, $W_p^{(r)}$, $B_p^{(r)}$, definite pe varietăţi diferenţiabile

Clasele $H_p^{(r)}(\mathcal{G})$, $W_p^{(r)}(\mathcal{G})$ au fost definite în § 1.

Vom remarca faptul că facem o deosebire între $H_p^{(r, \ldots, r)}$ şi $H_p^{(r)}$. În definiţia primei clase au intervenit numai derivatele în raport cu cîte o variabilă ale funcţiilor, iar în definiţia celei de a doua clase, atît cele în raport cu cîte o variabilă cît şi cele mixte (în raport cu mai multe variabile).

Această observaţie se referă şi la clasele W şi B.

Vom remarca de asemenea că în virtutea teoremei 1 § 3, despre derivatele mixte, pentru $\mathcal{G} = R_n$, valabilă de asemenea şi pentru clasele B (O. V. Besov [10]), precum şi pentru clasele W, au loc egalităţile

$$H_p^{(r)}(R_n) = H_p^{(r, \ldots, r)}(R_n)$$

$$B_p^{(r)}(R_n) = B_p^{(r, \ldots, r)}(R_n),$$

care exprimă în mod convenţional echivalenţa claselor respective.

Mai remarcăm că dacă frontierea S a mulţimii $\mathcal{G}$ este o suprafaţă de clasa $C^{(\bar{r}+1)}$(adică este o suprafaţă de $r+1$ ori continuu derivabilă), atunci funcţia $f \in H_p^{(r)}(\mathcal{G})$ pentru r diferit de un număr întreg (sau $f \in W_p^{(r)}(\mathcal{G})$ pentru r oarecare) se poate prelungi în R_n cu păstrarea clasei, astfel încît să aibă loc inegalitatea

$$\|f\|_{H_p^{(r)}(R_n)} < C \|f\|_{H_p^{(r)}(\mathcal{G})}$$

sau

$$\|f\|_{W_p^{(r)}(R_n)} < C \|f\|_{W_p^{(r)}(\mathcal{G})},$$

unde constanta C nu depinde de f (vezi [27, 21, 28]. Evident că funcţia $f \in W_p^{(r)}(\mathcal{G})$, $f \in H_p^{(r)}(\mathcal{G})$ pentru r diferit de un număr întreg se mai poate defini ca o funcţie care se poate prelungi în R_n astfel încît funcţia prelungită $\bar{f} \in W_p^{(r)}(\mathcal{G})$, $\bar{f} \in H_p^{(r)}(\mathcal{G})$.

În cazul lui r întreg, teorema despre prelungirea funcţiei $f \in H_p^{(r)}(\mathcal{G})$ bănuim că are de asemenea loc, dar acest fapt nu este dovedit.

Din teorema 4 § 2, referitoare la prelungire, rezultă că dacă $f \in W_p^{(r, \ldots, r)}(\mathcal{G})$ sau $f \in H^{(r, \ldots, r)}$, atunci $f \in W_p^{(r)}(\mathcal{G}_\delta)$ respectiv $f \in H_p^{(r)}(\mathcal{G}_\delta)$, oricare ar fi $\delta > 0$.

Mai are loc şi următoarea teoremă ([5], teorema 2.4).

Teorema 1. *Să presupunem că, cu ajutorul unei transformări de $\bar{r}+1$ ori continuu derivabile*

$$x_k = \psi_k(u_1, \ldots, u_n) \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

punctele $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ *ale mulțimii deschise* $\mathcal{G}$ *se transformă în mod biunivoc în punctele* $\bar{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ *ale altei mulțimi* Ω *și că jacobianul transformării este mărginit superior și inferior de constante pozitive.*

Atunci, dacă $f(\bar{x}) \in H_p^{(r)}(\mathcal{G})$ *(sau dacă* $f \in W_p^{(r)}(\mathcal{G})$*), funcția transformată*

$$f(\bar{u}) = f(\psi_1(u_1, \ldots, u_n), \ldots, \psi_n(u_1, \ldots, u_n))$$

aparține clasei $H_p^{(r)}(\Omega_\delta)$ *(sau* $f(\bar{u}) \in W_p^{(r)}(\Omega_\delta)$*).*

Să considerăm suprafața $S \subset R_n$, care este o variatate m-dimensională, mărginită și diferențiabilă definită în felul următor. S este o mulțime aparținînd lui R_n și astfel încît fiecare punct $\bar{x}_0$ al ei poate fi înconjurat de o sferă n-dimensională cu centrul în punctul respectiv și cu o rază suficient de mică încît sfera să separe din S o porțiune σ, definită, cu o numerotație corespunzătoare a coordonatelor, prin ecuațiile

$$x_k = \varphi(x_1, \ldots, x_m) \qquad (k = m+1, \ldots, n), \tag{1}$$

cînd punctul $(x_1, \ldots, x_m)$ parcurge un domeniu σ', m-dimensional. Aici funcțiile φ_k $(k = m+1, \ldots, n)$ au în σ' derivate parțiale continue pînă la ordinul cel puțin $\bar{r}+1$. În afară de aceasta, se presupune că e posibil ca fiecărui punct $\bar{x} \in \sigma$ să se atașeze $n-m$ vectori unitari

$$\bar{N}_{m+1}, \ldots, \bar{N}_n \tag{2}$$

ortogonali între ei, în așa fel încît fiecare din ei să fie ortogonal la varietatea lineară tangentă în punctul $\bar{x}$ la S. Proiecțiile acestor vectori

$$\bar{N}_j = (\alpha_1^{(j)}, \ldots, \alpha_n^{(j)}) \qquad (j = m+1, \ldots, n)$$

sînt funcții de $x_1, \ldots, x_m$, avînd derivate parțiale continue pînă la ordinul $\bar{r}+1$ inclusiv.

Dacă o funcție oarecare $f \in H_p^{(r)}(R_n)$ este continuă, atunci ea induce pe varietatea S o funcție anumită $f|_S$. Pe fiecare din porțiunile σ, această funcție poate fi scrisă cu ajutorul funcției

$$F(x_1, \ldots x_m) = f(x_1, \ldots, x_m, \varphi_{m+1}, \ldots, \varphi_n) \tag{3}$$

de variabilele $x_1, \ldots, x_m$, definită în domeniul m-dimensional σ' respectiv. Desigur că aici, această funcție noi în mod convențional o exprimăm explicit prin primele m coordonate. În realitate, pe fiecare porțiune σ aceste m coordonate, în general, se schimbă.

În cazul general, cînd funcția f nu e obligatoriu continuă, ea este definită pe R_n, abstracție făcînd de o mulțime n-dimensională de măsură nulă și de aceea funcția $f|_s$ rămîne nedeterminată. Vom stabili imediat ce înțelegem în acest caz prin $f|_s$.

Ne dăm numerele arbitrare $h_{m+1}, \ldots, h_n$ și definim în vecinătatea σ funcția

$$f\left(\bar{x} + \sum_{m+1}^{n} h_j \bar{N}_j\right) = f\left(x_1 + \sum_{m+1}^{n} \alpha_1^{(j)} h_j, \ldots, x_m + \sum_{m+1}^{n} \alpha_m^{(j)} h_j,\right.$$

$$\left.\varphi_{m+1} + \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{m+1}^{(j)} h_j, \ldots, \varphi_n + \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_n^{(j)} h_j\right) =$$

$$= F(x_1, \ldots, x_m, h_{m+1}, \ldots, h_n) = F_{(h)} \qquad \bar{x} \in S \tag{4}$$

de variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_m, h_{m+1}, \ldots, h_n$. Dacă e posibil să se modifice această funcție pe o mulțime n-dimensională de măsură nulă în așa fel încît în urma acestei modificări pentru o anumită funcție $F(x_1, \ldots, x_m)$ să aibă loc relația

$$\lim_{\sum_{k=m+1}^{n} |h_k| \to 0} \iint_{\sigma''} |F_{(h)} - F|^p \, dx_1 \ldots dx_m = 0$$

oricare ar fi domeniul σ'' a cărui închidere aparține lui σ', atunci vom spune că F este urma lui f pe σ și vom scrie

$$f|_\sigma = F(x_1, \ldots, x_m) = f(x_1, \ldots, x_m, \varphi_{m+1}, \ldots, \varphi_n).$$

Se poate demonstra ([5] § 4), că dacă $f \in H_p^{(r)}(R_n)$ (cu atît mai mult dacă $f \in W_p^{(r)}(R_n)$ sau $f \in B_p^{(r)}(R_n)$, întrucît ultimele două clase fac parte din prima), S este o suprafață de clasa $k \geq \bar{r}+2$ și

$$r - \frac{n-m}{p} > 0 \tag{5}$$

atunci funcția

$$F = f|_s$$

are sens, ea nu depinde de alegerea vectorilor normali (3) și în cazul că porțiunea σ a varietății S este dată explicit prin alte coordonate, diferite de $x_1, \ldots, x_m$, funcția F se transformă în noile coordonate așa cum se face în cazul funcției $f(x_1, \ldots, x_m, \varphi_{m+1}, \ldots, \varphi_n)$, înțeleasă în sensul obișnuit al acestui termen.

Întrucît fiecare punct al lui S poate fi acoperit de o porțiune deschisă σ definită mai sus, atunci în condiția (5), pentru funcția $f \in H_p^{(r)}(R_n)$ se determină urma $f|_s = F$ prin metoda indicată. Dacă $r > 1$, atunci pentru funcția $f \in H_p^{(r)}(R_n)$ există derivata $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in H_p^{(\rho)}(R_n)$, $\rho = r^{-1}$ pentru care, în condiția

$$\rho - \frac{n-m}{p} > 0$$

se poate determina urma $\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_s$ la fel cum s-a determinat urma $f|_s$.

Dacă funcţia f are un număr suficent de derivate parţiale continui, atunci se pot exprima prin funcţia $F(h)$ (vezi [5]) valorile pe σ ale oricărei derivate mixte a lui f după direcţiile $\bar{N}_j$ $(j = m+1, \ldots, n)$. Anume

$$\left.\frac{\partial^\lambda f}{\partial \bar{N}_{m+1}^{\lambda_{m+1}} \ldots \partial \bar{N}_n^{\lambda_n}}\right|_\sigma = \left.\frac{\partial^\lambda F(h)}{\partial h_{m+1}^{\lambda_{m+1}} \ldots \partial h_n^{\lambda_n}}\right|_0 \quad \left(\lambda = \sum_{m=1}^{n} \lambda_j\right). \tag{6}$$

În cazul general, egalitatea (6) se poate considera ca definiţia urmei derivatei mixte a funcţiei f pe σ. Derivata mixtă a funcţiei f indicată în partea stîngă a egalităţii (6) se defineşte pe porţiunea σ a varietăţii S ca o funcţie de $x_1, x_2, \ldots, x_m$, către care tinde în medie pe $\sigma'' \subset \sigma'$, atunci cînd $\sum_{m+1}^{n} h_k^2 \to 0$, derivata mixtă corespunzătoare a lui $F_{(h)}$, scrisă în partea dreaptă a egalităţii (6). Prin aceasta se defineşte de asemenea şi derivata mixtă pe toată suprafaţa S.

Dacă punctelor porţiunii σ se ataşează un alt sistem de vectori normali

$$\bar{N}'_k(\alpha_1'^{(k)}, \ldots, \alpha_n'^{(k)}) \qquad (k = m+1, \ldots, n)$$

cu formulele de transformare

$$C_{ks} = (\bar{N}'_k, N_s) \qquad (k, s = m+1, \ldots, n),$$

atunci funcţia $F'_{(h)}$ corespunzătoare acestui nou sistem, se exprimă prin funcţia $F_{(h)}$ întrodusă prin egalităţile (4) în felul următor :

$$\begin{gathered} F'_{(h)} = F(x_1, \ldots, x_m, H_{m+1}, \ldots, H_n), \\ H_s = \sum_{j=m+1}^{n} C_{js}\, h_j \qquad (s = m+1, \ldots, n). \end{gathered} \tag{7}$$

Vom acoperi varietatea noastră S cu un număr finit de porţiuni deschise $\sigma_1^*, \ldots, \sigma_\mu^*$ care se exprimă explicit, fiecare în parte, prin coordonatele $x_1, \ldots, x_m$ (sau prin alte coordonate) cu ajutorul ecuaţiilor

$$x_j = \varphi_j(x_1, \ldots, x_m) \quad (x_1, \ldots, x_m) \in \sigma_k^{*\prime}$$
$$(k = 1, \ldots, \mu;\ j = m+1, \ldots, n).$$

Înlocuim pentru fiecare k porţiunea σ_k^* printr-o porţiune deschisă σ_k astfel încît $\bar{\sigma}_k \subset \sigma_k^*$, iar sistemul $\sigma_1, \ldots, \sigma_\mu$ să acopere complet pe S. Punctelor fiecărei porţiuni σ_k ataşăm un sistem de vectori unitari, $\bar{N}_{m+1}, \ldots, \bar{N}_n$, normali la S, supuşi condiţiilor pe care le-am exprimat mai sus. Varietatea S, împreună cu acoperirea $\sigma_1, \ldots, \sigma_\mu$ formată în felul acesta, se notează cu S^*.

Convenim să scriem

$$\left.\frac{\partial^\lambda f}{\partial \bar{N}_{m+1}^{\lambda_{m+1}} \ldots \partial \bar{N}_n^{\lambda_n}}\right|_{S^*} \in H_p^{(\varrho)}(S^*),$$

dacă pe fiecare porţiune σ_k, pentru normalele $\bar{N}_{m+1}, \ldots, \bar{N}_n$ ataşate ei, funcţia corespunzătoare de variabilele $(x_1, \ldots, x_m)$ (sau de alte variabile) are proprietatea că

$$\left\| \left.\frac{\partial^\lambda f}{\partial N_{m+1}^{\lambda_{m+1}} \ldots \partial N_n^{\lambda_n}}\right|_{\sigma_n} \right\| \in H_p^{(\varrho)}(\sigma'_k)$$

unde σ'_k este proiecţia lui σ_k pe subspaţiul $x_1, \ldots, x_m$. Mai presupunem că

$$\left\| \left.\frac{\partial^\lambda f}{\partial N_{m+1}^{\lambda_{m+1}} \ldots \partial N_n^{\lambda_n}}\right|_{S^*} \right\|_{H_p^{(\varrho)}(S^*)} = \sum_k \left\| \left.\frac{\partial^\lambda f}{\partial N_{m+1}^{\lambda_{m+1}} \ldots \partial N_n^{\lambda_n}}\right|_{\sigma'_k} \right\|_{H_p^{(\varrho)}(\sigma'_k)}$$

O definiţie analoagă are loc pentru clasele $W_p^{(\varrho)}(S^*)$ întregi şi fracţionare şi pentru clasele $B_p^{(\varrho)}(S^*)$.

Are loc următoarea teoremă, precum şi reciproca ei (vezi [4]), care generalizează (pentru $r_1 = \ldots = r_n = r$) pe varietăţi netede, teoremele 7 şi 8 (vezi [4]) formulate în § 3.

TEOREMA 1. *Fie $f \in H_p^{(r)}(R_n)$ şi fie dat sistemul (λ) de numere întregi nenegative $\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n$ pentru care*

$$\lambda = \sum_{k=m+1}^{n} \lambda_k \tag{8}$$

şi

$$\rho^{(\lambda)} = r - \lambda - \frac{n-m}{p}. \tag{9}$$

Atunci

$$\left.\frac{\partial^\lambda f}{\partial N_{m+1}^{\lambda_{m+1}} \ldots \partial N_n^{\lambda_n}}\right|_{S^*} \in H^{(\varrho^{(\lambda)})}(S^*),$$

$$\left\| \left.\frac{\partial^\lambda f}{\partial N_{m+1}^{\lambda_{m+1}} \ldots \partial N_n^{\lambda_n}}\right|_{S^*} \right\|_{H_p^{(\varrho^{(\lambda)})}(S^*)} \leqslant C \|f\|_{H_p^{(r)}(R_n)}$$

unde constanta C nu depinde de f.

TEOREMA 2 (reciproca teoremei 1). *Fie dat în spaţiul R_n un sistem finit de varietăţi*

$$S_1, \ldots, S_\mu$$

care nu se intersectează două cîte două, avînd respectiv dimensiunile

$$m_1, \ldots, m_\mu \quad \left(r - \frac{n - m_k}{p} > 0\right)$$

Fiecare varietate e acoperită de un număr finit de porțiuni σ așezate pe ea, care se acoperă reciproc. Aceste porțiuni se exprimă prin anumite m_k coordonate cu ajutorul unor egalități de forma

$$x_k = \varphi_k(x_1, \ldots, x_m) \quad (k = m_k + 1, \ldots, n)$$

și de punctele lor sînt legate anumite sisteme de vectori $\overline{N}_{m_k+1}, \ldots, \overline{N}_n$ normali la σ.

Mai departe se dă un număr pozitiv r și toate sistemele (λ_k) posibile (admisibile) de numere întregi nenegative $\lambda_{m_k+1}, \ldots, \lambda_n$ atașate fiecărei varietăți S_k, pentru care

$$\lambda = \sum_{j=m_k+1}^{n} \lambda_j < r$$

$$\rho^{(\lambda)_k} = r - \lambda - \frac{n - m_k}{p} > 0.$$

Fiecărei porțiuni σ ce se găsește pe varietatea S_k și fiecărui sistem admisibil $(\lambda)_k$ se atașează funcția $F_{(\lambda)_k, \sigma}$ definită pe porțiunea σ, care se mai poate nota și cu $F_{(\lambda)_\sigma, \sigma}$. Dacă porțiunea σ se exprimă explicit prin coordonatele $x_1, \ldots, x_{m_k}$ (sau prin alte m_k coordonate), atunci să presupunem că funcția exprimată prin aceste coordonate aparține clasei

$$H_p^{\left(\varrho^{(\lambda)_k}\right)}(\sigma') = H^{\left(\varrho^{(\lambda)_\sigma}\right)}(\sigma'),$$

unde σ' este proiecția porțiunii σ pe subspațiul liniar al variabilelor $x_1, \ldots, x_{m_k}$ (sau al altor variabile).

Pe părțile comune care se acoperă reciproc ale porțiunilor σ ale uneia și aceleiași varietăți S_k, funcțiile $F_{(\lambda)_k, \sigma}$ se presupun puse în acord între ele, în sensul că ele verifică formulele corespunzătoare (7) de transformare a unui sistem de vectori normali $\overline{N}_{m_k}, \ldots, \overline{N}_n$ în altul și a m_k variabile în altele, necesare pentru ca să fie posibile egalitățile

$$\left. \frac{\partial^\lambda f}{\partial N_{m_k+1}^{\lambda_{m_k+1}} \ldots \partial N_n^{\lambda_n}} \right|_\sigma = F_{(\lambda)_k, \sigma} \tag{10}$$

pentru toate sistemele $(\lambda)_k$ admisibile și pentru toate porțiunile care acoperă una și aceeași parte a varietății S_k pentru una și aceeași funcție $f(x_1, \ldots, x_n)$.

În acest caz în spațiul R_n se poate construi funcția $f(x_1, \ldots, x_n)$ care satisface următoarele condiții:

1) $f \in H_p^{(r)}(R_n)$

$$\|f\|_{H_p^{(r)}(R_n)} \leqslant C \sum_{\sigma} \sum_{(\lambda)_\sigma} \|F_{(\lambda)_\sigma, \sigma}\|_{H^{\left(\varrho^{(\lambda)_\sigma}\right)}(\sigma')}$$

unde C nu depinde de funcțiile $F_{(\lambda)_\sigma, \sigma}$. Aici a doua sumă se extinde asupra tuturor sistemelor admisibile $\lambda_{m_k+1}, \ldots, \lambda_n$ corespunzătoare porțiunii σ, în funcție de numărul de dimensiuni ale ei, iar prima sumă se extinde asupra tuturor porțiunilor posibile σ, care conform condiției teoremei acoperă varietățile noastre.

2) Pe porțiunile corespunzătoare σ, pentru normalele $\overline{N}_{m_k+1}, \ldots, \overline{N}_n$ definite pe ele, sînt valabile egalitățile (10).

În cazul cînd S este o varietate cu $m = n - 1$ dimensiuni, nu e necesar să ne îngrijim de acordarea derivatelor normale date pe diferite porțiuni de funcții care se acoperă pe S, pentru că în fiecare punct $\overline{x}_0 \in S$ există numai o singură normală la S al cărei sens se poate alege în mod arbitrar, dar odată ales, acest sens rămîne determinat. În acest caz, teoremele 1, 2 se reduc la următoarea teoremă:

TEOREMA 3. *Dacă* $f \in H_p^{(r)}(R_n)$, *atunci au sens funcțiile*

$$\varphi_\lambda = \left. \frac{\partial^\lambda f}{\partial n^\lambda} \right|_S \tag{11}$$

și

$$\varphi_\lambda \in H_p^{\left(r - \lambda - \frac{1}{p}\right)}(S), \tag{12}$$

pentru toți λ *întregi nenegativi pentru care*

$$r - \lambda - \frac{1}{p} > 0.$$

Invers, dacă pentru fiecare astfel de λ *se dă o funcție care satisface condiția* (12), *atunci există* $f \in H_p^{(r)}(R_n)$ *astfel încît să fie satisfăcută relația* (11).

L. D. Kudriavțev a demonstrat ([15], teorema 9.4) că dacă suprafața S este de k ori continuu derivabilă, atunci funcția se poate construi în așa mod încît ea va fi de $k - 1$ ori continuu derivabilă în $R_n - S$ și integralele

$$\left(\int_{R_n} r^{p(s-\alpha)+\varepsilon} \left| \frac{\partial^{\overline{r}+s} f}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_n^{s_n}} \right|^p dR_n \right)^{1/p} < \infty$$

$$\left(\sum_{1}^{n} s_k = s + \overline{r}, \ 1 \leqslant p \leqslant \infty \right)$$

vor fi finite, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, unde r este distanța de la punctul $\overline{x}$ de integrare pînă la S.

Teorema 1 și reciproca ei 2 au fost demonstrate în lucrarea noastră [4]. Ambele aceste teoreme au fost extinse de O. V. Besov (vezi [10]) și la clasele B. Aici O. V. Besov pleca de la următoarea definiție a clasei $B_{p\theta}^{(r)}(\mathcal{G})$. O funcție f aparține acestei clase dacă ea poate fi prelungită pe

R_n astfel încît funcția prelungită $\bar{f} \in B_{p\theta}^{(r)}(R_n)$. Clasele $B_{p\theta}^{(r)}(S)$, unde $S \subset R_n$ este o varietate $\bar{r}+2$ diferențiabilă, se definesc acum la fel cum au fost definite clasele $H_p^{(r)}(S)$.

Teoremele 1 și 2 sînt de asemenea valabile și pentru clasele $W_p^{(r)}$ literalmente în acele cazuri care au fost complet analizate în § 1 cu ocazia teoremelor de scufundare pentru clasele $W(R_n)$ și $W(R_m)$. Acolo se poate înlocui pretutindeni pe R_m cu o varietate m-dimensională de clasa $\bar{r}+2$. De aceea nu vom repeta formulările respective. Trebuie să avem în vedere faptul că în acele cazuri referitoare la p și r, cînd clasele $W_p^{(r)}$ și $B_p^{(r)}$ nu coincid, ne putem folosi de relațiile (14) și (15) § 1 (unde trebuie să se înlocuiască R_m cu o varietate m-dimensională S). În forma generală, teoremele 1, 2 au fost demonstrate în întregime pentru clasele W de O. V. Besov și S. V. Uspenski, însă înainte de aceasta erau cunoscute o serie de cazuri particulare ale acestor teoreme : pentru $p=2, r=1, m=n-1$, H. Aronszajn [7] ; și alți autori ; pentru $p=2$ și orice r, L. N. Slobodețki [8] ; pentru $r = 1$, $m = n - 1$ și $p \neq 2$, E. Gagliardo [9] ; pentru $r = 2, 3, \ldots, p \neq 2$ și $m = n-1$, L. N. Slobodețki [8], iar pentru m oarecare O. V. Besov [10].

Apoi O. V. Besov a creat clasele sale $\vec{B}_p^{(r)}$, în particular clasele $B_p^{(r)}$, și a demonstrat o serie de proprietăți interioare ale lor, adică proprietăți exprimate numai în limbajul corespunzător claselor B. Despre acestea s-a vorbit mai sus în acest paragraf și în cele precedente. În particular, el a demonstrat teoreme de tipul 1, 2 pentru clasele sale.

Un timp oarecare nu s-a cunoscut de loc legătura dintre clasele B și W. Se știa doar că $B_2^{(r)}(R_n) = W_2^{(r)}(R_n)$ pentru orice $r > 0$. Pentru $p \neq 2$ arbitrar însă, problema dacă clasele respective W și B sînt echivalente a rămas un timp o problemă deschisă. Prin aceasta se explică faptul că cercetările cu privire la teoremele de scufundare ale claselor W s-au făcut independent, fără a se lua în considerare teoria deja creată a claselor B. În aceste condiții S. V. Uspenski a obținut toate teoremele de scufundare (de tipul I, II, III, vezi § 1), printre care și analoagele teoremelor 1, 2 discutate de noi acum, care pot fi exprimate în mod obiectiv în limbajul corespunzător claselor W. Una din aceste teoreme, și anume reciproca teoremei 2 pentru $S = R_m$ și cînd numărul $k = r - \frac{n-m}{p} > 0$ este un număr fracționar, a fost demonstrată concomitent și independent de către S. V. Uspenski și de P. V. Lizorkin [19].

Numai după aceasta O. V. Besov a demonstrat că clasele W sînt echivalente cu clasele B pentru r fracționari și pentru p $(1 < p < \infty)$ oarecari și în felul acesta toate teoremele de scufundare pentru clasele W unde interveneau numai $r > 0$ oarecari și numai indici k fracționari se aflau în fond încă în teoria lui despre clasele B. În afară de aceasta, O. V. Besov a lămurit faptul că problemele rămase în urma rezultatelor lui S. V. Uspenski (vezi părțile de excepție din teoremele 1 și 2 § 1) în realitate nu se rezolvă în clasele W, însă se rezolvă complet în clasele B (vezi § 1, [14] și [15]).

Am considerat anterior o suprafață mărginită S de clasă $k \geqslant \bar{r}+2$. Aceste rezultate se pot extinde și la cazul suprafețelor netede pe porțiuni formate dintr-un număr finit de porțiuni netede, însă condițiile de tipul (11) trebuie să fie completate cu alte cîteva condiții, pe care trebuie să le satisfacă funcțiile φ_λ în punctele de intersecție ale diferitelor porțiuni netede $\sigma \subset S$. Vom formula rezultatul respectiv pentru $n=2$. Pentru aceasta, va fi necesar să introducem o anumită noțiune nouă, pe care o vom ilustra mai bine prin următorul exemplu simplu.

Să considerăm în plan o funcție netedă, de exemplu un polinom algebric $P(x, y)$.

Notăm prin Γ linia formată din Γ_1 reprezentînd semiaxa pozitivă y și Γ_2-semiaxa pozitivă x. Pe Γ introducem lungimea arcului s, considerînd că $s = 0$, corespund originii coordonatelor, iar valorile negative și pozitive ale lui s corespund respectiv punctelor lui Γ_1 și Γ_2. Normala n la Γ o îndreptăm în interiorul cadranului întîi ($x > 0$, $y > 0$). Atunci funcția

$$\varphi_1(s) = \frac{\partial P}{\partial n}\bigg|_\Gamma$$

va fi definită de egalitățile

$$\varphi_1(s) = \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x}(0, -s) & (s \leqslant 0), \\ \dfrac{\partial P}{\partial y}(s, 0) & (s \geqslant 0). \end{cases}$$

Derivata $\varphi_1'(s)$ este, în general, o funcție discontinuă. Pentru $s=0$, valorile ei limită la stînga și la dreapta se calculează cu formulele

$$\varphi_1'(0-0) = -\frac{\partial^2 P}{\partial y\, \partial x}(0,0),$$

$$\varphi_1'(0+0) = \frac{\partial^2 P}{\partial x\, \partial y}(0,0).$$

De aici apare în mod necesar legătura dintre aceste valori limită, exprimată prin egalitățile

$$\varphi_1'(0-0) + \varphi_1'(0+0) = 0. \tag{12}$$

Se pot considera funcțiile

$$\varphi_0 = P|_\Gamma, \quad \varphi_1 = \frac{\partial P}{\partial n}\bigg|_\Gamma, \quad \varphi_2 = \frac{\partial^2 P}{\partial n^2}\bigg|_\Gamma, \ldots$$

și se poate presupune că Γ este o linie unghiulară formată din două porțiuni destul de netede Γ_1, Γ_2, unite în punctul x_0, care corespunde valorii $s = 0$.

Atunci pentru $s = 0$ între valorile limită la dreapta și la stînga ale derivatelor lui φ_λ apar anumite relații liniare, al căror cel mai simplu exemplu este relația (12).

Dacă se dă numărul $\rho > 0$, atunci relațiile care apar între valorile limită $\varphi_{\lambda_1}^{(\lambda_2)}(0-0)$ și $\varphi_{\mu_1}^{(\mu_2)}(0+0)$ pentru $\lambda_1 + \lambda_2 < \rho$ le numim relații $\mathcal{M}_{x_0}^{(\rho)}$.

Acum sîntem pregătiți pentru formularea teoremei noastre.

TEOREMA 4. *Fie dat într-un plan un contur Γ neted pe porțiuni, format din porțiuni netede $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_N$ de ordinul $\overline{r}+2$ de netezime, cu unghiuri nedegenerate, cu vîrfurile $A_1, \ldots, A_N$. Dacă funcția $f(x, y)$ aparține clasei $H_p^{(r)}(R_n)$ și*

$$\varphi_\lambda(s) = \left.\frac{\partial^\lambda f}{\partial n^\lambda}\right|_\Gamma, \tag{13}$$

atunci pentru toți λ naturali admisibili $\left(\text{adică astfel încît } r - \lambda - \frac{1}{p} > 0\right)$

$$\varphi_\lambda \in H_p^{\left(r-\lambda-\frac{1}{p}\right)}(\Gamma_k) \quad (k = 1, 2, \ldots, N)$$

și are loc inegalitatea

$$\sum_1^N \|\varphi_N\|_{H_p^{\left(r-\lambda-\frac{1}{p}\right)}(\Gamma_k)} \leqslant C\, \|f\|_{H_p^{(r)}(R_n)},$$

unde C este o constantă care nu depinde de factorul ce stă alături de ea.

În afară de aceasta, dacă $\rho = r - \frac{2}{p} > 0$, atunci funcția φ_λ satisface relațiile $\mathcal{M}_{A_k}^{(\rho)p}$ pentru toate punctele unghiulare A_k ale conturului Γ.

Are loc de asemenea și teorema reciprocă.

TEOREMA 5. *Fie $r > 0$, $r - \frac{1}{p} = \rho = \overline{\rho} + \alpha$, $\overline{\rho}$ întreg, $0 < \alpha < 1$, iar pe un contur fragmentar neted, cu unghiuri nedegenerate pentru toți $\lambda \geqslant 0$ naturali admisibili $\left(\text{adică de așa natură încît } r - \lambda - \frac{1}{p} > 0\right)$ se dă un sistem de funcții $\varphi_\lambda(s)$ avînd următoarele proprietăți*

1) $\varphi_\lambda \in H_p^{\left(r-\lambda-\frac{1}{p}\right)}(\Gamma_k)$ *pentru* $r - \lambda - \frac{1}{p}$ *diferit de un număr întreg,*

$\varphi_\lambda \in W_p^{\left(r-\lambda-\frac{1}{p}\right)}(\Gamma_k)$ *pentru* $r - \lambda - \frac{1}{p}$ *întreg*

$(k = 1, \ldots, N)$.

2) *Funcțiile φ_λ satisfac în punctele unghiulare A_k ale conturului Γ relațiile $\mathcal{M}_{A_k}^{\left(r-\frac{2}{p}\right)}$ pentru $r - \frac{2}{p} > 0$ și $r - \frac{1}{p}$ diferit de un număr întreg și relațiile $\mathcal{M}_{A_k}^{\left(r-\frac{1}{p}\right)}$ pentru $r - \frac{1}{p} > 0$, întreg.*

Atunci există o funcție $f(x, y) \in H_p^{(r)}(R_n)$ astfel încît

$$\|f\|_{H_p^{(r)}(R_n)} \leqslant C \sum_{k,\lambda} \|\varphi_\lambda\|_{H_p^{\left(r-\lambda-\frac{1}{p}\right)}(\Gamma_k)},$$

$$\left(r - \lambda - \frac{1}{p}\right) \text{ diferit de un număr întreg,}$$

$$\|f\|_{H_p^{(r)}(R_n)} \leqslant C \sum_{k,\lambda} \|\varphi_\lambda\|_{H_p^{\left(r-\lambda-\frac{1}{p}\right)}(\Gamma_k)},$$

$$\left(r - \lambda - \frac{1}{p}\right) \text{ întreg,}$$

și egalitățile (13) sînt satisfăcute pentru toți λ admisibili.

În ambele teoreme 4 și 5 date mai sus, un rol important îl are numărul $\gamma = r - \frac{2}{p}$. Și anume, dacă $\gamma > 0$, atunci se ivește necesitatea de a lua în considerare nu numai proprietățile diferențiale ale funcțiilor φ_λ pe diferitele porțiuni netede Γ_k, ci și relațiile $\mathcal{M}_{A_k}^{\left(r-\frac{2}{p}\right)}$.

Remarcăm că dacă $r - \frac{2}{p} > 0$, atunci are loc scufundarea (vezi teorema 1, § 1 pentru clasele H):

$$H_\infty^{\left(r-\frac{2}{p}\right)}(R_2) \subset H_p^{(r)}(R_2)$$

și în felul acesta, pentru funcția $f \in H_p^{(r)}(R_n)$, derivatele parțiale de ordin ce nu depășește pe $r - \frac{2}{p}$ sînt continue, și că pentru funcțiile limită

$\varphi_\lambda = \left.\frac{\partial^\lambda f}{\partial n^\lambda}\right|_\Gamma$ au sens relațiile $H_\infty^{\left(r-\frac{2}{p}\right)}(R_n)$.

Pentru clasele B și W cu r arbitrari, teoremele de tipul 4 și 5 pentru suprafețe S netede pe porțiuni nu au fost studiate complet în literatura de specialitate. Trebuie totuși să remarcăm următorul rezultat al lui E. Gagliardo [9] (vezi de asemenea [39]), care a examinat teoreme de tipul 4, 5 pentru $r = 1$, pentru o suprafață S care poate fi nu numai fragmentar netedă, ci chiar și mai generală.

TEOREMA 6. (E. Gagliardo). *Să presupunem că suprafața S care mărginește domeniul $\mathcal{G}$ se poate împărți în asemenea porțiuni σ care se acoperă reciproc, încît fiecare din ele, după o eventuală permutare a coordonatelor este definită de cîte o ecuație de forma*

$$x_n = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}), \qquad (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \sigma'$$

unde σ' este proiecția porțiunii σ pe planul $x_n = 0$. Mai presupunem că funcția φ de pe σ' satisface în raport cu toate coordonatele $x_1, \ldots, x_{n-1}$ o condiție a lui Lipschitz.

Atunci

$$W_p^{(l)}(\mathcal{G}) \subset W_p^{\left(l-\frac{1}{p}\right)}(S) \subset W_p^{(l)}(\mathcal{G}) \qquad (1 \leqslant p < \infty).$$

Am remarcat deja în teorema 3 rezultatul lui L. D. Kudriavţev, în virtutea căruia, în condiţiile acestei teoreme, funcţia f prelungită pe R_n de pe suprafaţa S, poate fi derivabilă de $k-1$ ori, dacă suprafaţa este derivabilă de k ori. Prelungind funcţia de pe suprafaţa S pe R_n astfel încît ea să aibă mai bune proprietăţi diferenţiale la limită în domeniul $\mathcal{G}$ cu frontiera S, putem impune şi condiţia ca ea să satisfacă pe R_n o anumită ecuaţie diferenţială, de exemplu să fie o funcţie poliarmonică. Mai jos se dau rezultate de acest gen, care au un caracter definitiv şi nu se mai pot îmbunătăţi în cadrul acelor clase în care ele se formulează.

În baza teoremei 2, aplicînd metoda variaţională (vezi S. L. S o b o l e v [2]), se poate afirma că dacă un sistem de funcţii $F_{(\lambda)\sigma}$ satisface condiţiile teoremei 2 şi $r > l$, atunci există în $\mathcal{G}$ o singură funcţie $f \in W_2^{(l)}(\mathcal{G})$, care satisface în $\mathcal{G}$ ecuaţia poliarmonică $\Delta^{(l)}(\mathcal{G})$ şi pentru care sînt satisfăcute egalităţile la limită (10) (vezi [27]). După cum am mai remarcat, teorema 2 este valabilă în întregime, dacă se formulează pentru clasele W şi atunci în baza ei, după aplicarea metodei variaţionale, se poate afirma (L. N. S l o b o d e ţ k i [8]) că dacă sistemul de funcţii $F_{(\lambda)\sigma}$ satisface condiţiile teoremei 2 (enunţate pentru clasele W) şi $r = l$, atunci există în $\mathcal{G}$ o singură funcţie $f \in W_2^{(l)}(\mathcal{G})$ care satisface în $\mathcal{G}$ ecuaţia poliarmonică $\Delta^l f = 0$ precum şi condiţiile la limită (10). Invers, după teorema 2 (enunţată pentru clasele W), din faptul că $f \in W_2^{(l)}(\mathcal{G})$, urmează că pentru f sînt satisfăcute proprietăţile la limită (10). Astfel s-au obţinut condiţiile necesare şi suficiente pentru o funcţie l-armonică, pentru ca ea să aparţină clasei $W_2^{(l)}(\mathcal{G})$, dacă frontierea S a domeniului $\mathcal{G}$ are ordinul de netezime $l+1$.

Teoreme asemănătoare, care exprimă în limbajul corespunzător proprietăţilor funcţiilor-frontieră condiţiile necesare şi suficiente pe care trebuie să le satisfacă o funcţie l-armonică de clasă dată, pot fi găsite şi în cadrul claselor H. De exemplu în cazul cercului unitar σ din plan, are loc următoarea teoremă la limită (pentru $p=2$, [23], iar în cazul general Ia. S. B u g r o v [29], vezi şi T. I. A m a n o v [30]), enunţată pentru clasele H.

TEOREMA 7. *Fie funcţiile de perioadă* 2π

$$\varphi_k(\theta) \in H_{p*}^{(r-l-k-1)}(R_1) \qquad (k = 0, 1, \ldots, l-1\,;\ 1 \leqslant p \leqslant \infty\,;\ r > 0).$$

Atunci funcţia poliarmonică $u(\rho, \theta)$ *de coordonatele polare* $(0 \leqslant \rho \leqslant 1,$ $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$, *care rezolvă în cercul unitar* σ *problema la limită*

$$\Delta^l u(\rho, \theta) = 0 \tag{15}$$

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial \rho^k}\right|_{\rho=1} = \varphi_k(\theta) \qquad (k = 0, 1, \ldots, l-1) \tag{16}$$

aparţine clasei $H_p^{\left(r+l+\frac{1}{p}-1\right)}(\sigma)$.

Aici, aşa cum am convenit pretutindeni, egalitatea se înţelege în sensul egalităţii

$$\left\| \frac{\partial^k u}{\partial \rho^k}(\rho, \theta) - \varphi_k(\theta) \right\|_{\overset{*}{L}_p(0,2\pi)} \to 0 \qquad (\rho \to 1)$$

(vezi observaţia de la sfîrşitul § 1 cu privire la clasele periodice).

Dacă se compară afirmaţia teoremei 7 cu teorema 1, vedem că în acest caz s-au obţinut condiţiile necesare şi suficiente, exprimate în limbajul corespunzător funcţiilor la limită, pentru ca să existe o funcţie l-armonică care să aparţină clasei $H_p^{\left(r+l+\frac{1}{p}-1\right)}(\sigma)$.

Aici modul în care se pune problema este ceva mai larg, pentru că în exponentul $r + l + \frac{1}{p} - 1$, numărul r poate fi orice număr pozitiv.

O teoremă asemănătoare pentru clasele H (exactă de altfel la limită în cazul numerelor r diferite de numere întregi), a fost obţinută în lucrarea lui O. V. B e s o v [35] în cazul unei funcţii armonice în semiplanul superiori şi în lucrarea lui N. I. M o z j e r o v a [36] în cazul unei funcţii armonice de 3 variabile, definită în domeniu cu ajutorul unei funcţii destul de netedă.

Teorema 5, de asemenea poate fi întărită într-un mod corespunzător.

În baza teoremei 5, aplicînd metoda variaţională, se poate obţine următoarea teoremă de existenţă pentru soluţia problemei poliarmonice (l-armonice)

$$\Delta^l u = 0,$$

într-un domeniu $\mathcal{G}$, mărginit de un contur Γ neted pe porţiuni, definit în teorema 5, în condiţiile la limită

$$\left.\frac{\partial^\lambda u}{\partial n^\lambda}\right|_\Gamma = \varphi^\lambda \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, l-1) \tag{17}$$

(vezi [24], teorema 3).

TEOREMA 8. *Dacă un sistem de funcţii* φ *definite pe* Γ *satisface condiţiile teoremei* 5 *pentru* $p = 2$, *iar numărul real* $r > l$, *atunci există în domeniul* $\mathcal{G}$ *o singură funcţie* l*-armonică care rezolvă problema la limită* (17) *şi care aparţine clasei* $W_2^{(l)}(\mathcal{G})$.

În cadrul claselor H acest rezultat nu poate fi îmbunătăţit.

Este curios faptul că în cazul domeniilor cu puncte unghiulare, afirmaţiile de tipul teoremei 7 (în care nu ne mulţumim cu stabilirea existenţei soluţiei ecuaţiei, ci căutăm condiţiile care trebuie să fie puse funcţiilor-limită, condiţii ce atrag după sine anumite proprietăţi diferenţiale ale soluţiei inclusiv pe frontieră) se abat mult de la afirmaţiile teoremei 4. În legătură cu aceasta vom da cîteva teoreme aparţinînd elevului meu V. V. F u f a e v [44], care a dus pînă la capăt cîteva din cercetările mele cu privire la funcţiile armonice date în domenii cu unghiuri [22, 23, 24].

Fie, $\Omega \subset R_2$ un domeniu plan cu frontiera Γ, reprezentînd o porțiune a unei curbe netede de clasa $C^{\left(r+2+\frac{1}{p}\right)}$, ale cărei capete se unesc sub un unghi ω, iar anumite porțiuni ale curbei de lîngă vîrful P al unghiului, sînt segmente rectilinii. Vom presupune că valoarea arcului $s = 0$ corespunde punctului P și că lungimea lui Γ este egală cu l. Funcția limită f o vom considera funcție de arcul s pe segmentul $0 \leqslant s \leqslant l$.

Considerăm clasa $W_p^{(\rho)}H^{\alpha}(\Omega)$, $0 < \alpha < 1$ de funcții $f \in W_p^{(\rho)}(\Omega)$, astfel încît derivatele lor de ordinul $\rho = 0, 1, \ldots$, satisfac o condiție a lui Hölder de gradul α în metrica $L_p(\Omega)$ (vezi § 1 (1)). Astfel, pentru $0 < \alpha < 1$, $W_p^{(\rho)}H^{\alpha}(\Omega) = H_p^{(\rho+\alpha)}(\Omega)$.

Teorema 9. *Fie* $r - \frac{1}{p}$ *un număr pozitiv diferit de un număr întreg și o funcție armonică*

$$u \in W_p^{(\overline{r})}H^{(\alpha)}(\Omega), \quad r = \overline{r} + \alpha. \tag{18}$$

Atunci funcția armonică

$$u|_{\Gamma} = f(s) \tag{19}$$

satisface următoarele condiții :

1) $f \in H_p^{\left(r-\frac{1}{p}\right)}(0, l)$,

2) *în cazul* $\omega = \frac{\pi}{j}$ $(j = 1, 2, \ldots)$

$$f^{(k_j)}(+0) = (-1)^k f^{(k_j)}(-0)$$

pentru toți $k = 0, 1, \ldots$ *pentru care* $k_j < \overline{\rho}$, *unde* $\rho = r + \frac{1}{p} = \overline{\rho} + \beta$, $\overline{\rho}$ *este întreg*, $0 < \beta < 1$.

3) *Dacă* $\overline{\rho} = m_j$ (*m întreg*), *atunci este satisfăcută în mod suplimentar inegalitatea*

$$\left(\int_0^h |f^{(m_j)}(u) - (-1)^m f^{(m_j)}(-u)|^p \, du\right)^{1/p} \leqslant C h^{\beta}, \qquad (\lambda > 0).$$

Invers, din condițiile 1, 2, 3 *impuse funcției* $f(s)$, *dacă, în afară de aceasta*, $r - \frac{2}{p} > 0$, *rezultă că funcția* $f(s)$ *armonică pe* Ω, *care satisface (în medie) condiția* (19), *aparține clasei* $W_p^{(\overline{r})}H^{(\alpha)}(\Omega)$, (*condiția* (18)).

În cazul unghiului $\omega = \frac{\pi}{2}$, această teoremă a fost demonstrată în lucrarea mea [23] ; în cazul general acesta este rezultatul lui V. V. F u f a e v [44].

Astfel, pentru unghiuri speciale de forma $\frac{\pi}{j}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ care formează un șir discret, au loc teorema directă și (pentru $r - \frac{2}{p} > 0$) teorema ei reciprocă. Condițiile 2) și 3) care caracterizează salturile funcției limită f într-un punct unghiular, sînt legate în mod specific de caracterul armonic al lui u.

În ceea ce privește condiția 1), care exprimă proprietățile diferențiale ale lui $f(s)$ pe conturul Γ, considerat ca o porțiune netedă, ea este aceeași ca și în teorema 4 $(\lambda = 0)$ și dintr-un anumit punct de vedere ea decurge din teorema 4.

În aceea ce privește unghiurile ω care nu se pot pune sub forma $\frac{\pi}{j}$ $(j=1, 2, \ldots)$, pentru ele situația are un caracter cu totul diferit.

Teorema 10. (V. V. Fufaev). *Dacă* ω *nu este egal cu unul din numerele* $\frac{\pi}{j}$ $(j=1, 2, \ldots)$, *atunci partea reciprocă a teoremei* 9 *este îndeplinită numai în condiția* $r - \frac{2}{p} < \frac{\pi}{\omega}$, *adică dacă* $f \in H_p^{\left(r-\frac{1}{p}\right)}(0, l)$ *și* $r - \frac{1}{p}$ *este diferit de un număr întreg ; atunci*

$$u \in W_p^{(\overline{r})}H^{(\alpha)}(\Omega) \quad (r = \overline{r} + \alpha).$$

Dacă însă $r - \frac{2}{p} > \frac{\pi}{\omega}$, atunci această afirmație este inexactă ; se poate construi o funcție limită $f(s)$ care are oricîte derivate pentru $0 \leqslant s \leqslant l$ și este egală cu zero pe porțiunea $0 \leqslant s \leqslant \delta$, $l - \delta \leqslant s \leqslant l$, avînd proprietatea că o funcție armonică u pentru care $u|_{\Gamma} = f$, nu aparține clasei $W_p^{(\overline{r})}H^{(\alpha)}(\Omega)$, $r = \overline{r} + \alpha$.

Întrucît această funcție este identic egală cu zero pe un arc care conține în interiorul său punctul unghiular, valorile limită ale ei și ale derivatelor ei în punctul $s = 0$ satisfac oricărei relații liniare.

Am dat cîteva rezultate pentru domenii cu unghiuri nedegenerate. Dacă unghiurile degenerează, situația se schimbă. Mai jos se dă un rezultat obținut de curînd de către I. G. G l o b e n k o [40].

Vom numi corp conic cu parametrii a, α_0, λ, un domeniu închis n-dimensional $\mathcal{V}_n$ mărginit de suprafețe ale căror ecuații au forma :

$$x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \alpha_0^2 x_1^{2\lambda}, \; x_1 = a \quad (x_1 \geqslant 0, \; \lambda \geqslant 1).$$

Vom considera domeniul $\mathcal{G}$ în care fiecare punct poate fi atins de un corp congruent cu cel fixat.

Cu alte cuvinte, pentru domeniul dat $\mathcal{G}$, trebuie să existe un astfel de corp $\mathcal{V}_n$, încît mișcîndu-l în interiorul lui $\mathcal{G}$, cu vîrful lui să se poată atinge orice punct $\overline{x}$. Într-un singur caz (cazul cînd p' este finit) se mai pun condiții suplimentare noțiunii de „atingere''. Nu le vom formula aici, trimițînd cititorul la articolul [40].

Are loc teorema:

TEOREMA 11. (I. G. Globenko) *Dacă* $1 < p < p' < \infty$,

$$k_\lambda = r - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}\right)[\lambda(k-1)+1] > 0,$$

atunci are loc scufundarea :

$$W_p^{(r)}(\mathcal{G}) \subset W_{p'}^{([k_\lambda])}(R_m\,\mathcal{G}).$$

Pentru $\lambda = 1$, obținem de aici teorema de scufundare a lui S. L. Sobolev, care a fost formulată în § 1.

§ 5. Clase ponderate

Teoremele de scufundare pentru clasele W și B sînt legate de asemenea și de așa-numitele clase ponderate. Chiar și demonstrația unora dintre teoremele pentru clasele W, B se bazează pe proprietățile claselor ponderate. Pe de altă parte, clasele ponderate intervin în mod natural în rezolvarea problemelor la limită de fizică matematică pentru ecuațiile de tip eliptic cu degenerare pe frontieră.

Teoria generală a scufundărilor claselor ponderate a fost creată de L. D. Kudriavțev și a fost expusă în monografia lui [15]. L. D. Kudriavțev a studiat clasele ponderate comparîndu-le cu clasele H. Multe rezultate obținute de el, exprimate în termenii claselor H, nu se pot îmbunătăți și sînt definitive.

În ultimul timp, în teoria claselor ponderate s-au obținut o serie de noi rezultate în lucrările lui A. A. Vașarin, P. I. Lizorkin [17], [19], S. V. Uspenski [12, 13].

În aceste lucrări s-a lămurit legătura strînsă dintre clasele ponderate și clasele W și B. Caracterul firesc al acestei legături se manifestă în faptul că unele teoreme de scufundare ale claselor ponderate în clasele W și B pot fi inversate în întregime. Încă în lucrările lui L. V. Kudriavțev s-au obținut asemenea teoreme reciproce, însă, fiind exprimate în limbajul corespunzător claselor H, ele inversau teoremele directe corespunzătoare, cu o precizile pînă la un $\varepsilon > 0$, oricît de mic.

În lucrările lui A. A. Vașarin [16, 42], pentru $p = 2$ au fost stabilite condiții complet reversibile în termenii claselor W, care trebuie satisfăcute pe frontiera domeniului $\mathcal{G}$ de către funcție, dacă primele ei derivate sînt sumabile pe $\mathcal{G}$ la puterea doua, cu o pondere oarecare. P. I. Lizorkin [17] a obținut apoi o teoremă asemănătoare pentru orice $p > 1$

În cazul general al derivatelor de ordin superior, rezultate de acest gen au fost obținute apoi în lucările lui S. V. Uspenski [12].

Examinarea comportării funcțiilor pe varietăți de diferite dimensiuni a dus la teoremele de scufundare ale claselor ponderate în clasele W și B. Pe de altă parte, prelungirile corespunzătoare ale funcțiilor ce aparțin claselor W și B au dus în mod natural la scufundările acestor clase în clasele ponderate.

În urma cercetărilor lui S. V. Uspenski [13], P. I. Lizorkin [19] și O. V. Besov [10], s-a creat o teorie complect închisă în sine a unor astfel de scufundări ; rezultate definitive în această direcție (cazul întreg și varietăți de dimensiuni inferioare lui $n-k$, vezi mai jos) se datoresc lui S. V. Uspenski.

Considerăm un domeniu $\mathcal{G} \subset R_n$ avînd frontieră m-dimensională destul de netedă Λ_m.

Luăm în considerare distanța $\rho = \rho(\bar{x}, \Lambda_m)$ de la punctul $\bar{x}$ pînă la Λ_m. Funcția $\rho^\alpha = \rho(\bar{x}, \Lambda_m)^\alpha$ o vom numi pondere cu exponentul α.

Prin definiție, funcția f aparține clasei ponderate $W_{p,\alpha}^{(l)}(\mathcal{G})$, unde $-(n-m) < \alpha \leqslant lp$, $1 < p < \infty$ $(l = 1, 2, \ldots)$, dacă f are în $\mathcal{G}$ derivate generalizate pînă la ordinul l inclusiv și dacă norma

$$\|f\|_{W_{p,\alpha}^{(l)}(\mathcal{G})} = \|f\|_{L_p(\mathcal{G})} + \sum\left(\int_{\mathcal{G}} \rho^\alpha |f^{(l)}|^p\, d\mathcal{G}\right)^{1/p} < \infty,$$

$$(-(n-m) < \alpha < lp)$$

este finită.

Au loc următoarele trei propoziții, care încheie rezultatele fundamentale respective ale lui L. D. Kudriavțev :

TEOREMA 1. *Are loc scufundarea*

$$W_{p,\alpha}^{(l)}(\mathcal{G}) \subset W_{p,\alpha-pk}^{(l-k)}(\mathcal{G}), \tag{1}$$

dacă $\alpha - kp + n - m > 0$.

TEOREMA 2.

$$W_{p,\alpha}^{(l)}(\mathcal{G}) \subset W_p^{\left(l-\frac{\alpha}{p}\right)}(\mathcal{G}) \subset B_p^{\left(l-\frac{\alpha}{p}-\frac{n-m}{p}\right)}(\Lambda_m) \tag{2}$$

(pentru $p = 2$, $l = 1$, A. A. Vașarin, iar cazul general, P. I. Lizorkin și S. V. Uspenski; în lucrarea inițială a lui L. D. Kudriavțev în partea dreaptă a relației (2) se găsea termenul $H_p^{\left(l-\frac{\alpha}{p}-\frac{n-m}{p}-\varepsilon\right)}(\Lambda_m)$, $\varepsilon > 0$).

Remarcăm că pentru $1 < p \leqslant 2$, are loc relația $B_p^{(r)} \subset W_p^{(r)}$, iar pentru r fracționar, $B_p^{(r)} = W_p^{(r)}$.

TEOREMA 3. *Are loc de asemenea inversarea completă a relațiilor* (2) *și anume, dacă pentru fiecare sistem admisibil de numere naturale* $(\lambda) = (\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n)$ *pentru care este satisfăcută inegalitatea*

$$l - \frac{n-m}{p} - \sum_{m+1}^{n} \lambda_i > 0,$$

este dată funcția

$$\varphi_{(\lambda)} = \varphi_{(\lambda)}(x_1, \ldots, x_m) \in B_p^{\left(l - \frac{n-m}{p} - \sum\limits_{m+1}^{n} \lambda_i\right)}(\Lambda_m)$$

(în lucrarea lui L. D. Kudriavțev $\varphi_{(\lambda)} \in H_p^{\left(l - \frac{n-m}{p} - \varepsilon - \sum\limits_{m+1}^{n} \lambda_i\right)}(\Lambda_m)$ *atunci există definită în* $\mathcal{G}$ *o funcție*

$$F \in W_{p,\, jp-n-m}^{(l+j)}(\mathcal{G}) \qquad (j = 1, 2, \ldots)$$

astfel încît pentru toate derivatele ei normale scrise mai jos, corespunzînd sistemelor admisibile (λ), *sînt satisfăcute concomitent egalitățile*

$$\left.\frac{\partial^{\lambda_{m+1} + \cdots + \lambda_n} F}{\partial x_{m+1}^{\lambda_{m+1}} \cdots \partial x_n^{\lambda_n}}\right|_{\Lambda_m} = \varphi_{(\lambda)}.$$

Amintim că în cazul $2 \leqslant p < \infty$ are loc scufundarea $W_p^{(r)} \subset B_p^{(r)}$, care dă posibilitatea de a exprima ultima afirmație numai în termenii claselor W.

Remarcăm un rezultat care aparține teoriei problemelor la limită ale fizicii matematice, care întărește teorema reciprocă a teoremei 3.

A. A. Vașarin [16, 42], întărind rezultatul corespunzător al lui L. D. Kudriavțev [15], a arătat că dacă pe o frontieră destul de netedă Γ a unui domeniu $\mathcal{G}$ se dă funcția $\varphi \in W_2^{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}(\Gamma)$ (L. D. Kudriavțev $\varphi \in H_2^{(\varrho)}(\Gamma)$, $\rho > \frac{1-\alpha}{2}\Big)$, există o soluție u definită în $\mathcal{G}$ și una singură, a ecuației cu derivate parțiale

$$Lu = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sigma^{\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = 0, \tag{3}$$

soluție care aparține clasei ponderate $W_{2,\alpha}^{(\lambda)}(\mathcal{G})$ și satisface condiția la limită

$$u\big|_{\Gamma} = \varphi.$$

Aici σ înseamnă o funcție pozitivă, de două ori continuu derivabilă în $\mathcal{G}$, care satisface inegalitatea

$$C_1\, \rho(\bar{x}) < \sigma(\bar{x}) < C_2\, \rho(\bar{x})$$

unde C_1 și C_2 sînt constante, iar ρ este distanța de la punctul $\bar{x}$ pînă la Γ; A. A. Vașarin a arătat de asemenea că și invers

$$W_{2,\alpha}^{(1)}(\mathcal{G}) \subset W_2^{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}(\Gamma),$$

ceea ce este acum un caz particular al teoremei 2 formulate mai sus.

Primele cercetări în problema la limită (3), (4) aparțin lui M. V. Keldiș [47].

P. I. Lizorkin a considerat un domeniu plan $\mathcal{G}$ cu o frontieră Γ netedă pe porțiuni, cu unghiuri nedegenerate, din care o porțiune reprezintă un segment ce coincide cu axa x-ilor. El introduce funcționala

$$D_{p,\alpha}(f, \mathcal{G}) = \iint\limits_{\mathcal{G}} |y|^{\alpha} |\operatorname{grad} f|^{p}\, dx dy \quad (1 < p < \infty) \tag{4}$$

pentru acele funcții $f \in L_p(\mathcal{G})$ pentru care ea are sens și este finită. Totodată, pentru anumite funcții $\varphi \in L_p(\Gamma)$ se introduce funcționala

$$d_{p,\alpha}(\Gamma) = \int\limits_{\Gamma} dS_M \int\limits_{\Gamma} \frac{|\varphi(M) - \varphi(Q)|^p}{|MQ|^p} \omega^{\alpha}(M, Q)\, dS_Q,$$

unde $\omega(M, Q)$, în cazul cînd unul din punctele M, Q se găsește pe axa x-ilor, se definește ca distanța cea mai mică de-a lungul lui Γ dintre M și Q. În cazul însă cînd ambele puncte M, Q se află în afara axei x-ilor, atunci $\omega(M, Q)$ se definește ca minimul distanțelor de la M și Q pînă la axa x-ilor.

P. I. Lizorkin demonstrează teorema:

Din faptul că

$$f \in L_p(\Omega), \quad D_{p,\alpha}(f, \mathcal{G}) < \infty \qquad (-1 < \alpha < p - 1;\ 1 < p < \infty) \tag{4'}$$

rezultă că are sens

$$\varphi = f|_{\Gamma} \tag{5}$$

și

$$\varphi \in L_p(\Gamma), \quad d_{p,\alpha}(\varphi, \Gamma) < \infty \quad (-1 < \alpha < p - 1,\ 1 < p < \infty). \tag{6}$$

Propoziția inversă este de asemenea adevărată, adică o funcție φ care satisface condițiile (6), se poate prelungi în $\mathcal{G}$ astfel încît să fie satisfăcută relația (4′). Mai mult, această prelungire se poate realiza sub forma unei funcții u, analitică în domeniul $\mathcal{G}$ și satisfăcînd în $\mathcal{G}$ ecuația diferențială

$$U_{xx} + U_{yy} + \frac{\alpha}{y} U_y + (p - 2)\frac{U_x^2 U_{xx} + 2U_x U_y U_{xy} + U_y^2 U_{yy}}{1 + U_x^2 + U_y^2} = 0.$$

O astfel de funcție (chiar printre funcțiile de două ori continuu derivabile) este unică.

BIBLIOGRAFIE

1. С. Л. Соболев, *Об одной теореме функционального анализа.* Матем. сб. Новая серия. 4, *3*, 471—497 (1938).
2. — *Некоторые применения функционального анализа в математической физике.* Ленинград, 1950.
3. В. И. Кондрашев, *О некоторых свойствах функций пространств L_p.* Доклады Акад. Наук СССР, 48, 563—566 (1945).

4. С. М. Никольский, *Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных.* Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1951, **XXXVIII**, 244—278 (1951).
5. — *Свойства некоторых классов функций многих переменных на дифференцируемых многообразиях.* Матем. сб., **33** (75); *2*, 261—326 (1953).
6. Т. И. Аманов, *Граничные функции классов* $H_p^{(r_1, \ldots, r_n)}$ *и* $H_{p*}^{(r_1, \ldots, r_n)}$. Известия АН СССР, сер. матем., **19**, *1*, 17—32 (1955).
7. N. Aronszajn, *Boundary value of function with finite Dirichlet integral.* Conference on partial differential equations. Studies in eigenvalue problems, No. 14 (Univ. of Kansas, 1955).
8. Л. Н. Слободецкий, *Пространства С. Л. Соболева дробного порядка и их приложения к краевым задачам для дифференциального уравнения в частных производных.* ДАН СССР, **118**, *2*, 243—246 (1958).
9. E. Gagliardo, *Caratterizzazioni delle trace sullo frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili.* Rendiconti del Seminare matematico della universita di Padova, **27**, 284—305 (1957).
10. О. В. Бесов, *О некотором семействе функциональных пространств. Теорема вложения и продолжения.* ДАН СССР, **126**, *6*, 1163—1165 (1959).
11. — *О некоторых условиях принадлежности к производных периодических функций.* Научные доклады высш. школы, **1**, 12—17 (1959).
12. С. В. Успенский, *Теорема о вложении классов С. Л. Соболева* $W_p^{(r)}$ *дробного порядка.* ДАН СССР, **130**, *5*, 992—993 (1960).
13. — *Свойства классов* $W_p^{(r)}$ *с дробной производной на дифференцируемых многообразиях.* ДАН СССР, **132**, *1*, 60—62 (1960).
14. Л. Д. Кудрявцев, *О продолжении функций и о вложении классов функций.* ДАН СССР, **107**, стр. 501—504 (1956).
15. — *Продолжение функций и вложение классов функций. Прямые и обратные теоремы вложения. Приложения к решению вариационным методом эллиптических уравнений.* Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, **LV**, 1—181 (1959).
16. А. А. Вашарин, *Граничные свойства функций, имеющих конечный интеграл Дирихле с весом.* ДАН СССР, **117**, *5*, 742—744 (1957).
17. П. И. Лизоркин, *Граничные свойства некоторого класса функций.* ДАН СССР, **126**, *4*, 703—706 (1959).
18. С. М. Никольский, *Теорема вложения для функций с частными производными, рассматриваемыми в различных метриках.* Известия АН СССР, серия матем., **22**, 321—336 ((1958).
19. П. И. Лизоркин, *Граничные свойства функций из „весовых" классов.* ДАН СССР, **132**, 514—517 (1960).
20. П. Пилика, *Граничные функции классов* $H_{p_1, \ldots, p_n}^{(r_1, \ldots, r_n)}$ ДАН СССР, **127**, 677—679 (1959).
21. С. М. Никольский, *О продолжении функций многих переменных с сохранением дифференциальных свойств.* Матем, сб., **40** (82) : *2*, 244—268 (1956).
22, 23, 24. С. М. Никольский, *Граничные свойства функций, определенных на области с угловыми точками.* Матем. сб:
(22) — I — **40** (82) : *3*, 303—318 (1956);
(23) — II — **43** (86) : *1*, 127—144 (1957);
(24) — III — **45** (87) : *2*, 181—194 (1958).
25. С. М. Никольский, *Компактность классов* $H_p^{(r_1, \ldots, r_n)}$ *функций многих переменных.* Известия АН СССР, серия. матем., **20**, 611—622 (1956).
26. Л. Д. Кудрявцев, *Об одном обобщении теоремы С. М. Никольского о компактности классов дифференцируемых функций.* УМН, **9**, *2*, **(59)**, 111—120 (1954).

27. С. М. Никольский, *К вопросу о решении полигармонического уравнения вариационным методом,* ДАН СССР, **XXXIII**, *3*, 409—411 (1953).
28. В. К. Дзядык, *О продолжении функций, удовлетворяющих условию Липшица в метрике* L_p. Матем. сб., **40** (82) : *2*, 239—242 (1956).
29. Я. С. Бугров, *Свойства полигармонических функций.* Известия АН СССР, серия матем., **22**, 491—514 (1958).
30. Т. И. Аманов, *К решению бигармонической задачи.* ДАН СССР, **87**, *3*, 389—392 (1953).
31. О. В. Бесов, *О некоторых свойствах пространств* $H_p^{(r_1, \ldots, r_m)}$. Изв. высш. учебн. зав., сер. матем., **1** (**14**), 16—23 (1960).
32. — *Об одном семействе функциональных пространств. Теоремы вложения и продолжения.* ДАН СССР, **126**, 1163—1165 (1959).
33. Л. Н. Слободецкий, *Оценки решений эллиптических и параболических систем.* ДАН СССР, **120**, *3*, 468—471 (1958).
34. — *Обобщение пространства С. Л. Соболева и их приложение к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных.* Ленинградский гос. педагогич. ин-т им. А. И. Герцена. Ученые записки. физ.-матем. фак. 54—112 (1958).
35. О. В. Бесов, *О некоторых свойствах гармонических функций, заданных на полупространстве.* Известия АН СССР, серия. матем., **20**, 469—484 (1956).
36. Н. И. Мозжерова, *Граничные свойства гармонических функций в трехмерном пространстве.* ДАН СССР, **118**, 636—638 (1958).
37. В. П. Ильин, *О теореме вложения для предельного показателя.* ДАН СССР, **96**, 908—909 (1954).
38. А. А. Конюшков, *Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты фурье.* Матем. сб., **44** (86), 53—84 (1958).
39. I. Necaas, *Über Grenzwerte von Funktionen, welche ein endliches Dirichletsches Integral haben.* Aplike Matematiky. Чехословакия, **5**, 202—209 (1960).
40. И. Г. Глобенко, *Теоремы вложения для области с нулевыми угловыми точками.* ДАН СССР, **132**, 251—253 (1960).
41. И. А. Киприянов, *Дробная производная и теоремы вложения.* ДАН СССР, **126**, *6*, 1187—1190 (1959).
42. А. А. Вашарин, *Граничные свойства функций класса и их приложение к решению одной краевой задачи математической физики.* Известия АН СССР, сер. матем., **23**, 421—454 (1959).
43. Л. Н. Слободецкий, *Оценки решений эллиптических и параболических систем.* ДАН СССР, **120**, 468—471 (1958).
44. В. В. Фуфаев, *К задаче Дирихле для областей с углами.* ДАН СССР, **131**, *1*, 137—139 (1960).
45. G. Hardy, J. Littlewood, *Some properties of fractional integrals. I.* Mathematische Zeitschrift, **27**, 565—606 (1928).
46. А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды.* ГОНТИ НКТП СССР, 1939.
47. М. В. Келдыш, *О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области.* ДАН СССР, **77**, *2*, 181—183 (1951).
48. С. М. Никольский, *Некоторые свойства дифференцируемых функций, заданных на n мерном открытом множестве.* Известия АН СССР, серия матем., **23**, 213—242 (1959).

Primit la 30. XI. 1960.