ASUPRA UNOR POLINOAME DE TIP BERNSTEIN *)

DE

OLEG ARAMĂ

(Cluj)

Lucrare prezentată la sesiunea ştiinţifică de comunicări în domeniul automaticii, organizată de Comisia de automatizare a Academiei R.P.R., în perioada 23—24 noiembrie 1961, Bucureşti.

1. În lucrarea de faţă se continuă unele cercetări anterioare [1], privind aproximarea funcţiilor prin polinoame de tip Bernstein.

Pentru funcţii $f(x)$ care admit în intervalul $[0,1]$ derivate de ordinul k, continue, se introduc polinoamele de interpolare $B_m^{(k)}(x\,;\,f)$, definite de formula (2) şi se studiază diferenţele

$$R_{m,k,i}(x\,;f) = \frac{d^i f(x)}{dx^i} - \frac{d^i}{dx^i} B_m^{(k)}(x\,;f) \qquad (i = 0,\ 1, \ldots,\ k).$$

Se arată că dacă $k \geqq 1$, în anumite ipoteze suplimentare privind funcţia $f(x)$, polinoamele (2) aproximează funcţia $f(x)$ în vecinătatea originii mai bine decît polinoamele obişnuite (1) ale lui S. N. Bernstein.

În vederea studierii restului $R_{m,k,i}(x\,;f)$, am aplicat metoda generală propusă de prof. T. P o p o v i c i u în lucrarea [13], metodă bazată pe utilizarea funcţiilor convexe.

Se arată în lucrarea de faţă, că oricare ar fi numerele naturale k, m şi $i = 0, 1, \ldots, k$, restul în cauză este de „formă simplă" [13]. În acest scop se pun în evidenţă unele proprietăţi de monotonie ale şirului de polinoame (2) (teorema 1).

Rezultatele astfel obţinute se extind la funcţii de două variabile independente.

Aceste cercetări au fost făcute — pe de o parte — în vederea aplicaţiilor pe care le au în integrarea aproximativă a ecuaţiilor diferenţiale ordi-

---

*) Această lucrare se publică şi în limba franceză în revista „Mathematica", vol. 4 (27), 1962.

nare. Referindu-ne la metoda de integrare aproximativă propusă în lucrarea [1] şi bazată pe utilizarea polinoamelor de interpolare (1), se poate mări (în anumite ipoteze) ordinul ei de aproximaţie, dacă se utilizează polinoamele de interpolare (2) în locul polinoamelor (1).

Extinderea rezultatelor obţinute în această lucrare pentru funcţii de o singură variabilă independentă, la funcţii de două variabile independente, le-am făcut de asemenea în scopul unor aplicaţii pe care le-ar avea la integrarea aproximativă a unor ecuaţii cu derivate parţiale.

Prezentarea însă a tuturor acestor aplicaţii va forma obiectul unor alte lucrări.

2. Fie $f(x)$ o funcţie definită în intervalul $[0,1]$ şi fie $B_m(x;f)$ polinomul de interpolare a lui S. N. Bernstein, asociat acestei funcţii precum şi intervalului $[0,1]$, adică

$$B_m(x;f)=\sum_{i=0}^{m} C_m^i\, x^i(1-x)^{m-i} f\left(\frac{i}{m}\right). \tag{1}$$

Fie k un număr natural ales arbitrar, pe care însă îl vom presupune fixat în cele ce urmează. Vom presupune că $f(x)\in C^k[0,1]$, adică $f(x)$ admite în intervalul $[0,1]$ o derivată continuă de ordinul k. Introducem următoarele polinoame de interpolare :

$$B_m^{(k)}(x;f)=f(0)+-\frac{x}{1!}f(0)+\dots+\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k-1)}(0)+$$

$$+\int_0^0\frac{(x-s)^{k-1}}{(k-1)!}\,B_m\left(s;\frac{d^kf}{dx^k}\right)ds \qquad (m=1,2,\dots). \tag{2}$$

Notînd

$$\varphi_{i,m,k}(x)=C_m^i\int_0^x\frac{(x-s)^{k-1}}{(k-1)!}\,s^i(1-s)^{m-i}\,ds=$$

$$=C_m^i\sum_{\alpha=0}^{m-1}\frac{(-1)^\alpha C_{m-1}^\alpha\, x^{\alpha+i+k}}{(\alpha+i+1)(\alpha+i+2)\dots(\alpha+i+k)} \qquad (k\geq 1,\ 0\leq i\leq m), \tag{3}$$

obţinem

$$B_m^{(k)}(x;f)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\dots+\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k-1)}(0)+$$

$$+\sum_{i=0}^{m}\varphi_{i,m,k}(x)\,\frac{d^kf\left(\frac{i}{m}\right)}{dx^k}. \tag{4}$$

Au loc următoarele teoreme:

TEOREMA 1. *Dacă funcţia* $\frac{d^kf(x)}{dx^k}$ *este în intervalul* $[0,1]$ *convexă, respectiv neconcavă de ordinul întîi (adică dacă orice diferenţă divizată pe cîte trei noduri distincte din intervalul* $[0,1]$ *este respectiv* >0, ≥ 0), *atunci oricare ar fi* $i=0,1,\dots,k$, *şirul de polinoame*

$$\frac{d^i}{dx^i}B_1^{(k)}(x;f),\ \frac{d^i}{dx^i}B_2^{(k)}(x;f),\ \dots,\ \frac{d^i}{dx^i}B_m^{(k)}(x;f),\ \dots \tag{5}$$

corespunzător funcţiei $f(x)$ *şi intervalului* $[0,1]$ *este descrescător, respectiv necrescător pentru orice* $x\in(0,1)$. *Această proprietate de monotonie a şirului* (5) *se menţine adevărată şi în punctul* $x=1$, *cu excepţia cazului* $i=k$.

Afirmaţia acestei teoreme rezultă din următoarea teoremă stabilită în lucrarea [1] :

Dacă o funcţie $F(x)$, continuă în intervalul $[0,1]$ este convexă de ordinul 1 în acest interval, atunci pentru ea au loc în intervalul $(0,1)$ inegalităţile

$$B_{m+1}(x;f)-B_m(x;f)<0, \quad (m=1,2,\dots).$$

Scriind aceste inegalităţi pentru funcţia $F(x)=\frac{d^kf(x)}{dx^k}$ presupusă prin ipoteză continuă şi convexă de ordinul 1 intervalul $[0,1]$, şi ţinînd seamă de formula (2), se obţine afirmaţia teoremei 1.

TEOREMA 2. *Dacă funcţia* $f(x)$ *aparţine clasei* $C^k[0,1]$, *indiferent dacă verifică sau nu vreo relaţie de convexitate, pentru ea au loc relaţiile*

$$f(x)-B_m^{(k)}(x;f)=-\frac{x^{k+1}}{m}\left(\frac{k+2}{2}-x\right)\cdot[\xi_{m,1}^{(k)},\ \xi_{m,2}^{(k)},\ \dots,\ \xi_{m,k+3}^{(k)};f]$$

$$(m=1,2,\dots), \tag{6}$$

unde $\xi_{m,1}^{(k)},\ \xi_{m,2}^{(k)},\ \dots,\ \xi_{m,k+3}^{(k)}$ *sînt valori distincte din intervalul* $(0,1)$. *Egalităţile* (6) *sînt valabile oricare ar fi* $x\in[0,1]$. [1)]

Demonstraţie. Dacă se notează

$$R_{m,k}(x;f)=f(x)-B_m^{(k)}(x;f)$$

şi se presupune x fixat în intervalul $[0,1]$, $R_{m,k}(x;f)$ apare o funcţională definită pe spaţiul $C^k[0,1]$ al funcţiilor care admit în intervalul $[0,1]$ derivate de ordinul k, continue. Această funcţională este aditivă, omogenă şi mărginită în raport cu norma

$$\|f(x)\|=\max_{x\in[0,1]}|f(x)|+\sum_{i=0}^{k-1}|f^{(i)}(0)|.$$

---

1) Notaţia $[\xi_{m,1}^{(k)},\dots,\xi_{m,k+3}^{(k)};f]$ reprezintă diferenţa divizată a funcţiei $f(x)$ pe nodurile $\xi_{m,1}^{(k)},\dots,\xi_{m,k+3}^{(k)}$.

Se observă că

$$R_{m,k}(x\,;1) \equiv R_{m,k}(x\,;x) \equiv \ldots \equiv R_{m,k}(x\,;x^{k+1}) \equiv 0 \tag{7}$$

şi că

$$R_{m,k}(x\,;x^{k+2}) = x^{k+2} - \int_0^x \frac{(x-s)^{k-1}}{(k-1)!} B_m\left(s\,;\frac{(k+2)!}{2}x^2\right) ds =$$

$$= \frac{(k+2)!}{2}\int_0^x \frac{(x-s)^{k-1}}{(k-1)!} s^2 ds - \frac{(k+2)!}{2}\int_0^x \frac{(x-s)^{k-1}}{(k-1)!} B_m(s\,;x^2)\, ds =$$

$$= \frac{(k+2)!}{2}\int_0^x \frac{(x-s)^{k-1}}{(k-1)!}\left\{s^2 - \frac{s}{m}\,[1+(m-1)s]\right\} ds =$$

$$= \frac{(k+2)!}{2}\int_0^x \frac{(x-s)^{k-1}}{(k-1)!}\,\frac{s(s-1)}{m}\, ds = -\frac{x^{k+1}}{m}\left(\frac{k+2}{2} - x\right). \tag{8}$$

Relaţiile (7) şi (8) ne arată că funcţionala $R_{m,k}(x\,;x^{k+2})$ are gradul de exactitate $g = k+1$.

În altă ordine de idei, ţinînd seamă de teorema 1, rezultă că dacă funcţia $\frac{d^k}{dx^k}f(x)$ este convexă de ordinul 1 în intervalul $[0, 1]$, atunci are loc inegalitatea

$$B_m^{(k)}(x\,;f) > B_{m+p}^{(k)}(x\,;f), \tag{9}$$

valabilă pentru orice $x \in (0, 1]$ şi pentru orice număr natural p. Trecînd la limită, cînd $p \to \infty$ şi ţinînd seamă de faptul că în ipoteza continuităţii în $[0, 1]$ a funcţiei $f^{(k)}(x)$, polinoamele $B_{m+p}^{(k)}(x\,;f)$ tind uniform în intervalul $[0, 1]$ către funcţia

$$f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \cdots + \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k-1)}(0) + \int_0^x \frac{(x-s)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(s)\, ds \equiv f(x),$$

precum şi de faptul că şirul $B_m^{(k)}(x\,;f)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ este descrescător, rezultă din (9) inegalitatea

$$B_m^{(k)}(x\,;f) > f(x), \quad x \in (0, 1]. \tag{10}$$

Acest rezultat ne arată că oricare ar fi x fixat în intervalul $(0, 1]$, funcţionala $R_{m,k}(x\,;f)$ ia valori negative pentru orice funcţie $f(x)$ care este convexă de ordinul $k+1$ în intervalul $[0, 1]$.[2])

[2]) O funcţie $f(x)$ definită într-un interval J se spune că este convexă (respectiv neconcavă) de ordinul ν în acel interval, dacă orice diferenţă divizată a ei pe $\nu + 2$ noduri distincte din J este pozitivă (respectiv nenegativă).

În continuare ne vom folosi de următorul rezultat obţinut de prof. T. Popoviciu în lucrarea [13]:

Fie $R[f]$ o funcţională (reală) liniară, definită pe un spaţiu vectorial $\mathcal{F}$ format din funcţii reale, continue într-un interval J şi conţinînd toate polinoamele. Condiţia necesară şi suficientă ca funcţionala $R[f]$ avînd gradul de exactitate n, să fie de „formă simplă", adică de forma

$$R[f] = A\cdot[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+2}\,;f],$$

unde A este un număr independent de funcţia f, iar $\xi_1, \ldots, \xi_{n+2}$ sînt $n+2$ puncte distincte din interiorul intervalului J, este ca să aibă loc relaţia $R[f] \neq 0$ pentru orice funcţie f $(\in \mathcal{F})$ convexă de ordinul n în intervalul J.

Utilizînd această teoremă şi ţinînd seamă de cele stabilite anterior, referitor la funcţionala $R_{m,k}(x\,;f)$, rezultă că această funcţională va avea pentru orice $x \in (0, 1]$ forma

$$R_{m,k}(x\,;f) = A_{m,k}\cdot[\xi_{m,1}^{(k)}, \xi_{m,2}^{(k)}, \ldots, \xi_{m,k+3}^{(k)}\,;f], \tag{11}$$

unde constanta $A_{m,k}$ nu depinde de funcţia f, iar $\xi_{m,1}^{(k)}, \ldots, \xi_{m,k+3}^{(k)}$ sînt $k+3$ puncte distincte din intervalul $(0, 1)$.

Valoarea constantei $A_{m,k}$ se obţine îndată înlocuind în relaţia de mai sus pe f cu x^{k+1} şi ţinînd seamă de formula (8):

$$A_{m,k} = R_{m,k}(x\,;x^{k+2}) = \frac{x^{k+1}}{m}\left(\frac{k+2}{2} - x\right).$$

Înlocuind valoarea astfel obţinută a lui $K_{m,k}$ în (11), se obţine formula (6), valabilă pentru orice $x \in [0, 1]$. Se observă însă că această relaţie are loc şi pentru $x = 0$, întrucît pentru această valoare a lui x, ambii membri din (6) sînt nuli.

Observaţie. Pentru $k = 0$, formula (2) nu are sens. În acest caz, în locul polinoamelor (2) trebuie considerate polinoamele (1), care reprezintă polinoamele obişnuite ale lui S.N. Bernstein. Vom utiliza pentru aceste polinoame notaţia $B_m^{(0)}(x\,;f)$, subliniind astfel faptul că ele corespund valorii $k = 0$. După cum s-a arătat în lucrarea [1], oricare ar fi funcţia $F(x)$ continuă în intervalul $[0, 1]$, pentru ea au loc în intervalul $[0, 1]$ relaţiile

$$F(x) - B_m^{(0)}(x\,;F) = -\frac{x(1-x)}{m}\cdot[\xi_{m,1}, \xi_{m,2}, \xi_{m,3}\,;F] \quad (m = 1, 2, \ldots), \tag{12}$$

unde $\xi_{m,1}$, $\xi_{m,2}$, $\xi_{m,3}$ sînt valori din intervalul $(0, 1)$. Comparînd relaţia (12) cu relaţia (6) în care se presupune $k \geq 1$, se constată că polinoamele $B_m^{(k)}(x\,;f)$ $(k \geq 1)$ aproximează funcţia $f(x)$ în vecinătatea originii mai bine decît polinoamele obişnuite ale lui S. N. Bernstein, $B_m^{(0)}(x\,;f)$. Se mai observă că în vecinătatea originii, ordinul de aproximaţie creşte odată cu numărul k.

TEOREMA 2*. *Dacă funcţia $f(x)$ aparţine clasei $C^k[0, 1]$, indiferent dacă verifică sau nu vreo relaţie de convexitate, pentru ea au loc relaţiile*

$$\frac{d^i f(x)}{dx^i} - \frac{d^i}{dx^i} B_m^{(k)}(x ; f) = -\frac{x^{k-i+1}}{m}\left(\frac{k-i+2}{2} - x\right) \times$$

$$\times \left[\xi_{m,1}^{(k,i)}, \xi_{m,2}^{(k,i)}, \ldots, \xi_{m,k-i+3}^{(k,i)} ; \frac{d^i f(x)}{dx^i}\right] \quad (m = 1, 2, \ldots), \tag{13}$$

unde $\xi_{m,1}^{(k,i)}, \xi_{m,2}^{(k,i)}, \ldots, \xi_{m,k-i+3}^{(k,i)}$ *sînt valori din intervalul* $(0, 1)$. *Aceste relaţii sînt valabile oricare ar fi* $x \in [0, 1]$ *şi oricare ar fi* $i = 1, 2, \ldots, k$.

Demonstraţia acestei teoreme se face cu uşurinţă observînd că oricare ar fi $i = 1, 2, \ldots, k$, are loc identitatea

$$\frac{d}{dx^i} B_m^{(k)}(x ; f) = f^{(i)}(0) + \frac{x}{1!} f^{(i+1)}(0) + \cdots + \frac{x^{k-i-1}}{(k-i-1)!} f^{(k-1)}(0) +$$

$$+ \int_0^x \frac{(x-s)^{k-i-1}}{(k-i-1)!} B_m^{(0)}\left(s ; \frac{d^k f}{ds^k}\right) ds = B_m^{(k-i)}(x ; F), \tag{14}$$

unde s-a notat $F(x) = \frac{d^i f(x)}{dx^i}$.

Presupunînd întîi că numărul natural i satisface inegalitatea $i < k$, putem înlocui în enunţul teoremei 2 pe $f(x)$ cu $F(x)$, iar în locul numărului k să considerăm numărul $k-i$ $(k-i \geq 1)$. Obţinem astfel afirmaţia teoremei 2* pentru cazul considerat.

În cazul $i = k$ se ţine seamă de relaţiile (12).

TEOREMA 3. *Dacă funcţia $f(x)$ aparţine clasei $C^k[0, 1]$, indiferent dacă verifică sau nu vreo relaţie de convexitate, pentru ea au loc în intervalul* $[0, 1]$ *egalităţile*

$$B_{m+1}^{(k)}(x ; f) - B_m^{(k)}(x ; f) = -\frac{x^{k+1}}{m(m+1)}\left(\frac{k+2}{2} - x\right) \cdot [\xi_{m,1}^{(k)}, \xi_{m,2}^{(k)}, \ldots, \xi_{m,k+3}^{(k)} ; f]$$

$$(m = 1, 2, \ldots). \tag{15}$$

Demonstraţia acestei teoreme de face considerînd funcţionala liniară

$$\overline{R}_{m,k}(x ; f) = B_{m+1}^{(k)}(x ; f) - B_m^{(k)}(x ; f)$$

şi procedînd apoi ca şi în cazul teoremei 2.

TEOREMA 3*. *In ipotezele teoremei 3, oricare ar fi* $i = 1, 2, \ldots, k$, *au loc în intervalul* $[0, 1]$ *relaţiile*

$$\frac{d^i}{dx^i} B_{m+1}^{(k)}(x ; f) - \frac{d^i}{dx^i} B_m^{(k)}(x ; f) =$$

$$= -\frac{x^{k-i+1}}{m(m+1)}\left(\frac{k-i+2}{2} - x\right)\left[\xi_{m,1}^{(k,i)}, \ldots, \xi_{m,k-i+3}^{(k,i)} ; \frac{d^i f(x)}{dx^i}\right],$$

$$(m = 1, 2, \ldots), \tag{16}$$

unde $\xi_{m,1}^{(k,i)}, \xi_{m,2}^{(k,i)}, \ldots, \xi_{m,k-i+3}^{(k,i)}$ *sînt valori din intervalul* $(0, 1)$.

Demonstraţie. Această teoremă se obţine din teorema 3, la fel după cum teorema 2* s-a obţinut din teorema 2. În cazul $i = k$, se ţine seamă şi de următoarea proprietate [1] :

Oricare ar fi funcţia $F(x)$ continuă în intervalul $[0, 1]$, pentru ea au loc in intervalul $[0, 1]$ relaţiile

$$B_{m+1}^{(0)}(x ; f) - B_m^{(0)}(x ; f) = -\frac{x(1-x)}{m(m+1)} [\xi_{m,1}, \xi_{m,2}, \xi_{m,3}, ; f]$$

$$(m = 1, 2, \ldots). \tag{17}$$

3. Pentru funcţii de mai multe variabile independente se pot de asemenea obţine polinoame de interpolare de tipul celor considerate anterior. Pentru a nu complica expunerea, ne vom mărgini la cazul funcţiilor de două variabile independente. Extinderea rezultatelor pe care le expunem în această lucrare, la funcţii de mai multe variabile independente, nu prezintă nici o dificultate.

Fie deci $f(x, y)$ o funcţie definită în domeniul D precizat de inegalităţile

$$D: \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$$

şi fie

$$B_{m,n}(x, y ; f) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} C_m^i\, C_n^j\, x^i (1-x)^{m-i} y^j (1-y)^{n-j} f\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{n}\right) \tag{18}$$

polinomul obişnuit a lui S. N. Bernstein, corespunzător funcţiei $f(x, y)$ şi domeniului D considerat.

Fie de asemenea k şi l două numere naturale, alese arbitrar, pe care însă le vom presupune fixate în cele ce urmează.

Vom presupune că funcţia $f(x, y)$ admite în domeniul D derivate parţiale de ordinul $k + l$, continue.

Considerînd pentru moment pe y fixat iar pe x variabil, $f(x, y)$ apare o funcţie de o singură variabilă independentă x. Construind polinomul $B_m^{(k)}$ corespunzător acestei funcţii, conform formulei (4), obţinem următoarea formulă aproximativă :

$$f(x, y) \approx \sum_{p=0}^{k-1} \frac{x^p}{p!} \frac{\partial^p f(0, y)}{\partial x^p} + \sum_{i=0}^{m} \varphi_{i,m,k}(x) \frac{\partial^k f\left(\frac{i}{m}, y\right)}{\partial x^k} \tag{19}$$

unde $\varphi_{i,m,k}(x)$ reprezintă polinoamele (3).

Considerînd membrul al doilea al formulei (19) ca o sumă de funcţii de variabila y şi scriind în locul acestor funcţii, polinoamele $B_n^{(l)}$ corespunzătoare (relativ la variabila y), obţinem formula

$$f(x, y) \approx \sum_{p=0}^{k-1} \frac{x^p}{p!} \left\{ \sum_{r=0}^{l-1} \frac{y^r}{r!} \frac{\partial^{p+r} f(0, 0)}{\partial x^p \partial y^r} + \sum_{j=0}^{n} \varphi_{j,n,l}(y) \frac{\partial^{p+l} f\left(0, \frac{j}{n}\right)}{\partial x^p \partial y^l} \right\} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{m} \varphi_{i,m,k}(x) \left\{ \sum_{r=0}^{l-1} \frac{y^r}{r!} \frac{\partial^{k+r} f\left(\frac{i}{m}, 0\right)}{\partial x^k \partial y^r} + \sum_{j=0}^{n} \varphi_{j,n,l}(y) \frac{\partial^{k+l} f\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{n}\right)}{\partial x^k \partial y^l} \right\}. \tag{20}$$

Membrul al doilea al acestei formule este un polinom în variabilele x şi y, de gradul $m+k$ în raport cu x şi de gradul $n+l$ în raport cu y. Il vom nota în cele ce urmează cu $B_{m,n}^{(k,l)}(x, y; f)$. Avem deci

$$B_{m,n}^{(k,l)}(x, y; f) = \sum_{p=0}^{k-1} \sum_{r=0}^{l-1} \frac{x^p y^r}{p!\, r!} \frac{\partial^{p+r} f(0, 0)}{\partial x^p \partial y^r} + \sum_{r=0}^{l-1} \frac{y^r}{r!} \sum_{i=0}^{m} \varphi_{i,m,k}(x) \frac{\partial^{k+r} f\left(\frac{i}{m}, 0\right)}{\partial x^k \partial y^r} +$$

$$+ \sum_{p=0}^{k-1} \frac{x^p}{p!} \sum_{j=0}^{n} \varphi_{j,n,l}(y) \frac{\partial^{p+l} f\left(0, \frac{j}{n}\right)}{\partial x^p \partial y^l} + \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \varphi_{i,m,k}(x) \varphi_{j,n,l}(y) \frac{\partial^{k+l} f\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{n}\right)}{\partial x^k \partial y^l}. \tag{21}$$

În cele ce urmează, vom demonstra pentru aceste polinoame teoreme analoage teoremelor 1, 2, 2*, 3, 3* stabilite anterior.

TEOREMA 4. *Dacă funcţia $f(x, y)$ admite în domeniul D derivate parţiale de ordinul $k+l$, continue, atunci are loc în domeniul D evaluarea*

$$f(x, y) - B_{m,n}^{(k,l)}(x, y; f) = -\frac{x^{k+1}}{m}\left(\frac{k+2}{2} - x\right) \cdot [\xi_1, \ldots, \xi_{k+3}; f(x, y)]_x -$$

$$- \frac{y^{l+1}}{n}\left(\frac{l+2}{2} - y\right) \left\{ \frac{x^k}{k!} \left[\eta_1, \ldots, \eta_{l+3}; \frac{\partial^k f(\xi, y)}{\partial x^k}\right]_y + \right.$$

$$\left. + \sum_{p=0}^{k-1} \frac{x^p}{p!} \left[\eta_1, \ldots, \eta_{l+3}; \frac{\partial^p f(0, y)}{\partial x^p}\right]_y \right\}, \tag{22}$$

unde $\xi, \xi_1, \ldots, \xi_{k+3}$ şi $\eta_1, \ldots, \eta_{l+3}$ reprezintă valori din intervalele $0 < x < 1$, respectiv $0 < y < 1$. [3]

[3]) Notaţia $[\xi_1, \ldots, \xi_{k+3}; f(x, y)]_x$ reprezintă diferenţa divizată parţială a funcţiei $f(x, y)$ în raport cu variabila x, pe nodurile $\xi_1, \ldots, \xi_{k+3}$.

Demonstraţie. Să considerăm expresia care figurează în membrul drept al relaţiei (19). Ea reprezintă polinomul $B_m^{(k)}[x; F(x)]$ corespunzător funcţiei de o singură variabilă independentă $F(x) = f(x, y)$, y fiind considerat parametru. În cele ce urmează, vom nota acest polinom cu simbolul $B_{m,\cdot}^{(k,\cdot)}[x, y; f(x, y)]$. Ţinînd seamă de (3), putem scrie următoarea formulă analoagă cu formula (4) :

$$B_{m,\cdot}^{(k,\cdot)}[x, y; f(x, y)] = \sum_{p=0}^{k-1} \frac{x^p}{p!} \frac{\partial^p f(0, y)}{\partial x^p} + \sum_{i=0}^{m} \varphi_{i,m,k}(x) \frac{\partial^k f\left(\frac{i}{m}, y\right)}{\partial x^k}. \tag{23}$$

În mod analog definim

$$B_{\cdot,n}^{(\cdot,l)}[x, y; f(x, y)] = \sum_{r=0}^{l-1} \frac{y^r}{r!} \frac{\partial^r f(x, 0)}{\partial y^r} + \sum_{j=0}^{n} \varphi_{j,n,l}(y) \frac{\partial^l f\left(x, \frac{j}{n}\right)}{\partial y^l}. \tag{24}$$

Cu aceste notaţii, să considerăm identitatea

$$f(x, y) - B_{m,n}^{(k,l)}(x, y; f) = \{f(x, y) - B_{m,\cdot}^{(k,\cdot)}[x, y; f(x, y)]\} +$$

$$+ \{B_{m,\cdot}^{(k,\cdot)}[x, y; f(x, y)] - B_{m,n}^{(k,l)}[x, y; f(x, y)]\}. \tag{25}$$

Primul termen al acestei identităţi se poate scrie în baza formulei (6) sub forma

$$f(x, y) - B_{m,\cdot}^{(k,\cdot)}[x, y; f(x, y)] =$$

$$= -\frac{x^{k+1}}{m}\left(\frac{k+2}{2} - x\right) \cdot [\xi_{m,1}^{(k)}, \ldots, \xi_{m,k+3}^{(k)}; f(x, y)]_x, \tag{26}$$

unde prin $[\xi_{m,1}^{(k)}, \ldots, \xi_{m,k+3}^{(k)}; f(x, y)]_x$ s-a notat diferenţa divizată parţială a funcţiei $f(x, y)$, relativ la variabila x, pe nodurile $\xi_{m,1}^{(k)}, \ldots, \xi_{m,k+3}^{(k)}$. Aceste noduri depind de variabilele x şi y şi sînt situate în intervalul $0 < x < 1$.

Pentru a evalua cel de al doilea termen care figurează în membrul drept al identităţii (25), ne folosim de expresia (20) a polinomului $B_{m,n}^{(k,l)}[x, y; f(x, y)]$, care ne conduce la identitatea

$$B_{m,n}^{(k,l)}[x, y; f(x, y)] = B_{\cdot,n}^{(\cdot,l)}\{x, y; B_{m,\cdot}^{(k,\cdot)}[x, y; f(x, y)]\}. \tag{27}$$

Utilizînd această identitate, observăm că termenul al doilea din membrul drept al identităţii (25) reprezintă aproximaţia dată de polinomul $B_{\cdot,n}^{(\cdot,l)}$ corespunzător funcţiei $B_{m,\cdot}^{(k,\cdot)}[x, y; f(x, y)]$, referitor la variabila y. În baza teoremei 2 (formula (6)) putem scrie

$$B_{m,\cdot}^{(k,\cdot)}[x, y; f(x, y)] - B_{m,n}^{(k,l)}[x, y; f(x, y)] =$$

$$= B_{m,\cdot}^{(k,\cdot)}[x, y; f(x, y)] - B_{\cdot,n}^{(\cdot,l)}\{x, y; B_{m,\cdot}^{(k,\cdot)}[x, y; f(x, y)]\} =$$

$$= -\frac{y^{l+1}}{n}\left(\frac{l+2}{2} - y\right) D(x, y), \tag{28}$$

unde $D(x, y)$ are expresia

$$D(x, y) = [\eta_{n,1}^{(k,l)}(x), \eta_{n,2}^{(k,l)}(x), \ldots, \eta_{n,l+3}^{(k,l)}(x) ; B_{m,\cdot}^{(k,\cdot)}(x, y ; f(x, y))]_y \qquad (29)$$

şi reprezintă diferenţa divizată parţială a funcţiei $B_{m,\cdot}^{(k,\cdot)}[x, y ; f(x, y)]$ în raport cu variabila y pe nodurile $\eta_{n,1}^{(k,l)}(x), \ldots, \eta_{n,l+3}^{(k,l)}(x)$. Aceste noduri depind de variabilele x şi y şi aparţin intervalului $0 < y < 1$.

Fie în continuare $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_{l+3})$ un sistem de $l+3$ noduri distincte din intervalul $0 < y < 1$. Să considerăm următoarea expresie

$$E[\mathbf{a} ; f(x, y)] = [\mathbf{a} ; B_{m,\cdot}^{(k,\cdot)}(x, y ; f(x, y))]_y, \qquad (30)$$

reprezentînd diferenţa divizată parţială a funcţiei $B_{m,\cdot}^{(k,\cdot)}(x, y ; f(x, y))$ în raport cu variabila y, pe sistemul de noduri $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_{l+3})$. Aceste noduri le considerăm ca parametrii independenţi de variabilele x şi y.

Întrucît cei doi operatori (diferenţa divizată şi operatorul $B_{m,\cdot}^{(k,\cdot)}$) care se aplică funcţiei $f(x, y)$ în formula (30) sînt liniari şi întrucît aceşti operatori se referă la variabile independente, putem să-i permutăm şi astfel obţinem egalitatea

$$E[\mathbf{a} ; f(x, y)] = B_m^{(k)}(x ; [\mathbf{a} ; f(x, y)]_y),$$

unde $B_m^{(k)}$ reprezintă operatorul definit de formula (2). Utilizînd această formulă, obţinem

$$E[\mathbf{a} ; f(x, y)] = [\mathbf{a} ; f(0, y)]_y + \frac{x}{1!}\left[\mathbf{a} ; \frac{\partial f(0, y)}{\partial x}\right]_y + \cdots + \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\left[\mathbf{a} ; \frac{\partial^{k-1} f(0, y)}{\partial x^{k-1}}\right]_y +$$

$$+ \int_0^x \frac{(x-s)^{k-1}}{(k-1)!} B_m\left(s ; \left[\mathbf{a} ; \frac{\partial^k f(s, y)}{\partial s^k}\right]_y\right) ds. \qquad (31)$$

Aplicînd integralei formula a doua de medie, obţinem relaţia

$$\int_0^x \frac{(x-s)^{k-1}}{(k-1)!} B_m\left(s ; \left[\mathbf{a} ; \frac{\partial^k f(s, y)}{\partial s^k}\right]_y\right) ds = \frac{x^k}{k!} B_m\left(\bar{s} ; \left[\mathbf{a} ; \frac{\partial^k f(s, y)}{\partial s^k}\right]_y\right), \qquad (32)$$

unde $\bar{s} \in (0, x)$ şi deci $\bar{s} \in (0, 1)$. Apoi, ţinînd seamă de formula (1) precum şi de identitatea

$$\sum_{i=0}^{m} C_m^i x^i (1 - x)^{m-i} \equiv 1,$$

se observă că $B_m\left(\bar{s} ; \left[\mathbf{a} ; \frac{\partial^k f(s, y)}{\partial s^k}\right]_y\right)$ din (32) reprezintă o medie a valorilor funcţiei $F(x) = \left[\mathbf{a} ; \frac{\partial^k f(x, y)}{\partial x^k}\right]_y$ de o singură variabilă independentă x, în intervalul $0 \leq x \leq 1$. Ţinînd seamă de această observaţie, în baza continuităţii funcţiei $\frac{\partial^k f(x, y)}{\partial x^k}$ în domeniul D, vom putea scrie următoarea formulă de medie

$$B_m\left(\bar{s} ; \left[\mathbf{a} ; \frac{\partial^k f(s, y)}{\partial s^k}\right]_y\right) = \left[\mathbf{a} ; \frac{\partial^k f(\bar{\bar{s}}, y)}{\partial x^k}\right]_y,$$

unde $\bar{\bar{s}} \in (0, 1)$. Astfel pentru integrala din (31) se obţine formula de medie

$$\int_0^x \frac{(x-s)^{k-1}}{(k-1)!} B_m\left\{s ; \left[\mathbf{a} ; \frac{\partial^k f(s, y)}{\partial s^k}\right]_y\right\} ds = \frac{x^k}{k!}\left[\mathbf{a} ; \frac{\partial^k f(\bar{\bar{s}}, y)}{\partial x^k}\right]_y, \qquad (33)$$

iar relaţia (31) se transcrie

$$E[\mathbf{a} ; f(x, y)] = \left\{\sum_{p=0}^{k-1} \frac{x^p}{p!}\left[\mathbf{a} ; \frac{\partial^p f(0, y)}{\partial x^p}\right]_y\right\} + \frac{x^k}{k!}\left[\mathbf{a} ; \frac{\partial^k f(\bar{\bar{s}}, y)}{\partial x^k}\right]_y. \qquad (34)$$

Revenind la expresia lui $D(x, y)$ din (29), observăm că ea se poate obţine din (30) efectuînd înlocuirile $a_1 = \eta_{n,1}^{(k,l)}(x), \ldots, a_{l+3} = \eta_{n,l+3}^{(k,l)}(x)$

$$D(x, y) = E[\mathbf{a} ; f(x, y)]\big|_{a_i = \eta_{n,i}^{(k,l)}(x),\ (i = 1, 2, \ldots, l+3)} \qquad (35)$$

Înlocuind această expresie a lui $D(x, y)$ în (28) şi ţinînd seamă de relaţia (34), se obţine o evaluare a diferenţei ce figurează în primul membru al relaţiei (28). Utilizînd această evaluare, precum şi evaluarea (26), se obţine din (25) relaţia (22), ceea ce demonstrează teorema în cauză.

Observaţii. 1°. Dacă funcţia $f(x, y)$ admite derivate parţiale de ordin suficient de înalt, atunci formula (22) devine

$$f(x, y) - B_{m,n}^{(k,l)}(x, y ; f) = -\frac{x^{k+1}}{m(k+2)!}\left(\frac{k+2}{2} - x\right)\frac{\partial^{k+2} f(\xi, y)}{\partial x^{k+2}} -$$

$$-\frac{y^{l+1}}{n(l+2)!}\left(\frac{l+2}{2} - y\right)\left\{\frac{x^k}{k!}\frac{\partial^{k+l+2} f(\bar{\xi}, \bar{\eta})}{\partial x^k \partial y^{l+2}} + \sum_{p=0}^{k-1}\frac{x^p}{p!}\frac{\partial^{l+p+2} f(0, \eta_p)}{\partial x^p \partial y^{l+2}}\right\}, \qquad (36)$$

unde ξ, $\bar{\xi}$ şi η_p, $\bar{\eta}$ $(p = 0, \ldots, k-1)$ sînt valori din intervalele $0 < x < 1$, respectiv $0 < y < 1$.

2°. În vederea evaluării restului $f(x, y) - B_{m,n}^{(k,l)}(x, y ; f)$, s-a utilizat în prezentarea anterioară reprezentarea

$$B_{m,n}^{(k,l)}(x, y ; f) = B_{\cdot,n}^{(\cdot,l)}\{x, y ; B_{m,\cdot}^{(k,\cdot)}[x, y ; f(x, y)]\}, \qquad (27)$$

care de altfel ne-a condus la formula (21). Ţinînd seamă de forma simetrică pe care o are expresia (21) a polinomului $B_{m,n}^{(k,l)}(x, y ; f)$, se constată cu uşurinţă că acelaşi polinom $B_{m,n}^{(k,l)}(x, y ; f)$ admite, în afară de reprezentarea (27), şi reprezentarea

$$B_{m,n}^{(k,l)}(x, y ; f) \equiv B_{m,\cdot}^{(k,\cdot)}\{x, y ; B_{\cdot,n}^{(\cdot,l)}[x, y ; f(x, y)]\} \qquad (27')$$

Utilizînd această nouă reprezentare și făcînd un raționament analog cu acela din demonstrația teoremei 4, se obține pentru restul $f(x, y) - B_{m,n}^{(k,l)}(x, y; f)$ următoarea expresie, analoagă expresiei (22):

$$f(x, y) - B_{m,n}^{(k,l)}(x, y; f) = -\frac{y^{l+1}}{n}\left(\frac{l+2}{2} - y\right)[\eta_1, \ldots, \eta_{l+3}; f(x, y)]_y -$$
$$-\frac{x^{k+1}}{n}\left(\frac{k+2}{2} - x\right)\left\{\frac{y^l}{l!}\left[\xi_1, \ldots, \xi_{k+3}; \frac{\partial^l f(x, \bar{y})}{\partial y^l}\right]_x + \right.$$
$$\left. + \sum_{r=0}^{l-1} \frac{y^r}{r!}\left[\xi_1, \ldots, \xi_{k+3}; \frac{\partial^r f(x, 0)}{\partial y^r}\right]_x\right\}, \tag{37}$$

unde $\xi_1, \ldots, \xi_{k+3}$ și $\bar{y}, \eta_1, \ldots, \eta_{l+3}$ reprezintă valori din intervalele $0 < x < 1$, respectiv $0 < y < 1$.

Dacă $f(x, y)$ admite derivate parțiale de ordin suficient de înalt, atunci această formulă devine

$$f(x, y) - B_{m,n}^{(k,l)}(x, y; f) = -\frac{y^{l+1}}{n\,(l+2)!}\left(\frac{l+2}{2} - y\right)\frac{\partial^{l+2} f(x, \eta)}{\partial y^{l+2}} -$$
$$-\frac{x^{k+1}}{n\,(k+2)!}\left(\frac{k+2}{2} - x\right)\left\{\frac{y^l}{l!}\frac{\partial^{l+k+2} f(\bar{\xi}, \bar{\eta})}{\partial x^{k+2}\,\partial y^l} + \sum_{r=0}^{l-1}\frac{y^r}{r!}\frac{\partial^{k+r+2} f(\xi_r, 0)}{\partial x^{k+2}\,\partial y^r}\right\}, \tag{38}$$

unde $\bar{\xi}, \xi_r$ $(r = 0, 1, \ldots, l-1)$ și $\eta, \bar{\eta}$ sînt valori din intervalele $0 < x < 1$, respectiv $0 < y < 1$.

3°. În cazul special $k = 0$, $l = 0$ trebuie considerat în locul polinomului $B_{m,n}^{(k,l)}(x, y; f)$ din (21), polinomul $B_{m,n}(x, y; f)$ din (18). În acest caz, în ipoteza continuității funcției $f(x, y)$ în domeniul D se obține formula

$$f(x, y) - B_{m,n}(x, y; f) = -\frac{x(1-x)}{m}[\xi_1, \xi_2, \xi_3; f(x, y)]_x -$$
$$-\frac{y(1-y)}{n}[\eta_1, \eta_2, \eta_3; f(\bar{x}, y)]_y, \tag{39}$$

unde ξ_i și η_i sînt valori din intervalele $0 < x < 1$, respectiv $0 < y < 1$.

În adevăr, utilizînd notațiile

$$B_{m,\cdot}^{(0,\cdot)}[x, y; f(x, y)] = \sum_{i=0}^{m} C_m^i\, x^i (1-x)^{m-i} f\left(\frac{i}{m}, y\right), \tag{40}$$

$$B_{\cdot,n}^{(\cdot,0)}[x, y; f(x, y)] = \sum_{j=0}^{n} C_n^j y^j (1-y)^{n-j} f\left(x, \frac{j}{n}\right), \tag{41}$$

putem scrie

$$B_{m,n}(x, y) \equiv B_{\cdot,n}^{(\cdot,0)}\{x, y; B_{m,\cdot}^{(0,\cdot)}[x, y; f(x, y)]\}$$

și deci

$$f(x, y) - B_{m,n}(x, y; f) \equiv \{f(x, y) - B_{m,\cdot}^{(0,\cdot)}[x, y; f(x, y)]\} +$$
$$+ \{B_{m,\cdot}^{(0,\cdot)}[x, y; f(x, y)] - B_{\cdot,n}^{(\cdot,0}[x, y; B_{m,\cdot}^{(0,\cdot)}(x, y; f)]\}. \tag{42}$$

Primul termen al acestei identități se scrie în baza formulei (12) sub forma

$$f(x, y) - B_{m,\cdot}^{(0,\cdot)}[x, y; f(x, y) = -\frac{x(1-x)}{m}[\xi_{m,1}, \xi_{m,2}, \xi_{m,3}; f]_x,$$

unde $\xi_{m,1}, \xi_{m,2}, \xi_{m,3}$ reprezintă valori din intervalul $0 < x < 1$. Al doilea termen al identității (42) reprezintă aproximația dată de polinomul $B_{\cdot,n}^{(\cdot,0)}$ corespunzător funcției $B_{m,\cdot}^{(0,\cdot)}[x, y; f(x, y)]$, referitor la variabila y. În baza formulei (12), acest termen se poate scrie sub forma $-\frac{y(y-1)}{n}D(x,y)$, unde

$$D(x, y) = [\eta_{n,1}, \eta_{n,2}, \eta_{n,3}; B_{m,\cdot}^{(0,\cdot)}(x, y; f(x, y))]_y \tag{43}$$

reprezintă diferența divizată parțială a funcției $B_{m,\cdot}^{(0,\cdot)}[x, y; f(x, y)]$ în raport cu variabila y pe nodurile $\eta_{n,1}, \eta_{n,2}, \eta_{n,3}$. Aceste noduri depind de variabilele x și y și aparțin intervalului $0 < y < 1$. Din formula (43) se obține îndată evaluarea:

$$D(x, y) = B_m(x; [a_1, a_2, a_3; f(x, y)]_y)\big|_{a_1=\eta_{n,1},\, a_2=\eta_{n,2},\, a_3=\eta_{n,3}} \tag{44}$$

Se știe însă că dacă $F(x)$ este o funcție continuă în intervalul $[0, 1]$, atunci are loc formula de medie

$$B_m(x; F) = F(\xi), \quad \xi \in (0, 1).$$

Considerînd în această formulă $F(x) = [a_1, a_2, a_3; f(x, y)]_y$ și ținînd seamă de continuitatea funcției $f(x, y)$ în raport cu variabila x, obținem din (44) evaluarea

$$D(x, y) = [a_1, a_2, a_3; f(\xi, y)]_y\big|_{a_1=\eta_{n,1}, \ldots, a_3=\eta_{n,3}}$$

De aici și din (42) rezultă în definitiv formula (39).

O formulă asemănătoare cu formula (39) a fost recent obținută printr-o altă metodă de către D. D. Stancu.

TEOREMA 4*. *În ipotezele teoremei 4, oricare ar fi numerele naturale α și β satisfăcînd inegalitățile $0 \leq \alpha \leq k$, $0 \leq \beta \leq l$, au loc evaluările*

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta} f(x, y)}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} - \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} B_{m,n}^{(k,l)}[x, y; f(x, y)] =$$
$$= -\frac{x^{k-\alpha+1}}{m}\left(\frac{k-\alpha+2}{2} - x\right)\left[\xi_1^{(\alpha,\beta)}, \ldots, \xi_{k-\alpha+3}^{(\alpha,\beta)}; \frac{\partial^{\alpha+\beta} f(x, y)}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}\right]_x -$$
$$-\frac{y^{l-\beta+1}}{n}\left(\frac{l-\beta+2}{2} - y\right)\left\{\frac{x^{k-\alpha}}{(k-\alpha)!}\left[\eta_1^{(\alpha,\beta)}, \ldots, \eta_{l-\beta+3}^{(\alpha,\beta)}; \frac{\partial^{k+\beta} f(\bar{x}, y)}{\partial x^k \partial y^\beta}\right]_y + \right.$$
$$\left. + \sum_{p=0}^{k-\alpha-1}\frac{x^p}{p!}\left[\eta_1^{(\alpha,\beta)}, \ldots, \eta_{l-\beta+3}^{(\alpha,\beta)}; \frac{\partial^{\alpha+\beta+p} f(0, y)}{\partial x^{\alpha+p} \partial y^\beta}\right]_y\right\}. \tag{45}$$

Toate diferențele divizate care intervin în această formulă sînt luate pe noduri din intervalele $0 < x < 1$, respectiv $0 < y < 1$.

Această teoremă rezultă din teorema anterioară, observînd că are loc identitatea

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^{\alpha}\partial y^{\beta}} B^{(k,l)}_{m,n}\,[x,y\,;f(x,y)] \equiv B^{(k-\alpha,\,l-\beta)}_{m,\,n}\Big[x,y\,;\frac{\partial^{\alpha+\beta}f(x,y)}{\partial x^{\alpha}\partial y^{\beta}}\Big], \tag{46}$$

care de altfel se stabilește ușor, folosind identitatea (14) precum și identitatea (27).

Se pot face și aici observații analoage cu observațiile 1^0 și 2^0 de la teorema 4.

TEOREMA 5. *Oricare ar fi funcția $f(x, y)$ admițînd în domeniul D derivate parțiale de ordinul $k + l$, continue, au loc relațiile*

$$B^{(k,l)}_{m+1,n+1}\,[x,y\,;f(x,y)] - B^{(k,l)}_{m,n}\,[x,y\,;f(x,y)] =$$

$$= -\frac{x^{k+1}}{m(m+1)}\Big(\frac{k+2}{2}-x\Big)\Big\{\frac{y^l}{l\,!}\Big[\xi_1,\ldots,\xi_{k+3}\,;\frac{\partial^l f(x,\eta)}{\partial y^l}\Big]_x +$$

$$+\sum_{r=0}^{l-1}\frac{y^r}{r\,!}\Big[\xi_1,\ldots,\xi_{k+3}\,;\frac{\partial^r f(x,0)}{\partial y^r}\Big]_x\Big\} -$$

$$-\frac{y^{l+1}}{n(n+1)}\Big(\frac{l+2}{2}-y\Big)\Big\{\frac{x^k}{k\,!}\Big[\eta_1,\ldots,\eta_{l+3}\,;\frac{\partial^k f(\xi,y)}{\partial x^k}\Big]_y +$$

$$+\sum_{p=0}^{k-1}\frac{x^p}{p!}\Big[\eta_1,\ldots,\eta_{l+3}\,;\frac{\partial^p f(0,y)}{\partial x^p}\Big]_y\Big\}, \tag{47}$$

unde ξ și ξ_i $(i = 1, 2, \ldots, k + 3)$ sînt valori din intervalul $0 < x < 1$, iar η și η_j $(j = 1, 2, \ldots, l + 3)$ sînt valori din intervalul $0 < y < 1$.

Demonstrație. Vom arăta întîi că are loc evaluarea

$$\Delta_{\cdot,n} = B^{(k,l)}_{m,n+1}\,[x,y\,;f(x,y)] - B^{(k,l)}_{m,n}\,[x,y\,;f(x,y)] =$$

$$= -\frac{y^{l+1}}{n(n+1)}\Big(\frac{l+2}{2}-y\Big)\Big\{\frac{x^k}{k\,!}\Big[\eta_1,\ldots,\eta_{l+3}\,;\frac{\partial^k f(\xi,y)}{\partial x^k}\Big]_y +$$

$$+\sum_{p=0}^{k-1}\frac{x^p}{p!}\Big[\eta_1,\ldots,\eta_{l+3}\,;\frac{\partial^p f(0,y)}{\partial x^p}\Big]_y\Big\}, \tag{48}$$

unde ξ și $\eta_1,\ldots,\eta_{l+3}$ sînt valori din intervalele $0 < x < 1$, respectiv $0 < y < 1$.

În adevăr, putem scrie

$$\Delta_{\cdot,n} = B^{(\cdot,l)}_{\cdot,n}\{B^{(k,\cdot)}_{m,\cdot}[x,y\,;f(x,y)]\} - B^{(\cdot,l)}_{\cdot,n}\{B^{(k,\cdot)}_{m,\cdot}[x,y\,;f(x,y)]\}.$$

n+1

Aplicînd teorema 3, obținem evaluarea

$$\Delta_{\cdot,n} = -\frac{y^{l+1}}{n(n+1)}\Big(\frac{l+2}{2}-y\Big)[\eta_1,\ldots,\eta_{l+3};B^{(k,\cdot)}_{m,\cdot}(x,y\,;f(x,y))]_y,$$

unde nodurile $\eta_1,\ldots,\eta_{l+3}$ depind de variabilele x și y și sînt situate în intervalul $0 < y < 1$. Procedînd în continuare întocmai ca la evaluarea expresiei $D(x, y)$ din (29), obținem pentru $\Delta_{\cdot,n}$ evaluarea (48).

În mod analog se obține evaluarea

$$\Delta_{m,\cdot} = B^{(k,l)}_{m+1,n}\,[x,y\,;f(x,y)] - B^{(k,l)}_{m,n}\,[x,y\,;f(x,y)] =$$

$$= -\frac{x^{k+1}}{m(m+1)}\Big(\frac{k+2}{2}-x\Big)\Big\{\frac{y^l}{l\,!}\Big[\xi_1,\ldots,\xi_{k+3}\,;\frac{\partial^l f(x,\eta)}{\partial y^l}\Big]_x +$$

$$+\sum_{r=0}^{l-1}\frac{y^r}{r\,!}\Big[\xi_1,\ldots,\xi_{k+3}\,;\frac{\partial^r f(x,0)}{\partial y^r}\Big]_x\Big\}, \tag{49}$$

unde η și $\xi_1,\ldots,\xi_{k+3}$ aparțin intervalelor $0 < y < 1$, respectiv $0 < x < 1$.

Revenind la demonstrația teoremei 5, ne folosim de identitatea

$$B^{(k,l)}_{m+1,n+1} - B^{(k,l)}_{m,n} \equiv [B^{(k,l)}_{m+1,n+1} - B^{(k,l)}_{m,n+1}] + [B^{(k,l)}_{m,n+1} - B^{(k,l)}_{m,n}].$$

Evaluînd cei doi termeni care apar astfel, conform formulelor (48) și (49), obținem relația (47).

TEOREMA 5*. *În ipotezele teoremei 5, oricare ar fi numerele naturale α și β satisfăcînd inegalitățile $0 \leq \alpha \leq k$, $0 \leq \beta \leq l$, au loc evaluări de forma*

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^{\alpha}\,\partial y^{\beta}} B^{(k,l)}_{m,n+1}\,[x,y\,;f(x,y)] - \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^{\alpha}\,\partial y^{\beta}} B^{(k,l)}_{m,n}\,[x,y : f(x,y)] =$$

$$= -\frac{y^{l-\beta+1}}{n(n+1)}\Big(\frac{l-\beta+2}{2}-y\Big)\Big\{\frac{x^{k-\alpha}}{(k-\alpha)!}\Big[\eta_1,\ldots,\eta_{l-\beta+3}\,;\frac{\partial^{k+\beta} f(\xi,y)}{\partial x^k\,\partial y^{\beta}}\Big]_y +$$

$$+\sum_{p=0}^{k-\alpha-1}\frac{x^p}{p!}\Big[\eta_1,\ldots,\eta_{l-\beta+3}\,;\frac{\partial^{\alpha+\beta+p} f(0,y)}{\partial x^{\alpha+p}\,\partial y^{\beta}}\Big]_y\Big\}, \tag{50}$$

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^{\alpha}\,\partial y^{\beta}} B^{(k,l)}_{m+1,n}\,[x,y\,;f(x,y)] - \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^{\alpha}\,\partial y^{\beta}} B^{(k,l)}_{m,n}\,[x,y\,;f(x,y)] =$$

$$= -\frac{x^{k-\alpha+1}}{m(m+1)}\Big(\frac{k-\alpha+2}{2}-x\Big)\Big\{\frac{y^{l-\beta}}{(l-\beta)\,!}\Big[\xi_1,\ldots,\xi_{k-\alpha+3}\,;\frac{\partial^{l+\alpha} f(x,\eta)}{\partial x^{\alpha}\,\partial y^{l}}\Big]_x +$$

$$+\sum_{r=0}^{l-\beta-1}\frac{y^r}{r\,!}\Big[\xi_1,\ldots,\xi_{k-\alpha+3};\frac{\partial^{\alpha+\beta+r} f(x,0)}{\partial x^{\alpha}\,\partial y^{\beta+r}}\Big]_x\Big\}, \tag{51}$$

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^{\alpha}\,\partial y^{\beta}}\,B_{m+1,\,n+1}^{(k,\,l)}[x,\,y\,;\,f(x,\,y)]-\frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^{\alpha}\,\partial y^{\beta}}\,B_{m,\,n}^{(k,\,l)}[x,\,y\,;\,f(x,\,y)]=$$

$$=-\frac{x^{k-\alpha+1}}{m(m+1)}\left(\frac{k-\alpha+2}{2}-x\right)\left\{\frac{y^{l-\beta}}{(l-\beta)\,!}\left[\xi_1,\,\ldots,\,\xi_{k-\alpha+3}\,;\,\frac{\partial^{\alpha+l}f(x,\,\eta)}{\partial x^{\alpha}\,\partial y^{l}}\right]_x+\right.$$

$$\left.+\sum_{r=0}^{l-\beta-1}\frac{y^{r}}{r\,!}\left[\xi_1,\,\ldots,\,\xi_{k-\alpha+3}\,;\,\frac{\partial^{\alpha+\beta+r}f(x,\,0)}{\partial x^{\alpha}\,\partial y^{\beta+r}}\right]_x\right\}-$$

$$-\frac{y^{l-\beta+1}}{n(n+1)}\left(\frac{l-\beta+2}{2}-y\right)\left\{\frac{x^{k-\alpha}}{(k-\alpha)!}\left[\eta_1,\,\ldots,\,\eta_{l-\beta+3}\,;\,\frac{\partial^{k+\beta}f(\xi,\,y)}{\partial x^{k}\,\partial y^{\beta}}\right]_y+\right.$$

$$\left.+\sum_{p=0}^{k-\alpha-1}\frac{x^{p}}{p\,!}\left[\eta_1,\,\ldots,\,\eta_{l-\beta+3}\,;\,\frac{\partial^{\alpha+\beta+p}f(0,\,y)}{\partial x^{\alpha+p}\,\partial y^{\beta}}\right]_y\right\}. \tag{52}$$

Afirmaţia acestei teoreme rezultă îndată din teorema 5 dacă se ţine seamă de identitatea (46).

TEOREMA 6. *Dacă în domeniul* $D\,\{0\leq x\leq 1,\ y\leq 0\leq 1\}$ *funcţiile*

$$f(x,\,0),\quad \frac{\partial f(x,\,0)}{\partial y},\ \ldots,\ \frac{\partial^{l-1}f(x,\,0)}{\partial y^{l-1}},\quad \frac{\partial^{l}f(x,\,y)}{\partial y^{l}} \tag{53}$$

sînt convexe (*respectiv neconcave*) *de ordinul* $k+1$ *în raport cu variabila* x, *atunci şirul dublu* $\{B_{m,\,n}^{(k,\,l)}(x,y\,;f)\}_{\substack{m=1,\,2,\,\ldots\\ n=1,\,2,\,\ldots}}$ *este descrescător* (*respectiv necrescător*) *în raport cu indicele* m, *în domeniul* $D^{*}\{0<x<1,\ \ 0<y<1\}$, *adică*

$$B_{m+1,\,n}^{(k,\,l)}(x,y\,;f)-B_{m,\,n}^{(k,\,l)}(x,\,y\,;\,f)<0,\quad (x,y)\in D^{*}. \tag{54}$$

O proprietate analoagă are loc şi relativ la indicele n, *în ipoteza că în domeniul* D *sînt convexe* (*respectiv neconcave*) *de ordinul* $l+1$ *în raport cu variabila* y *următoarele funcţii* :

$$f(0,\,y),\quad \frac{\partial f(0,\,y)}{\partial x},\ \ldots,\ \frac{\partial^{k-1}f(0,\,y)}{\partial x^{k-1}},\quad \frac{\partial^{k}f(x,\,y)}{\partial x^{k}}. \tag{55}$$

Afirmaţiile acestei teoreme rezultă îndată din formulele (49) şi (48).

Observaţie. În cazul cînd unul dintre numerele k sau l este nul, sau cînd amîndouă sînt nule, formula (21) nu mai are sens. De exemplu, dacă $k=l=0$, în locul polinoamelor (21) trebuie considerate polinoamele (18). Cu aceasta convenţie teorema 6 rămîne adevărată şi în acest caz.

TEOREMA 6*. *Fie* α *şi* β *numere naturale satisfăcînd inegalităţile* $0\leq\alpha\leq k$, $0\leq\beta\leq l$. *Dacă în domeniul* $D\{0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1\}$ *funcţiile*

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta}f(x,\,0)}{\partial x^{\alpha}\,\partial y^{\beta}},\quad \frac{\partial^{\alpha+\beta+1}f(x,\,0)}{\partial x^{\alpha}\,\partial y^{\beta+1}},\ \ldots,\ \frac{\partial^{\alpha+l-1}f(x,\,0)}{\partial x^{\alpha}\,\partial y^{l-1}},\quad \frac{\partial^{\alpha+l}f(x,\,y)}{\partial x^{\alpha}\,\partial y^{l}} \tag{56}$$

sînt convexe (*respectiv neconcave*) *de ordinul* $k-\alpha+1$ *în raport cu variabila* x, *atunci şirul dublu* $\left\{\frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^{\alpha}\,\partial y^{\beta}}\,B_{m,\,n}^{(k,\,l)}(x,\,y\,;\,f)\right\}_{m,\,n=1,\,2,\,\ldots}$ *este descrescător* (*respectiv necrescător*) *în raport cu indicele* m *în domeniul* $D^{*}\{0<x<1,0<y<1\}$.

O proprietate analoagă are loc şi relativ la indicele n, *în ipoteza că în domeniul* D *sînt convexe* (*respectiv neconcave*) *de ordinul* $l-\beta+1$ *în raport cu variabila* y, *următoarele funcţii*

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta}f(0,\,y)}{\partial x^{\alpha}\,\partial y^{\beta}},\quad \frac{\partial^{\alpha+\beta+1}f(0,\,y)}{\partial x^{\alpha+1}\,\partial y^{\beta}},\ \ldots,\ \frac{\partial^{k+\beta-1}f(0,\,y)}{\partial x^{k-1}\,\partial y^{\beta}},\quad \frac{\partial^{k+\beta}f(x,\,y)}{\partial x^{k}\,\partial y^{\beta}}. \tag{57}$$

Afirmaţiile acestei teoreme rezultă îndată din formulele (51) şi (50).

О НЕКОТОРЫХ ПОЛИНОМАХ ТИПА БЕРНШТЕЙНА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящем труде рассматриваются полиномы $B_m^{(k)}(x;f)$ заданные формулами (2), (3), (4) для функций $f(x)$, принадлежащих классу $C^k[0,1]$ (т. е. для функций, допускающих на интервале [0,1] непрерывные производные порядка k). Устанавливаются следующие теоремы:

ТЕОРЕМА. 1. *Если функция* $\frac{d^kf(x)}{dx^k}$ *на интервале* [0,1] *является выпуклой, соответственно невогнутой первого порядка* (*т. е. если любая разделённая разнсть на трех различных узлах интервала* [0,1] *является соответственно* >0, ≥ 0), *то при любом* $i=0,\,1,\,\ldots,\,k$, *последовательность полиномов* (5), *соответствующая функции* $f(x)$ *и интервалу* [0,1] *является убывающей, соответственно невозрастающей для любого* $x\in(0,1)$.

ТЕОРЕМЫ 2 и 2*. *Если функция* $f(x)$ *принадлежит классу* $C^k[0,1]$, *несмотря на то, верно ли для неё какое-нибудь соотношение выпуклости, или нет, то для неё имеют место соотношения вида* (13) *для любого натурального числа* $i=0,\,1,\,\ldots,\,k$ *и для любого* $x\in[0,1]$. *В этих соотлюбого натурального числа* $i=0,\,1,\,\ldots,\,k$. *В этих соотношениях ношениях* $\xi_{m,\,1}^{(k,\,i)},\ \xi_{m,\,2}^{(k,\,i)},\ \xi_{m,\,k-i+3}^{(k,\,i)}$, *суть значения из интервала* [0,1].

ТЕОРЕМЫ 3 и 3*. *Если функция* $f(x)$ *принадлежит классу* $C^k[0,1]$, *то для неё на интервале* [0,1] *имеют место соотношения вида* (15), *для* $\xi_{m\,1}^{(k,\,i)},\ldots,\xi_{m,\,k-i+3}^{(k,\,i)}$ *являются значениями из интервала* [0,1].

Вышеуказанные результаты распространяются и на функции от двух независимых переменных, вводя полиномы (21), относящиеся к функциям $f(x,y)$, допоскающим частные производные порядка $k+l$, непрерывные в области $D\{0\leq x\leq 1,\,0\leq y\leq 1\}$. Для этих полиновом доказываются теоремы аналогичные теоремам 1, 2, 2*, 3, 3*.

Полиномы (2) и (21) введены с целью некоторых применений в приближенном интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными.

SUR QUELQUES POLYNOMES DU TYPE BERNSTEIN

RÉSUMÉ

Dans ce travail on considère les polynomes $B_m^{(k)}(x\,;f)$ définis par les formules (2), (3), (4) pour des fonctions $f(x)$ qui appartiennent à la classe $C^k[0, 1]$ (c'est-à-dire pour des fonctions qui admettent dans l'intervalle $[0,1]$ des dérivées continues d'ordre k). On établit les théorèmes suivants:

THÉORÈME 1. *Si la fonction* $\frac{d^k f(x)}{dx^k}$ *est, dans l'intervalle* $[0, 1]$ *convexe respectivement non concave du premier ordre (c'est-à-dire si n'importe quelle différence divisée sur trois noeuds distincts de l'intervalle* $[0, 1]$ *est respectivement* >0, ≥ 0), *alors, quel que soit* $i = 0, 1, \ldots, k$, *la suite de polynome* (5) *correspondant à la fonction* $f(x)$ *et à l'intervalle* $[0,1]$ *est décroissante, respectivement non croissante pour tout* $x \in (0, 1)$.

THÉORÈMES 2 et 2*. *Si la fonction* $f(x)$ *appartient à la classe* $C^k[0, 1]$, *indifféremment si elle vérifie ou non une relation de convexité, pour elle ont lieu des relations de la forme* (13), *quel que soit le nombre naturel* $i = 0, 1, \ldots, k$ *et quel que soit* $x \in [0, 1]$. *Dans ces relations* $\xi_{m,1}^{(k,i)}, \xi_{m,2}^{(k,i)}, \ldots, \xi_{m,k-i+3}^{(k,i)}$ *représentent des valeurs de l'intervalle* $(0,1)$.

THÉORÈMES 3 et 3*. *Si la fonction* $f(x)$ *appartient à la classe* $C^k[0, 1]$, *pour elle ont lieu dans l'intervalle* $[0, 1]$ *les relations de la forme* (15), *quel que soit le nombre naturel* $i=0, 1, \ldots, k$. *Dans ces relations* $\xi_{m,1}^{(k,i)}, \ldots, \xi_{m,k-i+3}^{(k,i)}$ *représentent des valeurs de l'intervalle* $(0, 1)$.

Les résultats ci-dessus s'étendent à des fonctions de deux variables indépendantes, en introduisant les polynomes (21) relatifs à des fonctions $f(x, y)$ qui admettent des dérivées partielles d'ordre $k + l$, continues dans le domaine $D\{0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$. Pour ces polynomes on démontre des théorèmes analogues aux théorèmes 1, 2, 2*, 3, 3* énoncés plus haut.

Les polynomes (2) et (21) ont été introduits en vue de certaines applications qu'ils ont dans l'intégration approximative des équations différentielles ordinaires et des équations aux dérivées partielles.

BIBLIOGRAFIE

1. Aramă O., *Proprietăţi privind monotonia şirului polinoamelor de interpolare ale lui S. N. Bernstein şi aplicarea lor la studiul aproximării funcţiilor*. Studii şi cercetări de matematică (Cluj), **VIII**, 195–210 (1957).
2. Арамэ О., *Относительно свойств монотонности последовательности интерполяционных многочленов С. Н. Бернштейна и их применения к исследованию приближения функций.* Mathematica, **2** (25), 25–40 (1960).
3. Butzer P. L., *Linear Combinations of Bernstein Polynomials*. Canad. J. Math., **5**, 559–567 (1953).

4. — *On two-dimensional Bernstein Polynomials*. Canad. J. Math., **5**, nr. 1, 107–113 (1953).
5. Ипатов А. Ф., *Оценка погрешности и порядок приближения функций двух переменных, полиномами С. Н. Бернштейна.* Уч. Зап. Петрозаводского Ун-та, **4**, *4*, 31—48 (1955).
6. — *Некоторые теоремы сходимости полиномов* $B_{n,m}(f; x,y)$ *скелетов* $f(r,s) \in S$ *и дифференцированных полиномов.* Уч. Зап. Петрозаводского Ун-та, **4**, *4*, 49–58 (1955).
7. Kingsely E. H., *Bernstein Polynomials for Fonctions of two Variables of Class* $C^{(k)}$. Proc. Amer. Math. Soc., **2**, *1*, 64–71 (1951).
8. Lorentz G. G., *Bernstein Polynomials*. Toronto, 1953.
9. Moldovan E., *Asupra unei modificări a procedeului de interpolare a lui S. N. Bernstein.* Studii şi cercetări ştiinţifice, Acad. R.P.R. – Filiala Cluj, **III**, *3–4*, 18–22 (1952).
10. Popoviciu T., *Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre seupérieur*. Mathematica, Cluj, **10**, 49–54 (1935).
11. — *Despre cea mai bună aproximaţie a funcţiilor continue prin polinoame*. Cluj, 1937.
12. — *Asupra restului în unele formule liniare de aproximare ale analizei*. Studii şi cercetări de matematică (Cluj), **X**, 337–389 (1959).
13. — *Sur le rest dans certaines formules linéaires d'approximation de l'analyse*. Mathematica, **1** (24), 95–142 (1959).
14. — *Diférences divisées et derivées*. Mathematica, **1** (24), 297–319 (1959).
15. — *Diferenţe divizate şi derivate*. Studii şi cercetări de matematică (Cluj), **XI**, 119–145 (1960).
16. Schoenberg I. J., *On Variation diminishing Approximation Methods*. On numerical approximation. Proceedings of a Symposium, Madison, April 21–23, 1958, pp. 249–274. Publication No. 1 of the Mathematics Research Center, U.S. Army, the University of Wisconsin. The University of Wisconsin Press, Madison, 1959.
17. Stancu D. D., *Asupra aproximării prin polinoame de tip Bernstein a funcţiilor de două variabile*. Comunicările Acad. R.P.R., **9**, *8*, 773–777 (1959).
18. — *Asupra aproximării funcţiilor de două variabile prin polinoame de tip Bernstein. Câteva evaluări asimptotice*. Studii şi cercetări de matematică (Cluj), **XI**, 171–175 (1960).
19. — *Sur l'approximation des derivées des fonctions par les derivées correspondantes de certains polynomes du type Bernstein*. Mathematica, **2** (25), 335–348 (1960).
20. Wigert S., *Sur l'approximation par polynomes des fonctions continues*. Arkiv för Mat. Astr. Fys., **22**, *9*, 1–4 (1932).

Primit la 3. VII. 1961.