

NOI METODE GRAFICE-ANALITICE INTERESÎND TEORIA MECANISMELOR ȘI A MAȘINILOR *)

DE

C. DRĂGAN, N. IRIMICIUC și D. MANGERON

(Iași)

Lucrare prezentată la Colocviul de analiză numerică din 8-13 decembrie 1960, Cluj.

INTRODUCERE

Analiza profundă a rezultatelor obținute și a căilor de dezvoltare ulterioară a teoriei mecanismelor și a mașinilor, cuprinsă în hotărârile plenarei de închidere a celei de a doua Conferințe Unionale asupra problemelor fundamentale de teoria mașinilor și a mecanismelor [22, 57, 45], precum și un vast șir de lucrări de sinteză științifică, inaugurat printr-o serie de lucrări datorite acad. I. I. A r t o b o l e v s k i [1, 5, 11, 13, 12/4, 56, 42] relativ la stadiul actual și la tendințele de creștere în adâncime și în suprafață a acestei discipline fundamentale în rezolvarea cu succes a ansamblului de probleme legate de automatizarea proceselor de producție, au scos în evidență existența unui număr de metode unitare de studiu a mecanismelor și mașinilor care fac uz din ce în ce mai sistematic de puternice aparate matematice de investigație științifică.

Printre atare metode trebuie citată în primul rând metoda calculului virial, care, pornind de la clasicele rezultate ale lui A. P. K o t e l n i k o v [26], folosite și amplificate apoi de E. S t u d y [54], se dezvoltă multilateral în cadrul mării școli sovietice de teoria mașinilor și a mecanismelor [9, 8, 5]. Astăzi, teoria și practica calculului virial, cunoscut uneori și ca metoda numerelor duale, face parte dintr-un ansamblu de probleme și mai vast, pe care l-am numit metoda corpurilor numerice hipercomplexe [40, 41, 5].

Ținându-se seama de o vastă gamă de criterii, începînd cu acel al transcripției schemelor matematice corespunzătoare cu un număr cât se poate mai mic de simboluri și terminînd cu acel al capacității de utilizare nemijlocită

*) Această lucrare se publică și în limba rusă în revista „Mathematica”, vol. 4 (27), fasc. 1 (1962).

în diferite procese de programare în vederea folosirii mașinilor matematice (electronice) de calcul, s-a impus din ce în ce mai mult în ultimii ani, în cadrul metodelor generale de algebră liniară, și metoda matricială [48, 53, 23, 7] sau metoda matricială-tensorială [43, 30, 44]¹⁾.

În afară de folosirea puternicelor aparate matematice de investigație științifică ce nu s-au utilizat până acum²⁾ sau nu s-au utilizat decît sporadic în studiile relative la teoria mecanismelor și a mașinilor, au căpătat o dezvoltare remarcabilă unele metode de rezolvare a problemelor de analiza și sinteza mecanismelor, caracterizate printr-o îmbinare a procedeele clasice de analiză matematică cu o gamă bogată de procedee geometrice. Aici se situează în primul rînd cele două metode elaborate la Iași în anii din urmă, numite *metoda accelerațiilor reduse* și *metoda coordonatelor vectoriale cilindrice*.

Prima parte a acestei lucrări este consacrată îndeosebi expunerii unor probleme legate de metoda accelerațiilor spațiale reduse, întrucît metoda accelerațiilor plane reduse, elaborată pentru studiul mecanismelor plane ceva mai înainte și caracterizată de prof. dr. N. I. L e v i t s k i — în darea sa de seamă asupra lucrărilor secției de analiza și sinteza mecanismelor din cadrul celei de a doua Conferințe Unionale deja menționate — ca fiind „interesantă nu numai prin aceea că ea reduce esențial într-o serie de cazuri volumul construcțiilor geometrice, ci și prin faptul că folosirea acestei metode deschide căi noi de sinteză a mecanismelor ...” [28], a fost expusă îndeajuns de amplu [34] și a și fost folosită de o serie de cercetători din țară și de peste hotare [35, 39, 14, 61, 46, 55].

Partea a doua a lucrării este consacrată expunerii rezultatelor esențiale din noua metodă elaborată și mai recent, numită „metoda coordonatelor vectoriale cilindrice”. Simplificările ce le aduce într-un vast șir de probleme privitoare la dinamica, cinematica și statica grafică, precum și atenția acordată primelor lucrări publicate în domeniu [15, 16] de către revistele de bibliografie matematică și mecanică cu caracter internațional [25, 29], îndreptățesc prevederile asupra lărgirii treptate a aplicațiilor și a acestei metode în domeniul teoriei mecanismelor și a mașinilor.

Partea întâia

METODA ACCELERAȚIILOR SPAȚIALE REDUSE

1. Teoreme fundamentale

În una din lucrările sale astăzi clasice [27] relativă la o serie de probleme de dinamică grafică a sistemelor materiale în mișcare paralelă cu un plan fix, A. P. K o t e l n i k o v a introdus noțiunea ce s-a arătat a fi fecundă

¹⁾ Menționăm că în cadrul și pe baza acestei din urmă metode, dezvoltată sistematic la Iași, au apărut cu totul recent o serie de lucrări datorite cercetătorilor din alte țări [3, 24].

²⁾ În ordinea de extindere a folosirii în domeniul teoriei mecanismelor și a mașinilor a aparatelor de investigație matematice din ce în ce mai puternice, menționăm aici vastul memoriu datorit prof. dr. J. O d e r f e l d, expus cu totul recent la ședința plenară de deschidere a celei de a treia Conferințe generale poloneze de teoria mașinilor și a mecanismelor (Rogów, iunie 1961) [50].

de *cruce de vectori*. A. P. Kotelnikov definește o cruce de vectori ca fiind un ansamblu de vectori legați ce-și au originile lor situate pe o dreaptă, iar extermitățile pe o altă dreaptă perpendiculară pe prima. Dreapta loc a originilor ansamblului de vectori considerați se numește dreapta inițială a crucii de vectori, pe cînd dreapta loc a extermităților lor se numește dreapta finală a crucii.

În câteva note anterioare redactate în colaborare și bazate pe teoria accelerațiilor plane reduse de ordin oarecare, definite prin

$$\vec{a}_{Mr}^{(n)} = \frac{\vec{a}_M^{(n)}}{A_n}, \quad \vec{a}_{Mr}^{(1)} = \frac{\vec{a}_M^{(1)}}{A_1} \equiv \frac{\vec{a}_M}{A_1} = \frac{\vec{r}_M}{A_1}, \quad (1.1)$$

în care

$$A_{n+1} = \frac{dA_n}{dt} + \dot{\theta} B_n, \quad B_{n+1} = \frac{dB_n}{dt} - \dot{\theta} A_n, \quad (1.2)$$

$$A_1 = \dot{\theta}^2, \quad B_1 = \ddot{\theta}, \quad \left(\dot{\quad} \equiv \frac{d}{dt} \right), \quad (n = 1, 2, \dots)$$

și $\theta = \theta(t)$ este unghiul de rotire ce intervine în problema mișcării paralele cu un plan fix a solidelor rigide, s-a studiat problema cîmpurilor de accelerații și s-au făcut un șir de aplicații sistematice a rezultatelor obținute la studiul mișcărilor mecanismelor plane și a grupelor lui Assur cele mai generale [31, 33].

Ni s-a părut util, mărginindu-ne aici la spațiul euclidian E_3 , să introducem noțiunea de accelerație redusă spațială de ordin oarecare, de prima specie, cristalizată în următoarea definiție

$$\vec{a}_{Mr}^{(n)} = \frac{\vec{a}_M^{(n)}}{A_n - A_n(u)}, \quad \vec{a}_{Mr}^{(1)} = \frac{\vec{a}_M^{(1)}}{A_1 - A_1(u)} \equiv \frac{\vec{a}_M}{A_1 - A_1(u)} = \frac{\vec{r}_M}{A_1 - A_1(u)}, \quad (1.3)$$

în care

$$A_{n+1} = \frac{dA_n}{dt} + \vec{\omega} \cdot \vec{B}_n, \quad \vec{B}_{n+1} = \frac{d\vec{B}_n}{dt} - \vec{\omega} \cdot A_n, \quad u^2 = 1, \quad (1.4)$$

$$A_1 = \vec{\omega} \cdot \vec{\omega}, \quad \vec{B}_1 = \vec{\omega}, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

și $A_n(u)$ se obțin din A_n printr-un fel de „polarizare în raport cu u ”, și anume

$$\begin{aligned} A_1(u) &= (\vec{\omega} \cdot u)(\vec{\omega} \cdot u) && \text{pentru } A_1 = (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) \\ A_2(u) &= 3(\vec{\omega} \cdot u)(\vec{\omega} \cdot u) && \text{pentru } A_2 = 3(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) \\ A_3(u) &= 4(\vec{\omega} \cdot u)(\vec{\omega} \cdot u) + 3(\vec{\omega} \cdot u)(\vec{\omega} \cdot u) - && A_3 = 4(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) + 3(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) - \\ & - (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})(\vec{\omega} \cdot u)(\vec{\omega} \cdot u) && \text{pentru } - (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) \text{ etc.}^3) \end{aligned} \quad (1.5)$$

³⁾ Într-o notă redactată de unul dintre autorii prezentei lucrări în colaborare cu acad. D. S. T a v h e l i d z e [36] s-a introdus, în legătură cu diferite varietăți liniare dintr-un E_n , noțiunea de accelerație spațială redusă de ordin oarecare de specii superioare lui 1. Șirul de teoreme corespunzînd varietăților liniare cu două dimensiuni (plane) pentru un E_3 conduce, în această ordine de idei, la elaborarea unor noi procedee grafice-analitice de construcție a cîmpurilor de accelerații.

Problema de distribuție a accelerațiilor de ordin oarecare ale punctelor solidelor rigide în mișcare spațială compusă, avînd la bază — în cadrul mișcării paralele cu un plan fix — formulele generalizate ale lui S o m o v [38] și prezentînd de pe acum o vastă gamă de aplicații aflate în neîncetată adîncire și lărgire [37], își găsește soluție în metoda spațială a accelerațiilor reduse de ordin oarecare de prima specie, după cum rezultă din șirul de teoreme ce urmează.

TEOREMA 1 (relativă la distribuția accelerațiilor spațiale de specia întâia de ordin oarecare). *Locul geometric al extremităților accelerațiilor reduse de ordin n , determinat prin ecuația vectorială*

$$\vec{r}_{M_n} = \vec{r}_M + \vec{a}_{M_n}^{(n)}, \quad (1.6)$$

în care punctul M parcurge o dreaptă (D)

$$\vec{r}_M = \vec{r}_0 + \mu \vec{u}, \quad \vec{u} = 1, \quad (1.7)$$

ce aparține unui solid rigid în mișcare spațială generală, (μ este un parametru și \vec{u} este versorul dreptei (D) , \vec{r}_0 este raza vectorială a punctului $O' \in (D)$ și $\vec{a}_{M_n}^{(n)}$ este definit prin relațiile (1.3) — (1.5), este o dreaptă (D_n) , perpendiculară pe prima.

TEOREMA 2 (relativă la cruci generalizate în sensul lui A. P. Kotelnikov). *Accelerațiile reduse de ordin n ale punctelor M situate pe o dreaptă ce aparține unui solid rigid în mișcare spațială generală aparțin unei cruci a lui Kotelnikov.*

TEOREMA 3 (de izogonalitate). *Complexul pătratic \mathcal{E}_n^2 de drepte (D_{M_n}) , ce aparțin unui solid rigid în mișcare generală spațială, definit prin ecuația*

$$A_n(\vec{u}) = 0, \quad (1.8)$$

în care \vec{u} este versorul dreptei (D_{M_n}) , iar $A_n(\vec{u})$ se definesc prin (1.4) — (1.5), se bucură de proprietatea că locul geometric al extremităților accelerațiilor reduse de specia întâia ale punctelor M_n este un alt complex pătratic \mathcal{E}_n^{2*} de drepte $(D_{M_n}^*)$, asociate dreptelor (D_{M_n}) , avînd loc proprietatea de izogonalitate în sensul că $(D_{M_n}^*)$ și (D_{M_n}) formează între ele un unghi γ_n independent de \vec{u} .

TEOREMA 4 (de extremum relativă la accelerații spațiale reduse de ordin oarecare de prima specie). *Accelerațiile spațiale reduse de ordin oarecare de prima specie, definite prin (1.3), (1.5), se bucură de o proprietate extremală.*

Această concluzie decurge, de exemplu, din următoarea teoremă, în a cărei demonstrație s-a folosit metoda calculului virial menționată în introducerea.

TEOREMA 5 (de distribuție a accelerațiilor spațiale de ordin oarecare). *Locul geometric al punctelor M_n^* determinat prin ecuația vectorială*

$$\vec{r}_{M_n^*} = \vec{r}_M + \lambda_n^* \vec{a}_M^{(n)}, \quad \vec{a}_M^{(n)} = \frac{d^{n-1} \vec{a}_M}{dt^{n-1}} = \frac{d^{n-1} \vec{r}_M}{dt^{n-1}}, \quad (1.9)$$

în care dreapta (D^*)

$$\vec{r}_M = \vec{r}_0 + \mu^* \vec{u}, \quad \vec{u} = 1, \quad (1.10)$$

aparține unui solid rigid în mișcare spațială generală λ_n^* , μ^* sînt parametri, este o dreaptă (D_n^*) . Unghiul complex între (D^*) și (D_n^*) este $\alpha_n = \theta_n + w d_n$, $w^2 = 0$ (ca urmare a corpului numeric folosit, această formă se numește uneori duală), θ_n fiind unghiul obișnuit între vectorii unitari ai axelor dreptelor considerate, iar d_n este cea mai scurtă distanță între atare drepte, ce se exprimă prin funcție trigonometrică de unghiul complex după cum urmează:

$$\operatorname{tg} \alpha_n = \operatorname{tg} \theta_n + w d_n (1 + \operatorname{tg}^2 \theta_n), \quad (1.11)$$

$$\operatorname{tg} \theta_n = \frac{\sqrt{[\vec{u} + \lambda_n^* (\vec{\omega} \times \vec{u})]^2 - [1 - \lambda_n^* (A_n - A_n(\vec{u}))]^2}}{1 - \lambda_n^* (A_n - A_n(\vec{u}))}, \quad (1.12)$$

$$d_n = \frac{\lambda_n^* (\vec{a}_0 \cdot \vec{e})}{\sqrt{\vec{e} \cdot \vec{e}}}, \quad \vec{e} = \vec{\omega} - \vec{u} (\vec{\omega} \cdot \vec{u}), \quad (1.13)$$

$$\vec{a}_0^{(n)} = \frac{d^{n-1} \vec{a}_0}{dt^{n-1}} = \frac{d^{n-1} \vec{r}_0}{dt^{n-1}}$$

Proprietatea de extremum ce caracterizează accelerațiile spațiale reduse de prima specie se referă la funcția (1.12) și corespunde la valoarea parametrului λ_n^* dată prin

$$\lambda_n^* = \frac{1}{A_n - A_n(\vec{u})}. \quad (1.14)$$

Renunțînd aici la expunerea altor teoreme ce adîncesc studiul distribuțiilor accelerațiilor reduse de ordin oarecare de prima specie ale punctelor solidelor rigide în mișcare spațială generală, vom expune mai jos metoda accelerațiilor spațiale reduse, ilustrînd-o prin aplicarea nemijlocită la o serie de mecanisme spațiale de mare importanță în tehnica nouă.

2. Metoda accelerațiilor spațiale reduse de prima specie

Fie AB o dreaptă în mișcare spațială generală și A un punct al ei. Fie \vec{a}_{Ar} accelerația redusă a punctului A . Mișcarea organului purtător al dreptei AB poate fi considerată ca fiind compusă dintr-o mișcare de transport, care este o mișcare de translație, o dată cu punctul A , și o mișcare relativă de rotație în jurul unei axe ce trece prin A . Axa de rotație și dreapta AB definesc un plan Q . Mișcarea relativă de rotație cu viteza unghiulară $\vec{\omega}$ se poate la rândul ei considera ca fiind compusă dintr-o mișcare de rotație în jurul unei axe conținută în planul Q , perpendiculară pe AB , de viteză unghiulară $\omega_1 = \omega \sin \mu$ și dintr-o mișcare de rotație în jurul dreptei AB , de viteză unghiulară $\omega_2 = \omega \cos \mu$. Componenta tangențială a accelerației punctului B în mișcarea de rotație de viteză unghiulară $\vec{\omega}_1$ este nulă, iar componenta normală a acestei accelerații este $\vec{a}_{BA}^n = \vec{k} l_{AB} \omega_1^2$. Prin urmare accelerația normală redusă în raport cu ω_1^2 a punctului B este

$$\vec{a}_{BAr}^n = \vec{k} l_{AB} = \vec{a}_{BA}^n / \omega_1^2. \quad (1.15)$$

Vectorul accelerație unghiulară instantanee $\vec{\varepsilon}$, ce nu are în general vorbind același suport cu $\vec{\omega}$, se poate descompune în trei vectori astfel: vectorul $\vec{\varepsilon}_3$ să aibă ca suport dreapta AB , vectorul $\vec{\varepsilon}_1$ să fie coliniar cu $\vec{\omega}_1$ și vectorul $\vec{\varepsilon}_2$ să aibă ca suport o dreaptă perpendiculară pe AB și pe $\vec{\omega}_1(\vec{\varepsilon}_1)$. Alegînd trei versori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, legați de dreapta AB , se poate scrie $\vec{a}_{BA} = l_{AB} \vec{\varepsilon}_1 \vec{j}$, $\vec{a}_{BA} = l_{AB} \vec{\varepsilon}_2 \vec{i}$. Sumînd geometric acești vectori, se obține (fig. 1) $\vec{a}_{BA} = l_{AB} (\vec{\varepsilon}_1 \vec{j} + \vec{\varepsilon}_2 \vec{i})$, în care $\vec{\varepsilon}_1 \vec{j} + \vec{\varepsilon}_2 \vec{i}$ este tocmai vectorul $\vec{\varepsilon}$ rotit cu 90° în jurul dreptei AB . Prin urmare accelerația redusă tangențială a punctului B este

$$\vec{a}_{BAr}^t = l_{AB} \omega_1^{-2} (\vec{\varepsilon}_1 \vec{j} + \vec{\varepsilon}_2 \vec{i}), \quad (1.16)$$

suportul vectorului \vec{a}_{BAr}^t fiind dreapta $\alpha\alpha$ ce trece prin extremitatea vectorului \vec{a}_{Ar} și este perpendiculară pe dreapta AB . Dreapta $\alpha\alpha$ este deci locul geometric al extremității vectorilor \vec{a}_{Br} , atunci cînd punctul B descrie dreapta AB . Se observă că orientarea dreptei $\alpha\alpha$ depinde numai de orientarea, în planul P dus prin extremitatea vectorului \vec{a}_{Ar} , perpendicular pe dreapta AB , a unei drepte paralele cu $\vec{\varepsilon}$, ce reprezintă componenta accelerației unghiulare $\vec{\varepsilon}$ conținută într-un plan paralel cu P . În figura 1 s-a notat prin I punctul

de intersecție al planului P cu dreapta AB și prin IN perpendiculara comună între dreapta $\alpha\alpha$ și dreapta AB , care este paralelă cu suportul vectorului $\vec{\varepsilon}$. Segmentul AI reprezintă proiecția vectorului \vec{a}_{Ar} pe dreapta AB . Figura a fost executată considerînd scara accelerațiilor reduse egală cu cea a lungimilor.

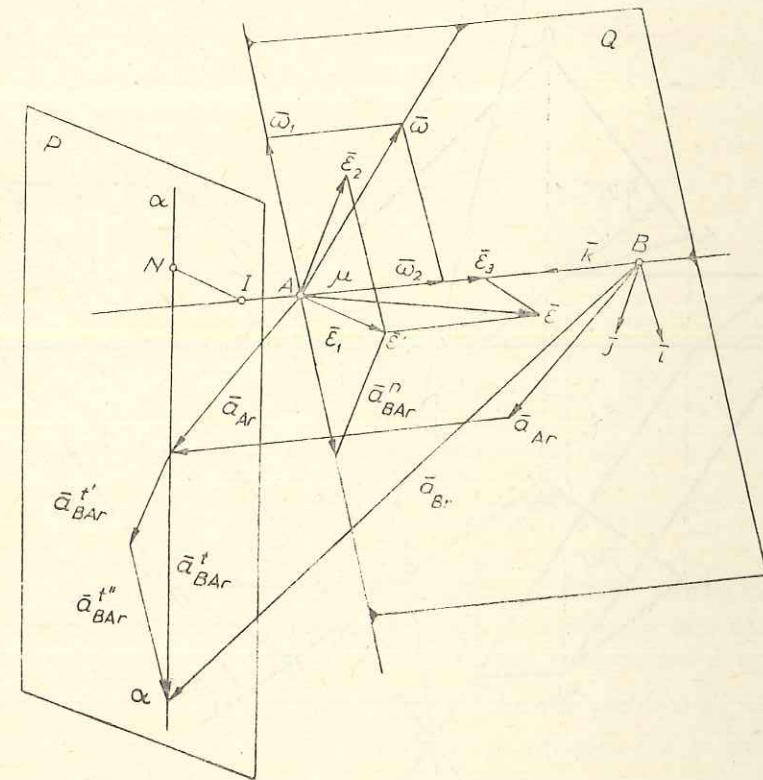


Fig. 1

Teorema expusă, punînd în evidență din punct de vedere geometric rolul factorului $[A_1 - A_1(u)]^{-1}$ ce intră în definiția (1.3) a accelerațiilor spațiale reduse de prima specie și de primul ordin, conduce la următoarea construcție a accelerației reduse a unui punct oarecare al unui organ aparținînd unui mecanism spațial, dacă se cunosc accelerațiile reduse a trei puncte ale aceluiași organ. Construcția de mai jos folosește, așa cum a făcut de exemplu S. I. Panteliev [51] cu ocazia studiului cinematic printr-o metodă grafică a mecanismelor spațiale cu trei organe, procedeele geometriei descriptive. Vectorii \vec{a}_A , \vec{a}_B și \vec{a}_C sînt accelerațiile cunoscute ale

punctelor A , B și C (fig. 2). Se reprezintă aceste puncte prin proiecțiile lor pe planul orizontal și cel vertical, notîndu-se cu y și y' linia de pămînt. Se mai reprezintă și punctul D a cărui accelerație redusă trebuie determinată. Se unește punctul D cu punctele A și B , obținîndu-se dreptele AD și BD , care se reprezintă în cele două plane de proiecție prin dreptele $A_h D_h$, $A_v D_v$,

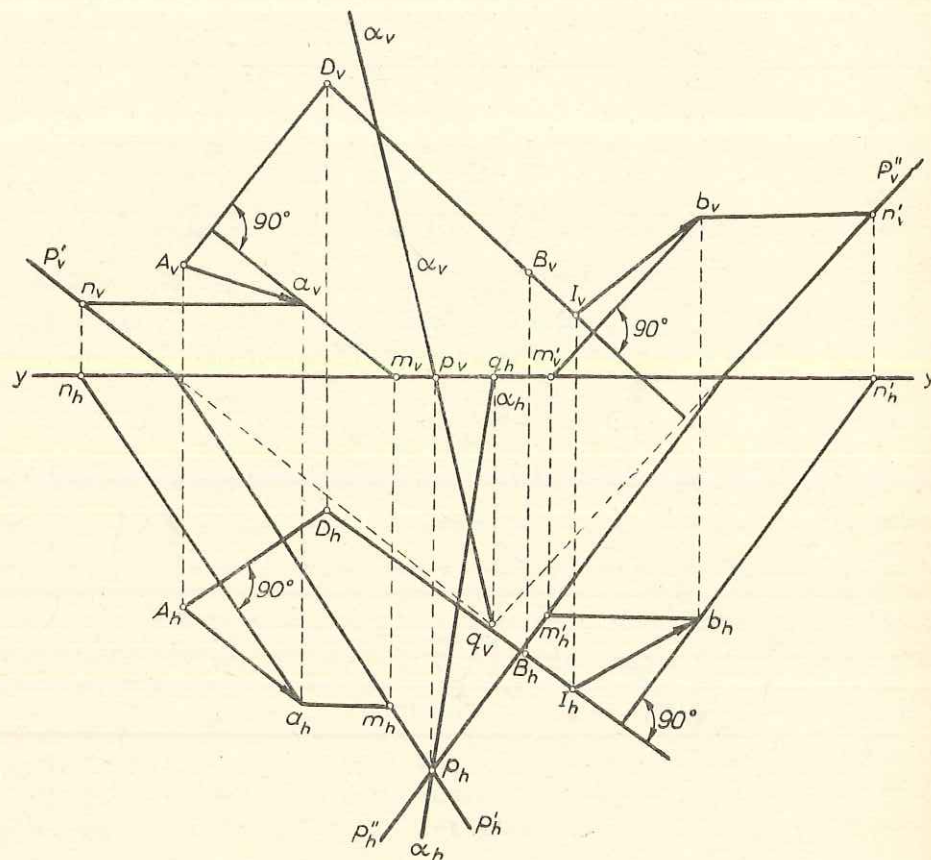


Fig. 2

$B_h D_h$, $B_v D_v$. Se presupune efectuat în prealabil studiul vitezelor, deci se cunoaște vectorul $\vec{\omega}$ ce reprezintă viteza unghiulară instantanee a organului considerat. Notîndu-se cu $\vec{\omega}_1$ componenta lui $\vec{\omega}$ conținută într-un plan perpendicular pe dreapta AB , se calculează mărimea vectorului $\vec{a}_{Ar} = \vec{a}_A / \omega_1^2$. Această mărime se reprezintă apoi prin proiecțiile $A_h a_h$, $A_v a_v$ pe cele două plane. Se determină planul P' perpendicular pe dreapta AD și care trece prin extremitatea a a vectorului \vec{a}_{Ar} . Construcția este arătată în figură, urmele

planului P' fiind P'_h, P'_v . Extremitatea vectorului $\vec{a}_{Dr} = \vec{a}_D \omega_1^{-2}$ este situată undeva în planul P' . Dacă se notează cu $\vec{\omega}'_1$ componenta vectorului $\vec{\omega}$ conținută într-un plan perpendicular pe dreapta DB , se calculează mărimile vectorilor $\vec{a}'_{Br} = \vec{a}_B \omega_1'^{-2}$ și $\vec{a}''_{Br} = \vec{a}_B \omega_1''^{-2}$. Se poate scrie apoi relația

$$\vec{a}'_{Dr} = \vec{a}_D \omega_1'^{-2} = \vec{a}_B \omega_1'^{-2} + \vec{a}''_{DB} \omega_1'^{-2} + \vec{a}'_{DB} \omega_1'^{-2} + \vec{a}''_{DB} \omega_1'^{-2}, \quad (1.17)$$

sau succesiv

$$\vec{a}'_{Dr} = \vec{a}'_{Br} + l_{DB} \vec{k} + l_{DB} \varepsilon_1 \omega_1'^{-2} \vec{j} + l_{DB} \varepsilon_2 \omega_1'^{-2} \vec{i}, \quad (1.18)$$

$$\vec{a}'_{Dr} = \vec{a}_{Br} + l_{DB} \vec{k} + l_{DB} \omega_1'^{-2} (\varepsilon_1 \vec{j} + \varepsilon_2 \vec{i}). \quad (1.19)$$

Înmulțind relația (1.17) prin raportul cunoscut $k_1^2 = \omega_1'^2 / \omega_1^2$, se obține

$$\vec{a}_{Dr} = \vec{a}_D \omega_1^{-2} = \vec{a}_B \omega_1^{-2} + l_{DB} k_1^2 \vec{k} + l_{DB} \omega_1^{-2} (\varepsilon_1 \vec{j} + \varepsilon_2 \vec{i}), \quad (1.20)$$

sau

$$\vec{a}_{Dr} = \vec{a}_{Br} + l_{DB} k_1^2 \vec{k} + l_{DB} \omega_1^{-2} (\varepsilon_1 \vec{j} + \varepsilon_2 \vec{i}), \quad (1.21)$$

în care \vec{i} , \vec{j} și \vec{k} sînt vectorii unitari atașați dreptei DB , analog cu ceea ce s-a arătat anterior. Vectorii accelerației reduse se reprezintă la o scară egală cu cea a lungimilor. Se marchează pe dreapta DB punctul I astfel încît $l_{DI} = l_{DB} k_1^2$ și cu originea în punctul I se reprezintă vectorul $\vec{a}_{Br} = \vec{a}_B \omega_1^{-2}$. Se determină apoi planul P'' perpendicular pe dreapta DB și trecînd prin punctul b ce reprezintă extremitatea vectorului \vec{a}_{Br} situat cu originea în punctul I . Urmele planului P'' sînt P''_h, P''_v . Extremitatea vectorului \vec{a}_{Dr} trebuind să fie situată în ambele plane P' și P'' , se va găsi pe dreapta $\alpha\alpha$ de intersecție a lor. Se consideră apoi dreptele AD și DC . Se efectuează construcții grafice pe baza unor raționamente complet analoge cu cele folosite pentru dreptele AD și DB și se determină apoi astfel o altă dreaptă $\beta\beta$. Extremitatea vectorului \vec{a}_{Dr} se va găsi la intersecția dreptelor $\alpha\alpha$ și $\beta\beta$. Ultimele construcții grafice, pentru a nu încărca prea mult figura 2, nu sînt reprezentate în ea. Mărimea vectorului \vec{a}_D se obține înmulțind mărimea vectorului \vec{a}_{Dr} cu ω_1^2 .

În figura 3 sînt reprezentate două organe I_1 și I_2 , aparținînd unui mecanism spațial, asociate între ele printr-o articulație. S-a notat prin \vec{a}_{Ar} accelerația redusă a punctului A , cunoscută, A fiind pe axa articulației, adică $\vec{a}_{Ar} = \vec{a}_A \omega_1^{-2}$. Se consideră planul definit de dreapta AB ce aparține

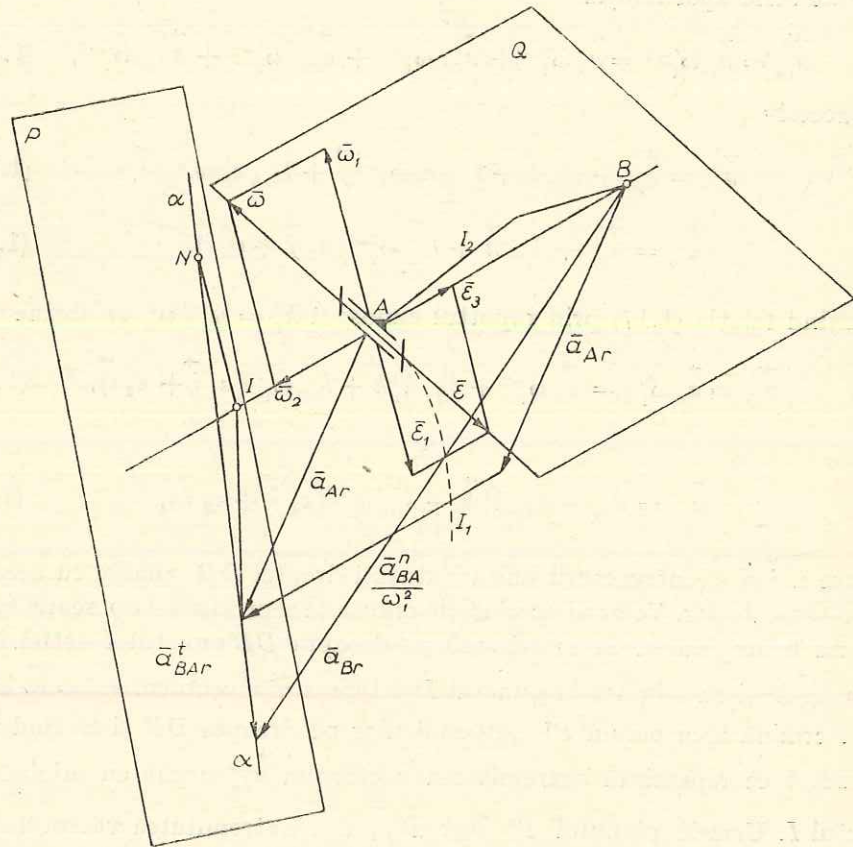


Fig. 3

organului I_2 și axa articulației și în acest plan se descompun vectorii $\vec{\omega}$ și $\vec{\varepsilon}$ după dreapta AB și după o perpendiculară pe ea situată în planul Q . Acest lucru înseamnă descompunerea mișcării de rotație relativă în jurul axei articulației în două mișcări de rotație, și anume în jurul dreptei AB și în jurul perpendicularei pe AB , situată în planul Q . Planul P este dus prin extremitatea vectorului \vec{a}_{Ar} perpendicular pe dreapta AB . În acest plan este situată dreapta $\alpha\alpha$ care reprezintă locul geometric al ex-

tremităților accelerațiilor reduse ale punctelor dreptei AB . Perpendiculara comună NI între dreptele $\alpha\alpha$ și $\beta\beta$ este paralelă cu suportul vectorului $\vec{\varepsilon}_1(\vec{\omega}_1)$.

Poziția dreptei $\alpha\alpha$ se poate stabili grafic, de pildă prin procedeele geometriei descriptive, sau analitic, dacă se cunoaște vectorul \vec{a}_{Ar} și dreapta AB , deoarece dreapta $\alpha\alpha$ este perpendiculara dusă prin extremitatea vectorului \vec{a}_{Ar} la dreapta AB și la o perpendiculară pe AB conținută în planul Q , definit așa cum s-a arătat anterior. Deci nu este necesară pentru aceasta cunoașterea prealabilă a vectorului $\vec{\varepsilon}$.

Cele de mai sus extinzîndu-se, cu modificările și complicațiile inerente aspectului spațial interpretat geometric al factorului $[A_n - A_n(u)]^{-1}$ caracteristic cîmpurilor de accelerații spațiale reduse de specia întâia de ordin n , la cazuri din ce în ce mai complicate, conduc la studiul sistematic al mecanismelor spațiale cu ajutorul metodei accelerațiilor reduse. Trimițînd cititorul, pentru adîncirea specificului problemei, la [32], vom ilustra aplicarea metodei prin studiul cinematic al unui mecanism sferic și al unui mecanism spațial cu culisă dreaptă.

Mecanismul reprezentat în figura 4 este un mecanism sferic format din patru organe I_0, I_1, I_2, I_3 , din care I_0 este batiul. Lanțul cinematic spațial este simplu și închis, cu un singur grad de mobilitate, deoarece nu se ia în considerație posibilitatea de rotire a bielei I_2 în jurul dreptei $B_h C_v$. Cuplele cinematice care asociază organele între ele sînt două articulații și două articulații sferice. Planul H , care conține traiectoria centrului comun B_h al sferelor plină și goală ce constituie articulația sferică din B_h , este un plan fix caracteristic mecanismului. La fel planul V ce conține centrul C_v al celei de a doua articulații sferice. Planele H și V sînt perpendiculare, deoarece axele articulațiilor care asociază organele I_1 și I_3 la batiul I_0 sînt și ele perpendiculare una pe alta, intersectîndu-se în punctul fix O caracteristic mecanismului. Proiecția ortogonală a bielei I_2 , adică a dreptei $B_h C_v$ pe planul H este notată prin $B_h C_h$ și pe planul V prin $B_v C_v$.

Se presupune efectuat în prealabil studiul vitezelor pentru toate organele mobile ale mecanismului, deci se cunoaște componenta $\vec{\omega}_2$ perpendiculară pe dreapta $B_h C_v$ a vitezei unghiulare instantanee $\vec{\omega}_2$ a bielei I_2 . Legea de mișcare a organului conducător I_1 este presupusă dată, deci se poate determina vectorul $\vec{a}_{B_h} = \vec{a}_{B_h}^n + \vec{a}_{B_h}^t$ situat în planul H . Vectorul $\vec{a}_{B_h r} = \vec{a}_{B_h} \omega_2'^{-2}$ este coliniar și de același sens cu vectorul \vec{a}_{B_h} . Scara accelerațiilor reduse se ia egală cu scara lungimilor, iar planul V se rabate peste planul H în jurul dreptei zz . Conform teoremei 1, extremitatea vectorului $\vec{a}_{C_v r} = \vec{a}_{C_v} \omega_2'^{-2}$ va fi situată într-un plan perpendicular pe dreapta $B_h C_v$.

și trecînd prin extremitatea vectorului $\vec{a}_{B_h r}$. Urma planului P , α_h , pe planul H , este perpendiculară pe dreapta $B_h C_v$, iar urma planului P , α_v , pe planul V , este perpendiculară pe $B_v C_v$. Se notează prin $\vec{a}_{C_v r} = \vec{a}_{C_v} \omega_3^{-2}$. Vectorii

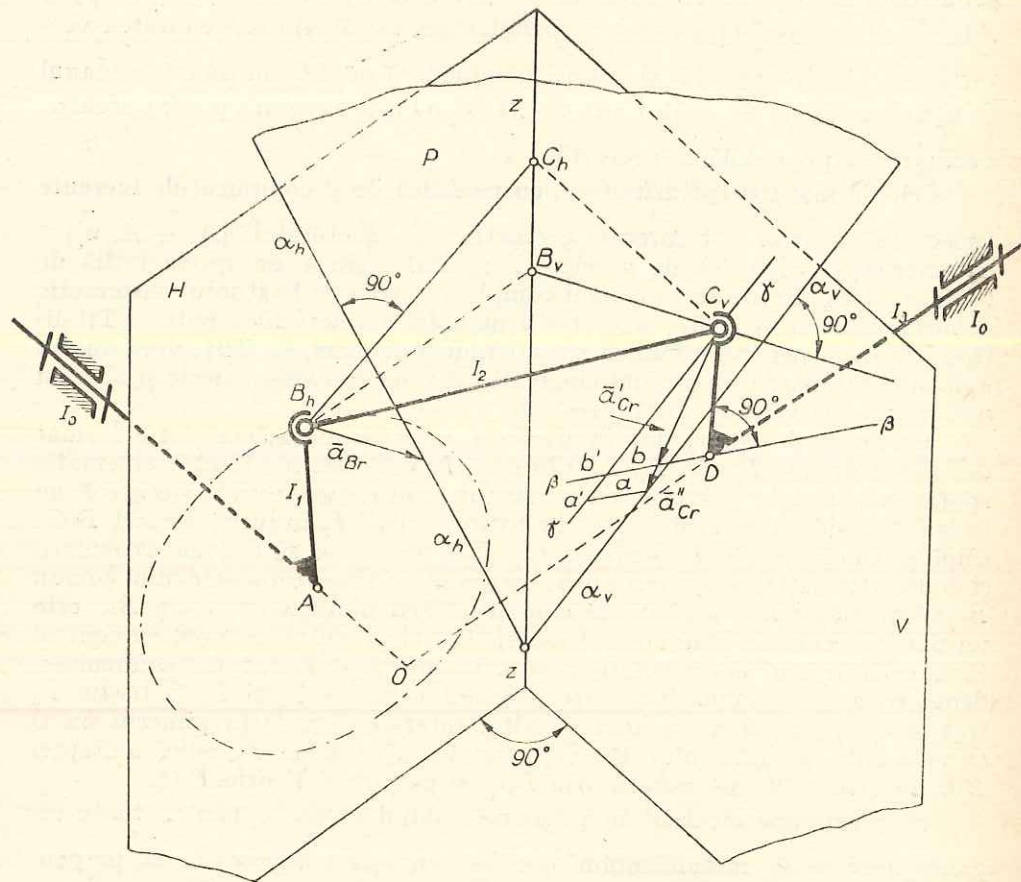


Fig. 4

$\vec{a}_{C_v r}$ și $\vec{a}_{C_v r}$ sînt coliniari, de același sens și se găsesc în planul V care conține traiectoria punctului C_v .

Pentru organul I_3 se poate scrie ecuația vectorială

$$\vec{a}_{C_v} = \vec{a}_D + \vec{a}_{C_v D} + \vec{a}_{C_v D} \quad \vec{a}_D = 0. \quad (1.22)$$

Împărțind ambii membri ai ecuației (1.22) cu scalarul ω_3^2 , se obține

$$\vec{a}_{C_v r} = \frac{l_{C_v D} \omega_3^2}{\omega_3^2} \vec{i} + \frac{l_{C_v D} \varepsilon_3}{\omega_3^2} \vec{j}, \quad (1.23)$$

\vec{i} și \vec{j} fiind vectorii, respectiv coliniar și perpendicular pe dreapta $C_v D$. Ecuația (1.23) arată că dacă se reprezintă vectorii accelerației reduse la o scară egală cu scara lungimilor, extremitatea vectorului $\vec{a}_{C_v r}$ se găsește pe dreapta $\beta\beta$ perpendiculară pe dreapta $C_v D$, conținută în planul V și trecînd prin punctul D .

Raportul mărimilor vectorilor $\vec{a}_{C_v r}$ și $\vec{a}_{C_v r}$ este cunoscut, adică

$$\frac{|\vec{a}_{C_v r}|}{|\vec{a}_{C_v r}|} = \frac{|\vec{a}_{C_v}| \omega_3^{-2}}{|\vec{a}_{C_v}| \omega_2^{-2}} = \frac{\omega_2^2}{\omega_3^2} = k^2. \quad (1.24)$$

Notîndu-se cu b și a extremitățile vectorilor $\vec{a}_{C_v r}$ și $\vec{a}_{C_v r}$, dreapta suport comun a acestor vectori e o dreaptă situată în planul V , trecînd prin punctul C_v și care intersectează dreptele $\beta\beta$ și $\alpha_v \alpha_v$ în punctele b și a astfel încît

$$\frac{C_v b}{C_v a} = k^2.$$

În planul V se duce o dreaptă $\gamma\gamma$, prin C_v , paralelă cu $\alpha_v \alpha_v$ și care intersectează dreapta $\beta\beta$ în b' . Pe dreapta $\gamma\gamma$ se ia segmentul $C_v a'$ astfel încît

$$\frac{C_v b'}{C_v a'} = k^2.$$

Prin a' se duce paralela la $\beta\beta$ și la intersecția ei cu $\alpha_v \alpha_v$ se determină punctul a . Punctul b de intersecție al dreptei $C_v a$ cu dreapta $\beta\beta$ este extremitatea vectorului $\vec{a}_{C_v r}$. Mărimea vectorului \vec{a}_{C_v} se obține înmulțind mărimea vectorului $\vec{a}_{C_v r}$ cu ω_2^2 sau mărimea vectorului $\vec{a}_{C_v r}$ cu ω_3^2 .

În figura 5 este reprezentat un mecanism spațial cu culisă dreaptă. El constă dintr-un lanț cinematic spațial simplu închis cu un singur grad de libertate, organul fix fiind notat cu I_0 . Manivela motoare I_1 este asociată la batiul I_0 printr-o articulație. Organul I_2 este o piatră de culisă care alunecă de-a lungul culisei drepte I_3 . Mișcarea relativă a pietrei de culisă față de culisă este o mișcare de translație rectilinie. Asocierea dintre manivela motoare I_1 și piatra de culisă I_2 se face cu ajutorul unei articulații sferice. În B_h este suprapusă deci o articulație sferică și o cuplă de translație, deoarece punctul B_h , centrul comun al celor două sfere plină și goală ce alcătuiesc articulația sferică, se găsește pe direcția de alunecare uu a

cuplei de translație. Se consideră un punct M_3 de pe direcția de alunecare uu , adică aparținând culisei I_3 și care coincide în momentul considerat cu punctul B_h care aparține organelor I_1 și I_2 . Accelerația relativă redusă \vec{a}_{MB_r} are ca suport dreapta uu .

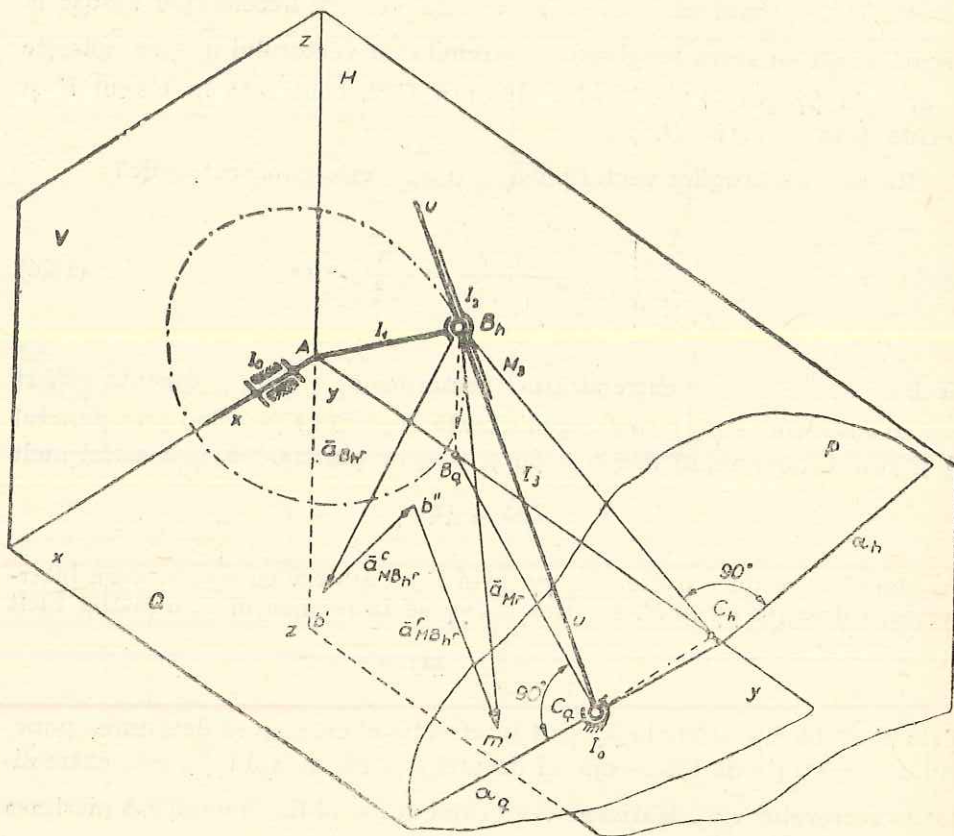


Fig. 5

Asocierea dintre culisa I_3 și batiul I_0 , se face cu ajutorul unei articulații sferice cu deget. Sfera plină și degetul aparțin organului I_3 , axa degetului fiind perpendiculară pe dreapta uu (culisă). Mișcarea organului I_3 față de organul I_0 este o mișcare de rotație de viteză unghiulară $\vec{\omega}_{30}$ care poate fi considerată ca fiind compusă dintr-o viteză unghiulară $\vec{\omega}_{30}$ coliniară cu axa degetului și o alta $\vec{\omega}_{30}''$ perpendiculară pe tăietura circulară

din sfera goală care aparține organului I_0 . Vectorul $\vec{\omega}_{30}$ este deci conținut în planul P ce trece prin centrul comun C_q al celor două sfere ce alcătuiesc articulația sferică cu deget și e perpendicular pe culisa I_3 , adică pe dreapta uu . Planul Q , definit de axa xx a articulației ce asociază manivela I_1 la batiul I_0 și de punctul C_q , este un plan fix, caracteristic, al mecanismului. La fel, planul H ce conține traiectoria punctului B_h . Planul H este perpendicular pe planul Q . Se mai poate considera și planul V perpendicular pe Q și H și conținând dreapta xx . Dreptele B_qC_q și B_hC_h sînt proiecțiile ortogonale ale dreptei B_hC_q pe planele Q și H . Planul P se definește prin urmele sale pe planele Q și H , α_q , α_h , care sînt respectiv perpendiculare pe B_qC_q și B_hC_h .

Pentru accelerația punctului M se pot scrie ecuațiile vectoriale

$$\vec{a}_M = \vec{a}_{B_h} + \vec{a}_{MB_h}^C + \vec{a}_{MB_h}^r \quad (1.25)$$

și

$$\vec{a}_M = \vec{a}_{C_q}^n + \vec{a}_{MC_q}^n + \vec{a}_{MC_q}^t \quad (1.26)$$

în care $\vec{a}_{C_q}^t = 0$. Deoarece

$$\vec{a}_{MB_h}^C = 2\vec{\omega}_{30} \times \vec{v}_{MB_h} \quad (1.27)$$

vectorul $\vec{a}_{MB_h}^C$ este conținut într-un plan perpendicular pe direcția de alunecare uu , adică paralel cu planul P , căci \vec{v}_{MB_h} este coliniară cu dreapta uu .

Din studiul prealabil al vitezelor se cunosc vectorii $\vec{\omega}_{30}$ și \vec{v}_{MB_h} , deci se poate calcula vectorul accelerație al lui Coriolis. Împărțind ecuațiile (1.25) și (1.26) prin ω_{30}^2 , se obțin ecuațiile

$$\vec{a}_{M_r} = \vec{a}_{B_h r} + \vec{a}_{MB_h r}^C + \vec{a}_{MB_h r}^r \quad (1.28)$$

$$\vec{a}_{M_r} = \vec{a}_{MC_q r}^n + \vec{a}_{MC_q r}^t \quad (1.29)$$

în care

$$\vec{a}_{M_r} = \frac{\vec{a}_M}{\omega_{30}^2}, \quad \vec{a}_{B_h r} = \frac{\vec{a}_{B_h}}{\omega_{30}^2}, \quad \vec{a}_{MB_h r}^C = \frac{2\omega_{30} \times v_{MB_h}}{\omega_{30}^2}, \quad (1.30)$$

$$\vec{a}_{MB_h r} = \frac{\vec{a}_{MB_h}}{\omega_{30}^2}, \quad \vec{a}_{MC_q r}^n = \frac{\vec{a}_{MC_q}^n}{\omega_{30}^2}, \quad \vec{a}_{MC_q r}^t = \frac{\vec{a}_{MC_q}^t}{\omega_{30}^2}. \quad (1.31)$$

Se consideră mai întâi că punctul B_h aparține organului I_1 a cărui lege de mișcare se cunoaște și se trasează la o scară a accelerațiilor reduse egală cu aceea a lungimilor, în planul H , vectorul $\vec{a}_{B_h r}$. Se reprezintă, prin proiecțiile sale pe planele Q , H și V , cu originea în extremitatea b' a vectorului $\vec{a}_{B_h r}$, vectorul $\vec{a}_{MB_h r}^C$ care e conținut, ca și vectorul $\vec{a}_{MB_h r}^C$, într-un plan perpendicular pe direcția de alunecare uu . Din punctul b'' ce reprezintă extremitatea vectorului $\vec{a}_{MB_h r}^C$ se duce paralela cu dreapta uu și care reprezintă direcția accelerației reduse $\vec{a}_{MB_h r}^r$. Dar, în conformitate cu teorema 1 și prin urmare și pe baza ecuației (1.16), extremitatea vectorului \vec{a}_{M_r} trebuie să fie situată în planul P , deci în punctul m' de intersecție a direcției paralele cu dreapta uu dusă prin punctul b'' cu planul P .

Metoda accelerațiilor reduse, exemplificată prin elaborarea de mai sus, poate fi extinsă și la alte categorii de mecanisme pe măsura rezolvării problemei de sistematizare cât mai completă și mai unitară a mecanismelor spațiale, cu privire specială asupra vastei probleme de sinteză a mecanismelor și de elaborare a metodelor de sinteză a unor atare mecanisme. Numeroși pași pe calea unei atare rezolvări, cerută de hotărârile plenarei de închidere a celei de a doua Conferințe Unionale de TMM deja menționată [22], avînd drept exemplu recente realizări în sinteza circuitelor și rețelelor electrice [47] și folosind aparate matematice de investigație ca teoria grupurilor, a grupoidelor etc., s-au făcut în ultima vreme [60, 49] șirul de lucrări în domeniu conținînd și lucrări ale autorilor romîni [6, 59].

Partea a doua

METODA COORDONATELOR VECTORIALE CILINDRICE

Această a doua parte a lucrării de față poate fi divizată, la rîndul ei în două părți: una privind elaborarea metodei, și a doua privind aplicarea metodei în mecanica grafică spațială [58, 62, 10].

1. Expunerea metodei coordonatelor vectoriale cilindrice

Elaborarea metodei coordonatelor vectoriale cilindrice are la bază trei idei principale:

1°. Înlocuirea calculului analitic prin calcul grafic

2°. Înlocuirea coordonatelor carteziene ale unui vector liber prin „coordonate cilindrice”, această înlocuire permițînd să se elaboreze procedeele grafice pentru efectuarea diferitelor operațiuni algebrice între vectori spațiali, asemănătoare celor cunoscute pentru cazul plan

3°. Înlocuirea coordonatelor vectoriale obișnuite ale unui vector alunecător prin „coordonatele vectoriale cilindrice”, ce vor fi definite în cursul expunerii și care au permis rezolvarea, prin procedeele cunoscute de la cazul plan — poligoane vectoriale și poligoane funiculare, — a problemei fundamentale din algebra vectorilor alunecători și anume reducerea sistemelor de vectori alunecători spațiali.

Elaborarea metodei coordonatelor vectoriale cilindrice constă în consecință în tratarea, în sensul ideilor menționate mai sus, a următoarelor probleme:

1°. Extinderea elementelor de calcul grafic, cunoscute, la cazurile cînd mărimile care intervin în diversele relații scrise sînt reprezentate la scări diferite.

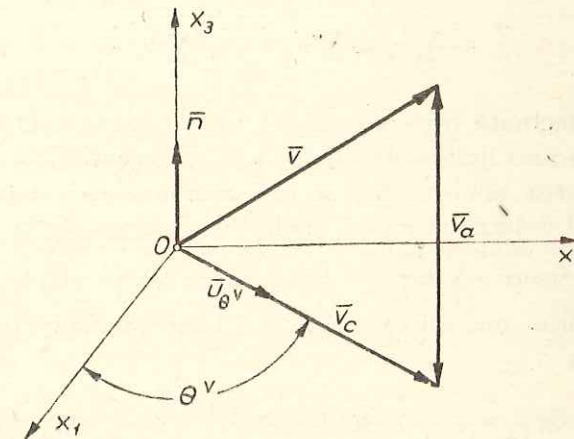


Fig. 6

2°. Algebra grafică a vectorilor liberi, în care se introduc, în locul coordonatelor carteziene ale unui vector liber (proiecțiile lui pe axele de coordonate carteziene, coordonatele cilindrice, reprezentate prin:

— proiecția vectorului pe un plan π , numit „planul reprezentării” (în figura 6: planul x_1Ox_2);

— unghiul θ^v format de această proiecție cu o axă de referință (în figura 6: axa Ox_1);

— proiecția vectorului pe o axă normală la planul reprezentării, numită „axa reprezentării”.

În modul acesta vectorul liber \vec{v} a fost descompus în două componente normale între ele:

— o componentă situată în planul reprezentării, numită „componenta coplanară” și

— o componentă situată pe axa reprezentării, numită „componenta axială”.

Notînd cu \vec{u}_{θ_v} versorul componentei coplanare și cu \vec{n} versorul axei reprezentării, expresia unui vector, în coordonate cilindrice, va fi dată de relația:

$$\vec{v} = v_c \vec{u}_{\theta_v} + v_a \vec{n}. \quad (2.1)$$

Pe baza acestei descompunerii a unui vector liber au putut fi elaborate [18] procedeele grafice pentru efectuarea diverselor operații algebrice între vectori liberi spațiali.

Astfel, suma geometrică a unui număr determinat de vectori spațiali va fi exprimată prin relația:

$$\vec{v}_s = \sum_v \vec{v}_v = \sum_v v_{vc} \vec{u}_{\theta_v} + \sum_v v_{va} \vec{n} \quad (2.2)$$

și va putea fi efectuată prin construcția unui poligon vectorial în planul reprezentării și a unei linii vectoriale pe axa reprezentării.

Descompunerea unui vector în trei componente oarecare în spațiu după trei direcții determinate prin unghiurile ψ_{Δ_σ} formate cu planul reprezentării și prin versorii \vec{u}_{θ_Δ} ai proiecțiilor direcțiilor pe planul reprezentării, va fi efectuată prin construirea mai întâi a triunghiului vectorial reprezentat prin ecuația:

$$\begin{aligned} (\vec{v}_c - v_a \cotg \psi_{\Delta_3} \vec{u}_{\theta_3}) + \lambda_1 (\sin \psi_{\Delta_1} \cotg \psi_{\Delta_3} \vec{u}_{\theta_3} - \cos \psi_{\Delta_1} \vec{u}_{\theta_1}) + \\ + \lambda_2 (\sin \psi_{\Delta_2} \cotg \psi_{\Delta_3} \vec{u}_{\theta_3} - \cos \psi_{\Delta_2} \vec{u}_{\theta_2}) = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

din care vor putea fi determinați factorii scalari λ_1 și λ_2 , prin fixarea în planul reprezentării a poziției unui punct cu ajutorul vectorului de poziție

$$\vec{r}_c^* = \vec{r}_{oc} + \lambda_i \cos \psi_{\Delta_i} \vec{u}_{\theta_i} \quad (i = 1, 2) \quad (2.4)$$

și prin construirea apoi, în planul reprezentării (figura 7), a două paralelograme ale căror laturi vor da componentele coplanare ale celor trei vectori căutați; valorile scalare ale componentelor axiale vor fi determinate, prin simple proiecții, în baza relațiilor:

$$v_{\sigma_a} = \lambda_\sigma \sin \psi_{\Delta_\sigma} \quad (\sigma = 1, 2, 3). \quad (2.5)$$

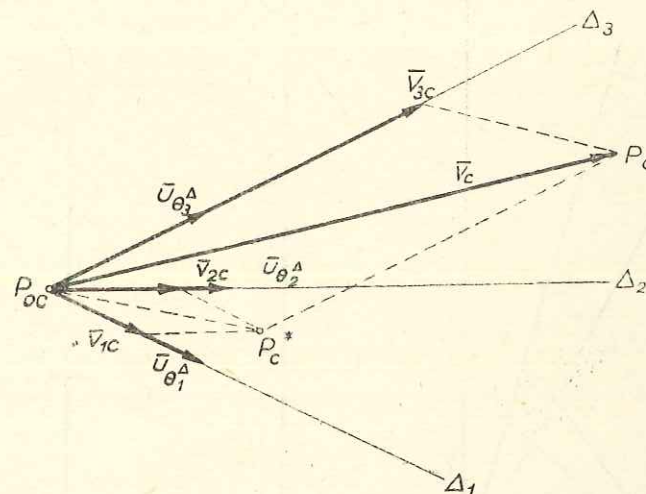


Fig. 7

Diferența geometrică între doi vectori, exprimată prin relația:

$$\vec{v}_d = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = (v_{2c} \vec{u}_{\theta_2} - v_{1c} \vec{u}_{\theta_1}) + (v_{2a} - v_{1a}) \vec{n} \quad (2.6)$$

va putea fi efectuată grafic prin completarea unui triunghi vectorial în planul reprezentării și prin o diferență de segmente, pe axa reprezentării.

Produsul scalar între doi vectori spațiali, exprimat în coordonate cilindrice prin relația:

$$\vec{r} \vec{v} = r_c v_c \cos (\theta^v - \theta^r) + r_a v_a, \quad (2.7)$$

va putea fi efectuat grafic prin construcția reprezentată în figura 8, care permite să se pună în evidență și semnele celor doi termeni.

Produsul vectorial între doi vectori spațiali este exprimat, în coordonate cilindrice, prin relația :

$$\vec{p} = \vec{r} \times \vec{v} = \left[r_c v_a u_{\theta^r - \frac{\pi}{2}} + r_a v_c u_{\theta^v + \frac{\pi}{2}} \right] + r_c v_c \sin(\theta^v - \theta^r) \vec{n}, \quad (2.8)$$

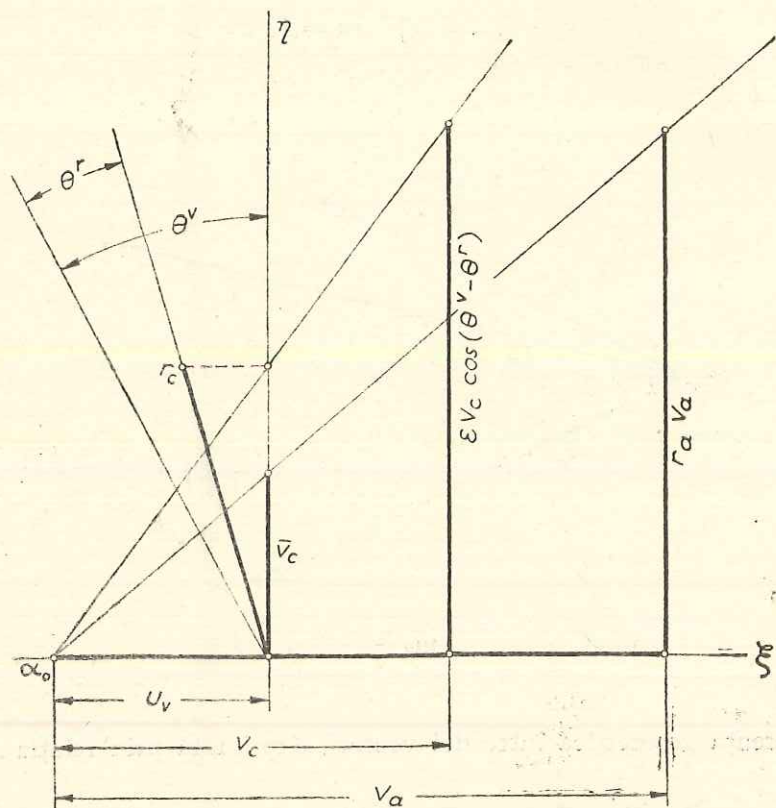


Fig. 8

componenta sa coplanară determinîndu-se prin construcția unui triunghi vectorial în planul reprezentării, iar mărimea componentei axiale prin construcția din figura 9, care pune în evidență și sensul acestei componente.

Construcții asemănătoare permit determinarea produsului mixt și dublu-vectorial între trei vectori, precum și rezolvarea unor tipuri de ecuații vectoriale, întâlnite în deosebi în Mecanică.

3°. **Algebra grafică a vectorilor alunecători și legați**, tratînd problema reducerii — pe cale grafică — a sistemelor de vectori alunecători și legați.

Se introduc mai întîi, în locul coordonatelor vectoriale obișnuite ale unui vector alunecător (vectorul liber și cuplul de moment egal cu momen-

tul vectorului alunecător în raport cu polul considerat), „coordoanatele vectoriale cilindrice”, definite în modul următor :

Vectorul alunecător \vec{v} , aplicat în punctul P , arbitrar pe suportul său, se descompune în cele două componente cilindrice :

- componenta coplanară, \vec{v}_c paralelă la planul reprezentării, și
- componenta axială, \vec{v}_a , paralelă la axa reprezentării (figura 10).

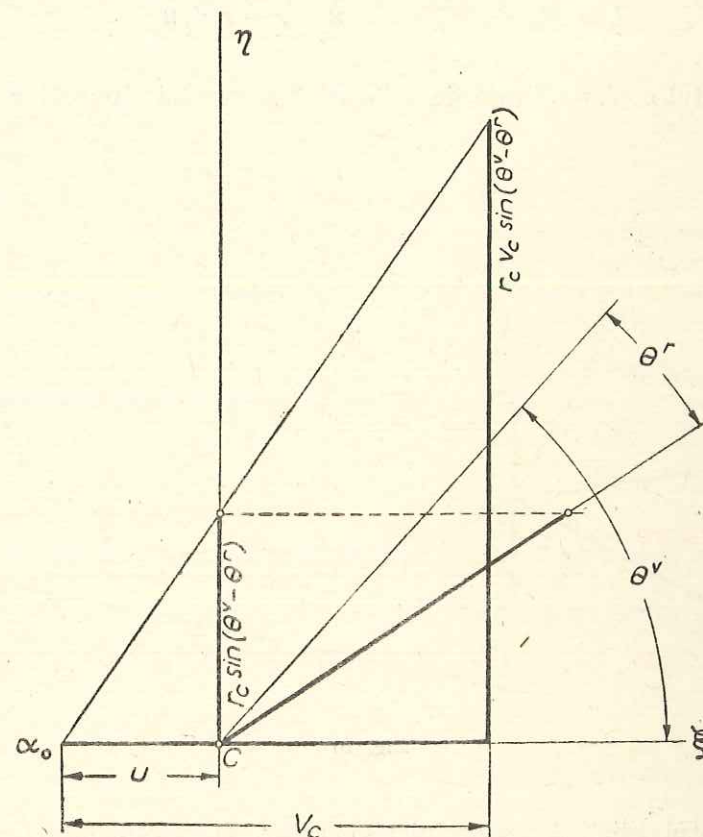


Fig. 9

Aplicînd în punctul P_c (proiecția ortogonală pe planul reprezentării a punctului de aplicație P), doi vectori direct opuși, \vec{v}_c și $-\vec{v}_c$, vectorul alunecător \vec{v} din punctul P va putea fi înlocuit prin sistemul echivalent format din vectorul alunecător \vec{v}_c din planul reprezentării și dintr-un cuplu, de moment \vec{M}_1 , situat în planul reprezentării ; de aseme-

nea, aplicînd în polul O vectorii \vec{v}_a și $-\vec{v}_a$, vectorul \vec{v}_a din punctul P va putea fi înlocuit cu sistemul echivalent format din vectorul \vec{v}_a de pe axa reprezentării și cuplul de moment \vec{M}_2 situat în planul reprezentării.

Suma geometrică a celor două momente din planul reprezentării:

$$\vec{M}_c = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = r_a v_c \vec{u}_{\theta_v + \frac{\pi}{2}} + r_c v_a \vec{u}_{\theta_r - \frac{\pi}{2}}, \quad (2.9)$$

dă „momentul coplanar” față de polul O al vectorului alunecător \vec{v} .

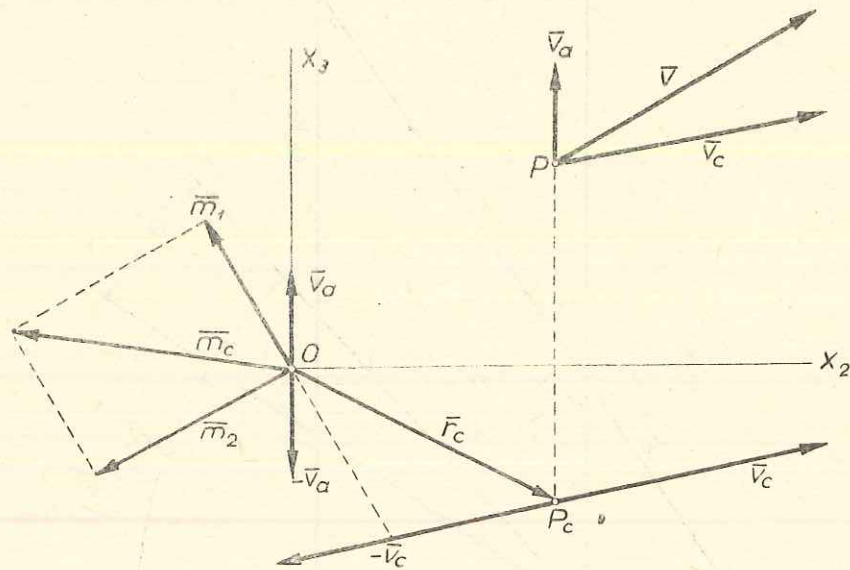


Fig. 10

Momentul axial al vectorului alunecător, momentul față de polul O al componentei \vec{v}_c din planul reprezentării, poate fi determinat cu ajutorul unui poligon funicular.

În modul acesta, vectorul alunecător \vec{v} din spațiu poate fi înlocuit cu sistemul echivalent format din vectorii:

- vectorul axial \vec{v}_a , situat pe axa reprezentării;
- vectorul copolar \vec{v}_c , alunecător în planul reprezentării;
- cuplul, avînd momentul coplanar \vec{M}_c situat în planul reprezentării.

Demonstrîndu-se că ansamblul acestor trei vectori determină complet un vector alunecător, ei au fost numiți „coordonate vectoriale cilindrice” ale vectorului \vec{v} :

$$\vec{v} \{ \vec{v}_c, \vec{v}_a, \vec{M}_c \}. \quad (2.10)$$

Calculînd cu ajutorul coordonatelor cilindrice și momentul unui vector alunecător în raport cu o axă Δ , formînd cu planul reprezentării unghiul ψ_Δ și a cărui proiecție pe planul reprezentării are orientarea determinată prin versorul \vec{u}_{θ_Δ} , se obține expresia:

$$M_\Delta = \cos \psi_\Delta \cdot \text{pr}_{\vec{u}_{\theta_\Delta}} [\vec{M}_c - \vec{M}_c(\vec{v}_{O'})] + \sin \psi_\Delta \cdot [M_a - M_a(\vec{v}_{O'})], \quad (2.11)$$

observîndu-se cu ușurință că primul termen al acestei sume se obține prin proiectarea, pe proiecția coplanară a axei, a unei diferențe geometrice de două momente coplanare (al vectorului alunecător situat pe suportul său, precum și al vectorului, mutat paralel cu el însuși, într-un punct arbitrar de pe axa față de care se consideră momentul), și că al doilea termen poate fi determinat cu ajutorul unui poligon funicular.

Coordonatele vectoriale cilindrice ale unui sistem de vectori alunecători vor fi:

- „vectorul coplanar rezultat” al sistemului, definit prin relația:

$$\vec{v}_c = \sum_v \vec{v}_{v_c} = \sum_v v_{v_c} \vec{u}_{\theta_{v_c}} \quad (2.12)$$

și determinat prin construirea, în planul reprezentării, a unui poligon vectorial;

- „vectorul axial rezultat” al sistemului, definit prin relația:

$$\vec{v}_a = \sum_v \vec{v}_{v_a} = (\sum_v v_{v_a}) \vec{n} \quad (2.13)$$

și determinat prin construirea unei linii vectoriale;

- cuplul, de „moment coplanar rezultat” \vec{M}_c , definit prin relația:

$$\vec{M}_c = \sum_v \vec{M}_{v_c} \quad (2.14)$$

și determinat prin construirea, în planul reprezentării, a unui poligon vectorial;

- cuplul, de „moment axial rezultat” \vec{M}_a , definit prin relația:

$$\vec{M}_a = (\sum_v M_{v_a}) \vec{n} \quad (2.15)$$

și determinat prin construirea, tot în planul reprezentării, a unui poligon funicular.

Ansamblul acestor vectori va constitui torsorul cilindric în planul considerat, al sistemului de vectori alunecători.

Stabilindu-se corespondențele între formele — închise sau deschise — ale poligoanelor vectoriale și funiculare construite pentru determinarea acestor vectori rezultanți și între sistemele echivalente simple la care pot fi reduse sistemele de vectori alunecători, se rezolvă foarte simplu problema reducerii pe cale grafică a sistemelor de vectori alunecători spațiali. Astfel, un sistem caracterizat prin închiderea tuturor poligoanelor vectoriale, precum și a celui funicular, va fi un sistem echivalent cu zero.

Folosind coordonatele vectoriale cilindrice se poate determina grafic atât axa centrală a unui sistem de vectori alunecători, cât și poziția centrului unui sistem de vectori paraleli spațiali, poziție determinată prin următoarele componente cilindrice ale vectorului său de poziție :

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_v \vec{r}_{v_c} v_v}{\sum_v v_v}; \quad \vec{r}_a = \frac{\sum_v \vec{r}_{v_a} v_v}{\sum_v v_v}, \quad (2.16)$$

sau prin construcția a trei poligoane funiculare, două în planul reprezentării și unul într-un plan axial conținând axa reprezentării.

4°. Elemente de analiză vectorială grafică, în care se stabilește mai întâi expresia — în coordonate vectoriale cilindrice — a derivatei unei funcțiuni vectoriale de un argument scalar t :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_c}{dt} \vec{u}_{\theta^v} + v_c \frac{d\theta^v}{dt} \vec{u}_{\theta^v + \frac{\pi}{2}} + \frac{dv_a}{dt} \vec{n} \quad (2.17)$$

și apoi se stabilesc condițiile de integrare a unei funcțiuni vectoriale de un argument scalar, exprimată în coordonate vectoriale cilindrice.

2. Aplicarea metodei coordonatelor vectoriale cilindrice în mecanica grafică spațială

Aplicarea metodei, expusă în prima parte, la mecanica grafică spațială constă în elaborarea procedeelor grafice — bazate pe tratarea, prezentată mai sus, a calcului vectorial — de rezolvare a problemelor de cinematică spațială, dinamică spațială și statică spațială.

Se tratează astfel, în continuare, următoarele probleme :

5°. Aspecte grafice ale proprietăților mișcării generale a solidului rigid, în care, introducându-se noțiunile de „viteză redusă” și „acelerație redusă”, definite în sensul lui Federhofer prin relațiile :

$$\vec{v}_0^r = \frac{\vec{v}}{\omega_0} = \frac{\vec{v}_0}{\omega_0} + \frac{\omega}{\omega_0} \times \vec{r} = \vec{v}_0 + \omega \times \vec{r}, \quad (2.18)$$

respectiv :

$$\vec{a} = \frac{\vec{a}}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2} [\vec{a}_0 + \varepsilon \times \vec{r} + \omega \times (\omega \times \vec{r})] = \vec{a}_0 + \varepsilon \times \vec{r} + \omega \times (\omega \times \vec{r}), \quad (2.19)$$

ω_0 fiind o viteză unghiulară constantă, obișnuit a organului conducător, se stabilesc un număr de 12 proprietăți [16] privind distribuția vitezelor și accelerațiilor, precum și construcția „planului vitezelor coplanare” și a „planului accelerațiilor coplanare”, proprietăți prezentînd o deosebită importanță în rezolvarea pe cale grafică a problemelor de cinematică spațială. Se menționează astfel următoarele proprietăți mai însemnate :

Proprietatea I-a :

Locul geometric al extremităților vectorilor viteze coplanare reduse ale punctelor unui segment aparținînd unui solid în mișcare generală este o dreaptă $\Delta_{0\sigma_c}^*$ formînd cu proiecția segmentului pe planul reprezentării unghiul dat de relația :

$$\cos[\Delta_{0\sigma_c}^*, \vec{u}_{\theta_{0\sigma}^r}] = \frac{\cos \psi_{0\sigma} + \omega_c^r \sin \psi_{0\sigma} \sin(\theta^0 - \theta_{0\sigma}^r)}{\left| \cos \psi_{0\sigma} \left(\vec{u}_{\theta_{0\sigma}^r} + \omega_a^r \vec{u}_{\theta_{0\sigma}^r + \frac{\pi}{2}} \right) + \omega_c^r \sin \psi_{0\sigma} \vec{u}_{\theta_{0\sigma}^r - \frac{\pi}{2}} \right|}, \quad (2.20)$$

ω_c^r , ω_a^r și θ^0 fiind coordonatele cilindrice ale vectorului viteză unghiulară redusă iar $\psi_{0\sigma}$ unghiul format de segmentul de dreaptă cu planul reprezentării.

Proprietatea a II-a :

Locul geometric al punctelor reprezentînd variația proiecțiilor axiale ale vectorilor de poziție ai extremităților vitezelor axiale reduse ale punctelor unui segment aparținînd unui solid în mișcare generală, în funcție de distanțele punctelor la polul considerat pe segment, este o dreaptă $\Delta_{0\sigma_a}^*$ formînd cu axa absciselor unghiul dat de relația :

$$\operatorname{tg} \varphi_{0\sigma}^v = \sin \psi_{0\sigma} - \omega_c^r \cos \psi_{0\sigma} \sin(\theta^0 - \theta_{0\sigma}^r). \quad (2.21)$$

Proprietatea a VII-a :

Locul geometric al accelerațiilor coplanare reduse ale punctelor unui segment aparținînd unui solid în mișcare generală, este o dreaptă $\Delta_{0\sigma_c}^{**}$ formînd cu proiecția pe planul reprezentării a segmentului, unghiul dat de relația :

$$\cos[\Delta_{0\sigma_c}^{**}, \vec{u}_{\theta_{0\sigma}^r}] = \frac{\varepsilon_c^r \sin \psi_{0\sigma} \sin(\theta^0 - \theta_{0\sigma}^r) + (\omega \rho_{0\sigma}) \omega_c^r \cos(\theta^0 - \theta_{0\sigma}^r) + (1 - \omega^r) \cos \psi_{0\sigma}}{\left| \varepsilon_c^r \sin \psi_{0\sigma} \vec{u}_{\theta_{0\sigma}^r - \frac{\pi}{2}} + \varepsilon_a^r \cos \psi_{0\sigma} \vec{u}_{\theta_{0\sigma}^r + \frac{\pi}{2}} + (\omega \rho_{0\sigma}) \omega_c^r \vec{u}_{\theta_{0\sigma}^r} + (1 - \omega^r) \cos \psi_{0\sigma} \vec{u}_{\theta_{0\sigma}^r} \right|} \quad (2.22)$$

ε_c^r , ε_a^r și θ^0 fiind coordonatele cilindrice ale vectorului accelerație unghiulară redusă.

Proprietatea a VIII-a :

Locul geometric al punctelor, reprezentînd variația proiecțiilor axiale ale vectorilor de poziție ai extremităților accelerațiilor axiale reduse ale punctelor unui segment aparținînd unui solid în mișcare generală, în funcție de distanțele punctelor la polul situat pe segment, este o dreaptă $\Delta_{0\sigma}^{**}$ formînd cu axa absciselor unghiul dat de relația :

$$\operatorname{tg} \varphi_{0\sigma}^a = \varepsilon_c^r \cos \psi_{0\sigma} \sin (\theta_{0\sigma}^r - \theta^{\omega}) + (\omega^r \rho_{0\sigma}) \omega_a^r + (1 - \omega^r) \sin \psi_{0\sigma}. \quad (2.23)$$

6°. **Probleme de cinematică grafică spațială**, în care, folosind metoda elaborată și proprietățile meționate mai sus, se rezolvă grafic următoarele trei cazuri de probleme de cinematică grafică spațială întîlnite frecvent în aplicații :

a) Cazul solidului cu un punct, avînd mișcare comandată, situat pe o curbă spațială prestabilită și cu unghiurile lui Euler date ca funcțiuni de timp ;

b) cazul barei subțiri, cu extremitățile situate pe curbe spațiale prestabilite, mișcarea unei extremități fiind comandată [15] ;

c) cazul solidului cu două puncte situate pe curbe spațiale prestabilite, dintre care unul cu mișcare comandată, și cu un al treilea punct situat pe o suprafață dată.

În fiecare din aceste cazuri se determină grafic : configurația punctelor solidului corespunzătoare unei poziții date a punctului cu mișcare comandată, distribuția vitezelor punctelor solidului, componentele cilindrice ale vectorului viteză unghiulară instantanee, distribuția accelerațiilor punctelor solidului, precum și componentele cilindrice ale vectorului accelerație unghiulară instantanee.

Astfel, de exemplu, în cazul barei subțiri cu extremitățile situate pe curbe spațiale prestabilite, șirul de relații, deduse fie din proprietățile menționate, fie din ipotezele de lucru :

$$\operatorname{pr}_{r_{01c}}^{\rightarrow} v_{1c} = \operatorname{pr}_{r_{01c}}^{\rightarrow} v_{0c} - \omega_c^r r_{01a} \sin (\theta_{01}^r - \theta^{\omega}) ; \quad (2.24)$$

$$v_{1a} = v_{0a} + \omega_c^r r_{01c} \sin (\theta_{01}^r - \theta^{\omega}) ; \quad (2.25)$$

$$\omega_c^r r_{01c} \cos (\theta_{01}^r - \theta^{\omega}) + \omega_a^r r_{01a} = 0 ; \quad (2.26)$$

$$\operatorname{pr}_{P_{0c}P_{1c}}^{\rightarrow} v_{1c} = \frac{\left(\operatorname{pr}_{P_{0c}P_{1c}}^{\rightarrow} v_{0c} + v_{0a} \frac{r_{01a}}{r_{01c}} \right)}{\left[1 + \frac{\operatorname{tg} \psi_{v_1}}{\cos (\theta_{01}^r - \theta_{01}^r)} \cdot \frac{r_{01a}}{r_{01c}} \right]} ; \quad (2.27)$$

$$\omega_c^r = \lambda r_{01c} + \frac{v_{01a}}{r_{01c}} u_{\theta_{01}^r - \frac{\pi}{2}} ; \quad (2.28)$$

$$\omega_a^r = \frac{r_{01a}}{r_{01}^2} \cdot \operatorname{pr}_{\theta_{01}^r + \frac{\pi}{2}}^{\rightarrow} v_{01c} ; \quad (2.29)$$

$$v_{01c} = \omega_c^r r_{01a} u_{\theta_{01}^r - \frac{\pi}{2}} + \omega_a^r r_{01c} u_{\theta_{01}^r + \frac{\pi}{2}} ; \quad (2.30)$$

$$a_{1c} = a_{0c} + \varepsilon_a \times r_{01c} + \varepsilon_c \times r_{01a} - \omega^r r_{01c} ; \quad (2.31)$$

$$a_{1a} = a_{0a} + \varepsilon_c \times r_{01c} - \omega^r r_{01a} ; \quad (2.32)$$

$$\operatorname{pr}_{P_{0c}P_{1c}}^{\rightarrow} a_{1c} = \operatorname{pr}_{P_{0c}P_{1c}}^{\rightarrow} a_{0c} - \varepsilon_c^r r_{01c} \sin (\theta_{01}^r - \theta^e) - \omega^r r_{01c} ; \quad (2.33)$$

$$\varepsilon_c^r r_{01c} \cos (\theta_{01}^r - \theta^e) + \varepsilon_a^r r_{01a} = 0 ; \quad (2.34)$$

$$\varepsilon_c^r = \mu r_{01c} + \frac{a_{01a} + \omega_c^r r_{01a}}{r_{01c}} u_{\theta_{01}^r - \frac{\pi}{2}} ; \quad (2.35)$$

$$\varepsilon_a^r = r_{01c} \cdot \operatorname{pr}_{\theta_{01}^r + \frac{\pi}{2}}^{\rightarrow} \frac{a_{01c}}{r_{01}^2} ; \quad (2.36)$$

permite să se determine, prin construcții grafice foarte simple (proiecții, poligoane vectoriale și construcții de drepte — locuri geometrice), distribuția vitezelor și a accelerațiilor punctelor barei.

7°. **Aspecte grafice ale problemelor de geometria maselor**, în care se elaborează construcțiile grafice pentru determinarea poziției centrelor de greutate, a momentelor statice și a momentelor de inerție axiale, la corpuri spațiale care pot fi descompuse într-un număr determinat de corpuri simple.

Astfel relațiile :

$$r_{G_c} = \frac{\sum_v r_{G_v} V_v}{\sum_v V_v} ; \quad r_{G_a} = \frac{\sum_v r_{G_v} V_v}{\sum_v V_v} ; \quad (2.37)$$

reprezentînd componentele cilindrice ale vectorului de poziție al centrului de greutate, pun în evidență că poziția acestui punct poate fi determinată prin construcția a două poligoane funiculare în planul reprezentării și a unui al treilea poligon funicular, într-un plan auxiliar, conținînd axa reprezentării [19].

De asemenea, expresiile componentelor cilindrice ale momentului static geometric polar :

$$\vec{S}_{g0_c} = \sum_v V_v \vec{r}_{G_v c}; \quad S_{g0_a} = \sum_v V_v \vec{r}_{G_v a}, \quad (2.38)$$

arată că și aceste mărimi pot fi determinate prin construcția aceluiași poligoane funiculare [17].

În fine, aceleași poligoane funiculare permit determinarea momentelor de inerție ale solidului față de axa reprezentării și față de planul reprezentării, așa cum rezultă din expresiile :

$$\left. \begin{aligned} I_{\Delta} &= \sum_v I_{\Delta_{G_v}} + \sum_v V_v \vec{r}_{G_v c}^{\rightarrow 2} \\ I_{\pi} &= \sum_v I_{\pi_{G_v}} + \sum_v V_v \vec{r}_{G_v a}^{\rightarrow 2} \end{aligned} \right\}, \quad (2.39)$$

presupunându-se primele sume fie cunoscute, fie neglijabile, dacă numărul porțiunilor în care a fost împărțit corpul este foarte mare și volumele porțiunilor foarte mici [17].

Tot aici se arată posibilitatea determinării momentului de inerție al unui corp oarecare față de o axă arbitrară în spațiu, cu ajutorul a două elipse de inerție și al unui cerc.

8°. **Probleme de dinamică grafică spațială**, în care se elaborează — pe baza metodei expuse — procedeele grafice pentru rezolvarea următoarelor probleme de dinamică spațială :

Problema reducerii forțelor de inerție ale unui solid în mișcare spațială. Folosind noțiunile de „forță de inerție rezultantă redusă” și de „moment rezultant al forțelor de inerție reduse” [10], definite prin relațiile :

$$\vec{f} = \frac{\vec{F}}{M\omega_0^2} \quad \text{și} \quad \vec{m} = \frac{\vec{M}}{M\omega_0^2} \quad (2.40)$$

în care M este masa solidului iar ω_0 o viteză unghiulară cunoscută, obișnuit a organului conducător, se demonstrează că sistemul forțelor de inerție reduse ale solidului poate fi înlocuit prin sistemul echivalent, reprezentat prin relațiile :

$$\left. \begin{aligned} \vec{f}_a &= -\vec{a}_{G_a} \\ \vec{f}_c &= -\vec{a}_{G_c} \\ \vec{m}_{G_c} &= -\int_v (\vec{r}_c \times \vec{a}_a + \vec{r}_a \times \vec{a}_c) dm \end{aligned} \right\}, \quad (2.41)$$

și format din :

— forța de inerție rezultantă, axială, redusă, aplicată în centrul de greutate

— forța de inerție rezultantă, coplanară, redusă, situată într-un plan paralel la planul reprezentării, pe suportul determinat prin relația :

$$\vec{r}_c = \lambda \vec{f}_c + \frac{\vec{f}_c \times \vec{m}_{G_a}}{\vec{f}_c^2}; \quad (2.42)$$

— cuplul rezultant al forțelor de inerție reduse, de moment coplanar \vec{m}_{G_c} , calculându-se în continuare expresia acestui moment în cazul barei subțiri cu extremitățile situate pe curbe spațiale prestabilite, precum și în cazul solidului cu două puncte situate pe curbe spațiale prestabilite și cu al treilea punct situat pe o suprafață dată [21].

Problema determinării reacțiunilor unui solid supus la legături, în mișcare spațială. Transcriindu-se în coordonate vectoriale cilindrice relațiile reprezentînd principiul lui d'Alembert, se obține sistemul de ecuații vectoriale :

$$\left. \begin{aligned} \vec{f}_c + \sum_v \vec{f}_{v_c} + \sum_{\mu} \vec{n}_{\mu_c} &= 0, \\ \vec{f}_a + \sum_v \vec{f}_{v_a} + \sum_{\mu} \vec{n}_{\mu_a} &= 0, \\ \vec{m}_{0_c} + \sum_v \vec{m}_{0_c}(\vec{f}_v) + \sum_{\mu} \vec{m}_{0_c}(\vec{n}_{\mu}) &= 0, \\ \vec{m}_{0_a} + \sum_v \vec{m}_{0_a}(\vec{f}_v) + \sum_{\mu} \vec{m}_{0_a}(\vec{n}_{\mu}) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.43)$$

care se traduc grafic prin închiderea tuturor poligoanelor vectoriale și a poligonului funicular, obținîndu-se din aceste condiții reacțiunile necunoscute.

Se elaborează de asemenea procedeele grafice pentru determinarea reacțiunilor în cele două cazuri particulare menționate și la problema precedentă [20].

Problema determinării distribuției reale a accelerațiilor punctelor unui solid în mișcare spațială, solicitat de un sistem dat de forțe, corespunzătoare unei distribuții date a vitezelor.

Se arată că, plecînd de la principiul lucrului mecanic virtual, prin simple proiecții și construcții de poligoane funiculare pot fi determinate mai întîi componentele cilindrice ale accelerației tangențiale a centrului de greutate, și apoi — prin construcția unor drepte-locuri geometrice — și componentele cilindrice ale accelerației normale a centrului de greutate.

9°. Probleme de statică grafică spațială, în care, transcriindu-se în coordonate cilindrice ecuațiile de echilibru ale unui solid sollicitat de un sistem de forțe spațiale, se obțin următoarele ecuații de echilibru :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\mu} \vec{F}_{\mu_a} + \sum_{\nu} \vec{R}_{\nu_a} &= 0 \\ \sum_{\mu} \vec{F}_{\mu_c} + \sum_{\nu} \vec{R}_{\nu_c} &= 0 \\ \sum_{\mu} \vec{M}_{\mu_a} + \sum_{\nu} \vec{M}_{\nu_a}(\vec{R}_{\nu}) &= 0 \\ \sum_{\mu} \vec{M}_{\mu_c} + \sum_{\nu} \vec{M}_{\nu_c}(\vec{R}_{\nu}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.44)$$

Aceste condiții de echilibru se traduc grafic prin condițiile :

- închiderea liniei forțelor axiale active și de legătură ;
- închiderea poligonului forțelor coplanare active și de legătură ;
- închiderea poligonului funicular corespunzător forțelor coplanare ;
- închiderea poligonului vectorilor momente coplanare ale forțelor active și de legătură ce acționează asupra solidului.

Se elaborează, în continuare, procedeele grafice pentru rezolvarea următoarelor probleme interesind îndeosebi statica construcțiilor [52] :

- determinarea rezultantei și a momentului rezultat al reacțiunilor în cazul solidului încastrat și sollicitat de un sistem de forțe spațiale ;
- echilibrul solidului avînd o articulație fixă, un reazem cu posibilități de deplasare bilaterală și un reazem cu posibilități de deplasare multilaterală ;

- echilibrul solidului avînd o articulație spațială fixă și trei reazeme cu posibilități de deplasare multilaterală (sau trei legături prin fire) ;
- echilibrul solidului avînd șase reazeme cu posibilități de deplasare multilaterală (sau șase legături prin fire) ;
- determinarea eforturilor în grinzile cu zăbrele spațiale.

Astfel, în cazul solidului cu o articulație fixă, cu un reazem cu posibilități de deplasare bilaterală și un reazem cu posibilități de deplasare multilaterală (sau o legătură prin fir), trebuie determinate :

- componentele cilindrice ale reacțiunii articulației : N_{1_c} și N_{1_a} ;
- componentele cilindrice ale reacțiunii reazemului cu posibilități de deplasare bilaterală, coplanară cu doi vectori arbitrari, cunoscuți :

$$\vec{v}_{\sigma} = v_{\sigma_c} \vec{u}_{0_v} + v_{\sigma_a} \vec{n} \quad (\sigma = 1, 2) \quad (2.45)$$

situați într-un plan perpendicular pe direcția posibilă a deplasării ; aceste componente :

$$\vec{N}_{2_c} = \lambda_1 \vec{v}_{1_c} + \lambda_2 \vec{v}_{2_c}, \quad \text{și} \quad \vec{N}_{2_a} = \lambda_1 \vec{v}_{1_a} + \lambda_2 \vec{v}_{2_a} \quad (2.46)$$

vor fi determinate prin cunoașterea coeficienților scalari λ_1 și λ_2 ;

— mărimea reacțiunii \vec{N}_3 a reazemului cu posibilități de deplasare multilaterală (sau a tensiunii firului) avînd direcția dată de versorul cunoscut :

$$\vec{v}_3 = \cos \psi_{v_3} \vec{u}_{0_v} + \sin \psi_{v_3} \vec{n}. \quad (2.47)$$

Ecuația de momente față de dreapta care trece prin articulație și prin reazemul cu posibilități de deplasare bilaterală, conduce la relația :

$$\begin{aligned} N_3 = & \frac{\cos \psi_{12} \left[\left(\sum_{\nu} \vec{M}_{\nu_c} \right) \vec{u}_{0_r} \right] + \sin \psi_{12} \left(\sum_{\nu} M_{\nu_a} \right)}{\cos \psi_{12} \left[r_{13_c} \sin \psi_{v_3} \vec{u}_{0_r} - \frac{\pi}{2} + r_{13_a} \cos \psi_{v_3} \vec{u}_{0_r} + \frac{\pi}{2} \right] \vec{u}_{0_r} + \sin \psi_{12} \left[r_{13_c} \cos \psi_{v_3} \sin \left(\theta_3^v - \theta_{13}^r \right) \right]} \end{aligned} \quad (2.48)$$

care permite, prin simple proiecții, prin construcția unui poligon funicular și prin o împărțire grafică, să se determine N_3 .

Condiția de echilibru pentru momentele coplanare în raport cu articulația fixă :

$$\vec{M}_c(\vec{N}_2) + \sum_{\nu} \vec{M}_{\nu_c} + \vec{M}_c(\vec{N}_3) = 0 \quad (2.49)$$

permite să se determine momentul reacțiunii \vec{N}_2 , a cărui expresie, pe de altă parte, conduce la egalitatea :

$$\begin{aligned} \vec{M}_c(\vec{N}_2) + \lambda_1 \left[v_{1_a} \gamma_{12_c} \vec{u}_{0_r} + \frac{\pi}{2} + v_{1_c} r_{12_a} \vec{u}_{0_v} - \frac{\pi}{2} \right] + \\ + \lambda_2 \left[v_{2_a} r_{12_c} \vec{u}_{0_r} + \frac{\pi}{2} + v_{2_c} r_{12_a} \vec{u}_{0_v} - \frac{\pi}{2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.50)$$

care va da posibilitatea să se determine, prin simpla construcție a unui triunghi vectorial, coeficienții λ_1 și λ_2 .

În fine, ecuațiile de echilibru pentru forțele coplanare și axiale :

$$\sum_{\nu} \vec{F}_{\nu_c} + \vec{N}_{3_c} + \vec{N}_{2_c} + \vec{N}_{1_c} = 0 \quad (2.51)$$

și

$$\sum_{\nu} \vec{F}_{\nu_a} + \vec{N}_{3_a} + \vec{N}_{2_a} + \vec{N}_{1_a} = 0 \quad (2.52)$$

vor permite să se determine și componentele cilindrice ale reacțiunii \vec{N}_1 .

НОВЫЕ ГРАФО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Статья разделяется на две части посвященные соответственно методу пространственных приведенных ускорений первого рода любого порядка и методу векторных цилиндрических координат.

I. Пусть $a_{Mr}^{(n)}$ приведенное ускорение n -го порядка точки M некоторого твердого звена кинематической цепи совершающей сложное пространственное движение, определяемое формулами (1.3), (1.4), где $A_n(\vec{u})$ и A_n даны рекуррентными соотношениями (1.5) и $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$ — вектор углового ускорения.

Имеют место следующие теоремы.

1. Геометрическое место точек M_n^* , определяемых векторным уравнением (1.9), где M -точка произвольной прямой (D^*) (1.10) некоторого твердого звена в сложном пространственном движении — прямая (D_n^*) составляющая с прямой (D^*) комплексный угол $\alpha_n = \theta_n + w\lambda_n$, $w^2 = 0$, выраженный в так называемом винтовом исчислении, разработанным А. П. Котельниковым в [12] и продолженным затем в [13]—[16] и называемым иногда методом дуальных чисел, соотношениями (1.11)—(1.13).

2. Теорема об экстремальном свойстве пространственных приведенных ускорений первого рода любого порядка. Пространственные приведенные ускорения n -го порядка первого рода, введенные в [16] и определяемые соотношением (1.3), обладают экстремальным свойством относящимся к функции (1.12), причем значение параметра λ_n^* дано (1.14).

3. Основная теорема о распределении ускорений различного порядка. Геометрическое место концов пространственных приведенных ускорений n -го порядка первого рода (1.6) точек M прямой (1.7) некоторого твердого тела в сложном пространственном движении — прямая (D_n) перпендикулярная к данной.

Выше приведенные теоремы, а также и некоторые другие, приводят — как это уже было сделано в связи с приведенными ускорениями точек кинематических цепей в плоско параллельном движении [29]—[34] — к методу пространственных приведенных ускорений любого порядка первого рода*) решающему, с некоторыми преимуществами по сравнению с уже известными методами [29], классическую задачу о распределении ускорений различных порядков.

Результаты изложенные в настоящей статье представляют собой вклад в исследование пространственных механизмов графо-аналитичес-

*) Основы метода приведенных ускорений различных родов соответствующих линейным подпространствам n -мерного евклидова пространства изложены в совместной статье Д. Манжерона и акад. Д. С. Тавхелидзе в [36].

ким методом приведенных ускорений. Подчеркивается в особенности кинематическое исследование механизмов схематизированных на рис. 1—5.

II. Метод векторных цилиндрических координат имеет в своей основе разложение свободных векторов на две составляющие (формула (2.1)), так называемые „аксиальная составляющая” и „копланарная составляющая” (рис. 6).

Скользющие же вектора разлагаются по формуле (2.10).

6) Следует затем систематическое изложение применений введенных координат в рамках переработки графической пространственной механики.

NOUVELLES MÉTHODES GRAPHIQUES ET ANALYTIQUES CONCERNANT LA THÉORIE DES MACHINES ET MÉCANISMES

RÉSUMÉ

Cet article est sous-divisé en deux parties consacrées respectivement à la méthode des accélérations réduites d'ordre quelconque de l'espace et à la méthode des coordonnées vectorielles cylindriques.

I. Soit $a_{Mr}^{(n)}$ l'accélération réduite d'ordre n d'un point M situé sur un organe rigide d'une chaîne cinématique animé d'un mouvement général dans l'espace, définie par les formules (1.3), où $A_n(\vec{u})$ et A_n s'expriment par les formules de récurrence (1.4), (1.5) et $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$ en est le vecteur vitesse angulaire. Ont lieu entre autres les théorèmes suivants :

1. Le lieu géométrique des points M_n^* exprimé par l'équation vectorielle (1.9), où M est un point courant situé sur une droite arbitraire (D^*) d'un organe rigide animé d'un mouvement général dans l'espace, est une autre droite (D_n^*) qui forme avec (D^*) l'angle complexe $\alpha_n = \theta_n + w\lambda_n$, $w^2 = 0$, donné dans les symboles du calcul virial [26] par les formules (1.11)—(1.13).

2. Théorème d'extremum concernant les accélérations réduites de première espèce. Les accélérations réduites d'ordre n de l'espace, introduites dans [40] et définies par (1.3), possèdent la propriété de rendre extremum la fonction angulaire (1.12).

3. Théorème fondamental concernant la distribution des accélérations d'ordre quelconque dans la théorie des machines et des mécanismes. Le lieu géométrique des extrémités des accélérations réduites d'ordre n de l'espace relatives aux points d'une droite (D) située sur un organe rigide animé d'un mouvement général dans l'espace est une droite (D_n) perpendiculaire à la droite considérée.

Les théorèmes ci-dessus et d'autres encore conduisent — d'une manière analogue aux résultats acquis concernant la théorie et la pratique des

accélération réduites dans les mouvements parallèles à un plan fixe [14, 28, 34, 35, 39, 61] — à la méthode des accélérations réduites de première espèce qui donne la résolution du problème classique de répartition des accélérations d'ordre quelconque.

Les résultats acquis par la méthode des accélérations réduites constituent une contribution à l'ensemble des méthodes graphiques et analytiques concernant l'étude des mécanismes de l'espace, qui a déjà reçu, dans la littérature de ressort, nombre d'appréciations favorables.

II. La méthode des coordonnées vectorielles cylindriques est basée sur la décomposition d'un vecteur libre dans deux composantes (formule (2.1)), à savoir une „composante axiale” et une „composante coplanaire” (fig. 6), tandis que pour un vecteur glissant on utilise trois composantes (2.10). L'application systématique des coordonnées introduites conduit à l'élaboration fructueuse et complète de la mécanique graphique de l'espace.

BIBLIOGRAFIE

1. Артоболевский И. И., *Современное состояние теории машин и механизмов*. Сб. Труды Второго всесоюзного совещания по основным проблемам теории машин и механизмов. Анализ и синтез механизмов. Машгиз, Москва, 1960, р. 7—23, 196—206.
2. Artobolevski I. I., *Grundlegende Probleme einer modernen Dynamik der Maschinen*. Maschinenbautechnik, 9, 11, 575—589 (1960).
3. Beggs J. S., *The screw Matrix*, Bul. Inst. Polit. Iași, s.n., VI (X), 3—4, 315—322 (1960).
4. Beyer R., *Statics and Dynamics in 3-D Mechanisms. A survey of technique-analytical and graphical — for finding forces and moments in spacial mechanisms*. Transactions of the Sixth Conference on Mechanisms, Purdue University 1960, p. 94—112.
5. Braier A., Enescu I., *Un opérateur quaternionique utilisé dans l'étude des déplacements finis des systèmes rigides*. Bul. Inst. Polit. Iași, s.n., VI (X), 1—2, 61—84 (1960).
6. Bugaievski E., Bogdan R., Pelecudi C., *Sur le problème de la classification des mécanismes de l'espace*. Studii și cercetări de mecanică aplicată, Academia R.P.R., VIII, 2, 407—421 (1957).
7. Denavit J., Hartenberg R. S., *Approximate Synthesis of Spacial Linkages*, ASME, Paper No. 59-A-24, 1—6.
8. Диментберг Ф. М., *Определение положений пространственных механизмов*. Акад. Наук СССР, М., 1950, р. 142.
9. Диментберг Ф. М., Кислицин С. Г., *Применение винтового исчисления к анализу пространственных механизмов*. Сб. Труды. Анализ и Синтез механизмов, Машгиз, Москва, 1960, р. 55—56, 206—207.
10. Federhofer K., *Graphische Kinematik und Kinetostatik des starren räumlichen Systems*. J. Springer, Wien, 1928.
11. Freudenstein F., *Trends in the Kinematics of Mechanisms*. Applied Mechanics Reviews, 12, 9, 1—4 (1959).

12. Goodman T. P., Hain K., *Der Stand der Getriebe — Analyse im Schrifttum des englischen Sprachgebietes*. Konstruktion, 10, 11, 451—454 (1958).
13. Hain K., *Mechanisms Design in Germany*. Vol. Transactions of the Fourth Conference on Mechanisms, Purdue University, 1957, p. 85—104.
14. Ясюлёнис А. И., *Применение „δ”-кругов к ускорениям всякого порядка*. Lietuvos Zemes Ukio Akademijos Moksliniai Darbai, V, 253—259 (1959).
15. Irimiciuc N., Kleper I., *Application de la méthode des coordonnées vectorielles cylindriques dans la théorie des mécanismes et des machines*. Bul. Inst. Polit. Iași, s.n., III (VII), 3—4, 205—210 (1957).
16. Irimiciuc N., *Sur quelques aspects graphiques concernant le mouvement des solides rigides*. Bul. Inst. Polit. Iași, s.n., IV (VIII), 3—4, 302—304 (1958).
17. Иримичук Н., *Графическое решение некоторых задач по геометрии масс в пространстве*. Bul. Inst. Polit. Iași, s.n., VI (X), 1—2, 277—280 (1960).
18. — *Метод векторных цилиндрических координат в графическом изображении алгебры пространственных векторов*. Bul. Inst. Polit. Iași, s.n., III (VII), 3—4, 195—200 (1957).
19. Иримичук Н., Клепер И., *Графическое определение положения центра масс*. Bul. Inst. Polit. Iași, s.n., IV (VIII) 3—4, 305—306 (1958).
20. Иримичук Н., *О задаче определения реакций твердого тела в пространственном движении*. Bul. Inst. Polit. Iași, s.n., VI (X), 3—4, 351—354 (1960).
21. — *О задаче приведения сил инерции твердого тела в пространственном движении*. Bul. Inst. Polit. Iași, s.n., VI (X), 1—2, 281—284 (1960).
22. ** *Итоги Второго Всесоюзного Совещания по основным проблемам теории машин и механизмов*. Акад. Наук СССР, Институт Машиноведения, М. 1958.
23. Калидин Г. С., *О некоторых применениях метричного исчисления в теории механизмов*. Сб. Труды. Цит. в №. 57. Анализ и Синтез механизмов. Машгиз, Москва, 1960, р. 77—80, 208.
24. — *Теория на механизмите и машините*. Държавно Изд. Техника, София, 1960.
25. Кислицин С. Г., Реф. Ж. Механика, Реф. №. 1660, 2, 15 (1960).
26. Котельников А. П., *Винтовое исчисление и некоторые приложения его к геометрии и механике*. Казань, 1895.
27. — *Заметка по графической динамике*. Труды Московского Краснознаменного Института Инж. им. Баумана, 29—30, 3—27 (1937).
28. Левитский Н. И., *Итоги работы секции анализа и синтеза механизмов*. В сб. Итоги, цит. в №. 22, 24—29.
29. — Реф. Ж. Механика, Реф. №. 11194, 9, 12 (1960).
30. Mangeron D., Drăgan C., *A new tensor Method in the Synthesis on three-dimensions Cams with two Degree of Mobility*. Bul. Inst. Polit. Iași, V (IX), 1—2, 331—338 (1959).
31. Mangeron D., Drăgan C., Munteanu O., *Das Studium ebener Getriebe mit niederen kinematischen Paaren, auf der Verfahren reduzierter Beschleunigungen begründet*. Bul. Inst. Polit. Iași, s.n., II (VI), 3—4, 263—281 (1956).
32. Mangeron D., Drăgan C., *Étude des mécanismes de l'espace par la méthode des accélérations réduites. I. Mécanismes de l'espace à quatre organes*. Studii și cercetări de mecanică aplicată, Academia R.P.R., XII, 5 (1961).
33. Mangeron D., Drăgan C., Svijski V., *Eine neue Studienmethode zur Theorie der Mechanismen und Maschinen*. Revue de Mécanique appliquée, II, 145—156 (1957).

34. Манжерон Д., Дрэган К., *Исследование механизмов методом приведенных ускорений*. В сб. Труды, цит. в №. 57, Анализ и Синтез механизмов, Машгиз, Москва, 1960, р. 111—122, 209—210.
35. Манжерон Д., *К графо-аналитическим методам кинематики материальных систем*. Докл. Акад. Наук СССР, 102, 5, 897—898, (1955).
36. Манжерон Д., Тавхелидзе Д. С., *Новый класс пространственных ускорений любого порядка применяемых в теории машин и механизмов*. Bul. Inst. Polit. Iași, s.n., V (IX), 1—2, 303—306 (1959).
37. Манжерон Д., Зильберман Я. С., *Некоторые теоремы касающиеся крестов Котельникова*. Труды Ростовского — на Дону Института Инженеров железнодорожного транспорта (1960).
38. Манжерон Д., *Обобщенные Формулы Сомова об ускорениях высших порядков*. Докл. Акад. Ннук СССР, 102, 4, 705—706 (1955).
39. — *О приведенных ускорениях высших порядков и некоторых их экстремальных свойствах*. Докл. Акад. Наук СССР, 112, 1, 27—28 (1957).
40. — *Пространственное обобщение крестов Котельникова*, Известия Акад. Наук СССР, ОТН, Механика и Машиностроение, I, 168—169 (1960).
41. Mangeron D., Braier A., *Représentation des champs d'accélération par des nombres complexes*. Gaz. Mat. Fiz., A, 7 (60), 10, 535—540 (1955).
42. Mangeron D., Bogdan R., *Research in the Field of Machines and Mechanisms carried out in the Rumanian People's Republic. Future Outcome*. Studii și cercetări de mecanică aplicată, Acad. R.P.R., IX, 4, 1093—1098 (1958).
43. Mangeron D., Drăgan C., *Sur une nouvelle méthode tensorielle de l'étude des mécanismes*. Bul. Inst. Polit. Iași, III (VII), 1—2, 151—164 (1957).
44. Манжерон Д., Дрэган К., *Тензорные Формы основных уравнений цепей и механизмов*. Известия на Математический Институт, БАН, IV, 2, 57—65 (1960).
45. Mangeron D., Bogdan R., *The Second USSR Conference on the Theory of Machines and Mechanisms*. Moscow, march 24—23, 1958, Studii și cercetări de mecanică aplicată, Acad. R.P.R., X, 2, 615—624 (1959).
46. Manolescu N. I., *Sur la méthode de la similitude dans la cinématique des mécanismes planes*. Comunicările științifice ale Institutului de căi ferate „Ch. Gheorghiu-Dej”, 3—10 (1958).
47. Moisil Gr. C., *Dezvoltarea în R.P.R. a teoriei algebrice a schemelor cu contacte și releu*. Automat. și electron., 3—4, 152—160 (1959).
48. Морощкин Ю. Ф., *Основы аналитической теории механизмов*. Труды Сем. по теории машин и механизмов, XIV, 54, 25—50 (1954).
49. Nerge G., *Über den Stand der Analyse u. Synthese von Kurvengetrieben in den USA*. Maschinenbautechnik, 8, 11, 620—621 (1959).
50. Oderfeld J., *Maschinensynthese als Problem aus dem Bereich der Unternehmensforschung. III. Gesamtpolnische Konferenz über Theorie von Maschinen und Getrieben*, Rogów, 8—10. VI, 1961, p. 17—18.
51. Пантелеев С. И., *Кинематическое исследование пространственных механизмов графическим методом*. Известия высших Учебных Заведений. Машиностроение, 11—12, 35—45 (1958).
52. Прокофьев И. П., *Статика сооружений*, Москва, 1950.
53. Рифтин Л. П., *Матричные методы в задачах анализа и синтеза механизмов*, Известия высших учебных заведений. Приборостроение, 5, 124—133 (1958).

54. Study E., *Geometrie der Dynamen*. Teubner, Leipzig, 1903.
55. * * * *Teoria mecanismelor și mașinilor. Structura și cinematica mecanismelor*. Cap. II, 22. Metoda accelerațiilor reduse. Ed. Tehnică, București, 1959, p. 352—354.
56. Terplan E., *Lehre und Forschung auf dem Gebiet der Getriebelehre in Ungarn*. Maschinenbautechnik, 8, 2, 107—110 (1959).
57. * * * *Труды Второго Всесоюзного Совециания по основным проблемам теории машин и механизмов*. Анализ и синтез механизмов. Динамика машин 2. Теория машин автоматического действия и теория точности в машиностроении и приборостроении. Теория передач в машинах. Машгиз, М., 1960, р. 212, 240, 220, 174.
58. Вабичев Н. С., *Графический метод приведения к простейшему виду пространственных систем*. Труды ЛИСИ, 32, (1957).
59. Voinea R., Atanasiu M. C., *Contribuție la l'étude de la structure des chaînes cinématiques*. Bul. Inst. Polit. București, XXII, 1, 3—51 (1960).
60. Wörle H., *Getriebeanalytische und getriebsynthetische Unterlage für den Entwurf zwangläufiger und überschlossener viergelenkiger Raumkurbelgetriebe*. Bul. Inst. Polit. Iași, s.n., VI (X), 1—2, 303—322 (1960).
61. Зильберман Я. С., *Применение метода приведенных ускорений к построению поворотного круга перемены*. Acad. R.P.R., filiala Iași. Studii și cercetări științ., Fizică și Științe tehnice, IX, 1, 39—56 (1958).
62. Зиновьев В. А., *Пространственные механизмы с низшими парами*. Гостехиздат, М., 1952, р. 431.

Primit la 15. V. 1961.