METODE PRACTICE DE INTEGRARE NUMERICĂ A ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE

DE

D. V. IONESCU

(Cluj)

Lucrare prezentată la Colocviul de analiză numerică din 8—13 decembrie 1960, Cluj.

În fizică și în tehnică se întrebuințează foarte des formula de integrare numerică a lui Adams, relativă la nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_6$ în progresie aritmetică cu rația h. Restul în această formulă este de ordinul lui h^7. Observînd că formula lui Adams este în fond o formulă de derivare numerică, în această lucrare se dau alte formule de derivare numerică ce se deduc din expresia diferenței divizate a unei funcții $f(x)$ pe nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_6$, unele din ele fiind duble sau lipsind, sub formă de integrală definită, problemă pe care noi am tratat-o în general în altă lucrare [3].*) Aceste formule de derivare numerică conduc la formule de integrare numerică folosind aceleași noduri $x_0, x_1, \ldots, x_6$ ca la formula lui Adams, însă cu resturi de ordinul lui $h^8, \ldots, h^{12}$ care au fost precizate.

§ 1. Restul în formula de integrare numerică a lui Adams a ecuațiilor diferențiale

1. Să considerăm ecuația diferențială

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

și să notăm cu $y(x)$ integrala ei, care satisface la condiția inițială $y(x_0) = y_0$. Presupunem că s-a demonstrat că integrala $y(x)$ există pe intervalul $[x_0, x_0 + a]$. În acest interval să luăm nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_6$ în progresie aritmetică cu rația h și să presupunem că integrala este cunoscută pe nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_5$. Notînd cu $y_0, y_1, \ldots, y_5$ valorile integralei pe nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_5$ și cu $y'_0, y'_1, \ldots, y'_5$ valorile derivatei $y'(x)$ pe aceleași

*) Primul care a dat această reprezentare, folosind o altă metodă decît în lucrarea [3], a fost L. Tchakaloff [5].

noduri, se ştie că valoarea integralei $y(x)$ pe nodul x_6, este dată aproximativ de *formula lui Adams* [1]

$$y(x_6) \sim y_5 + h\left[y'_5 + \frac{1}{2}\Delta_1 y'_5 + \frac{5}{12}\Delta_2 y'_5 + \frac{3}{8}\Delta_3 y'_5 + \frac{251}{720}\Delta_4 y'_5 + \frac{95}{288}\Delta_5 y'_5\right], \quad (2)$$

unde

$$\Delta_1 y'_s = y'_s - y'_{s-1} \qquad (s = 1, 2, 3, \ldots) \quad (3)$$

$$\Delta_k y'_s = \Delta_{k-1} y'_s - \Delta_{k-1} y'_{s-1} \qquad (k = 2, 3, \ldots;\ s = k, k+1, \ldots).$$

Formula (2) poate să se scrie sub forma

$$y(x_6) = y_5 + h\left[y'_5 + \frac{1}{2}\Delta_1 y'_5 + \ldots + \frac{95}{288}\Delta_5 y'_5\right] + R, \quad (4)$$

unde R este *restul* acestei formule.

W. Tollmien [4, 6] a arătat că R este de ordinul lui h^7, fără însă să determine restul formulei (4).

2. În această lucrare determinăm în primul rînd restul R al formulei de integrare numerică (4) a lui Adams. Pentru aceasta să scriem (4) sub forma

$$\int_{x_5}^{x_6} y'(x)\,dx = h\left[y'_5 + \frac{1}{2}\Delta_1 y'_5 + \ldots + \frac{95}{288}\Delta_5 y'_5\right] + R. \quad (5)$$

Sub forma (5), vedem că restul R al formulei lui Adams nu este altceva decît restul unei *formule de cuadratură* pe intervalul $[x_5, x_6]$ cu nodul x_5 şi cu nodurile exterioare x_0, x_1, x_2, x_3, x_4.

Să presupunem că funcţia $f(x, y)$ din membrul al doilea al ecuaţiei diferenţiale (1), are în dreptunghiul D, definit de inegalităţile

$$(D): \qquad |x - x_0| \leqslant \alpha, \qquad |y - y_0| \leqslant \beta$$

unde $a \leqslant \alpha$, derivate parţiale în raport cu x şi cu y, continue pînă la ordinul al 6-lea.

În aceste condiţii integrala $y(x)$ are derivate succesive pînă la ordinul al 7-lea, care se calculează din ecuaţia diferenţială (1), şi putem scrie

$$\begin{aligned} y'' &= f_1(x, y) \\ y''' &= f_2(x, y) \\ &\cdots\cdots \\ y^{(7)} &= f_6(x, y), \end{aligned} \quad (6)$$

unde funcţiile $f_1(x, y), f_2(x, y), \ldots, f_6(x, y)$ sînt continue în dreptunghiul D.

Acestea fiind precizate, restul formulei de cuadratură (5) a fost determinat de noi în lucrarea [1] şi pus sub formă de integrală definită

$$R = \int_{x_0}^{x_6} \varphi(x)\, y^{(7)}(x)\, dx, \quad (7)$$

unde funcţia $\varphi(x)$ este determinată, continuă şi cu primele patru derivate continue pe intervalul $[x_0, x_6]$. S-a demonstrat că funcţia $\varphi(x)$ este negativă pe intervalul (x_0, x_6) şi că avem

$$\int_{x_0}^{x_6} \varphi(x)\, dx = -\frac{19087}{60480} h^7. \quad (8)$$

Rezultă că restul în formula lui Adams (4) este dat de formula

$$R = \int_{x_0}^{x_6} \varphi(x)\, f_6[x, y(x)]\, dx, \quad (9)$$

iar din formula (8) rezultă o evaluare a valorii absolute a restului R şi anume

$$|R| \leqslant \frac{19087}{60480} h^7 F_6 < 0{,}3156\, h^7 F_6, \quad (10)$$

unde F_6 este o margine superioară a lui $|f(x, y)|$ în dreptunghiul D.

§ 2. Alte formule de integrare numerică de tip Adams cu restul de ordinul lui h^7

3. Formula (4) este o formulă de derivare numerică de gradul al 6-lea de exactitate, care se mai poate scrie sub forma

$$y(x_6) - y(x_5) = \frac{h}{1440}[4277\, y'(x_5) - 7923\, y'(x_4) + 9982\, y'(x_3) - 7298\, y'(x_2) + $$
$$+ 2877\, y'(x_1) - 475\, y'_0(x)] + R. \quad (11)$$

În această formulă avem

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0),\ y'(x_1) = f(x_1, y_1), \ldots, y'(x_5) = f(x_5, y_5).$$

Se pot da şi alte formule de derivare numerică de forma (11), de acelaşi grad de exactitate care să folosească mai puţine valori ale derivatei $y'(x)$ pe noduri, deoarece în general calculul lui $f(x_1, y_1), f(x_2, y_2), \ldots$, este destul de complicat. Aceste formule pot fi, de exemplu, formulele care exprimă diferenţa divizată a funcţiei $y(x)$ pe nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_6$, unul din noduri afară de x_6 fiind socotit dublu, printr-o integrală definită, aşa cum am arătat în lucrarea [3].

Toate formulele pe care le vom da în această lucrare se referă la același număr de noduri $x_0, x_1, \ldots, x_6$ în progresie aritmetică cu rația h, ca și în formula lui Adams.

De exemplu, să considerăm formula de derivare numerică

$$[x_0, x_0, x_1, \ldots, x_6; y] = \int_{x_0}^{x_6} \theta(x)\, y^{(7)}(x)\, dx$$

pentru care s-a demonstrat că funcția $\theta(x)$ este pozitivă pe intervalul (x_0, x_6) și că avem

$$\int_{x_0}^{x_6} \theta(x)\, dx = \frac{60}{7} h^7. \tag{12}$$

Această formulă se mai scrie

$$147\, y(x_0) - 360\, y(x_1) + 450\, y(x_2) - 400\, y(x_3) + 225\, y(x_4) - 72\, y(x_5) +$$
$$+ 10\, y(x_6) + 60\, h y'(x_0) = \int_{x_0}^{x_6} \theta(x)\, y^{(7)}(x)\, dx.$$

Presupunînd că integrala $y(x)$ a fost în prealabil calculată pe nodurile x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, vom avea următoarea formulă de integrare numerică a ecuației diferențiale (1), rezolvînd ecuația (13) în raport cu $y(x_6)$:

$$y(x_6) = -14{,}7\, y_0 + 36\, y_1 - 45\, y_2 + 40\, y_3 - 22{,}5\, y_4 +$$
$$7{,}2\, y_5 - 6\, h f(x_0, y_0) + R \tag{14}$$

În această formulă restul R este determinant de formula

$$R = \frac{1}{10} \int_{x_0}^{x_6} \theta(x) f_6[x, y(x)]\, dx \tag{15}$$

și avem evaluarea

$$|R| \leqslant \frac{6}{7} h^7 F_6 < 0{,}8572\, h^7 F_6. \tag{16}$$

În formula (14) avem avantajul de a avea un singur termen $f(x_0, y_0)$ față de *șase* termeni $f(x_0, y_0), f(x_1, y_1), \ldots, f(x_5, y_5)$ din formula lui Adams (11). În plus formula (14) are drept coeficienți numere zecimale, cu un număr finit de zecimale, ceea ce iar este un avantaj față de formula lui Adams.

Restul în formula de integrare numerică (14) este tot de ordinul lui h^7 ca și în formula lui Adams ; el este evaluat în formula (16) cu un coeficient 0,8572 care este mai mare decît coeficientul 0,3156 din formula lui Adams.

4. În formula de derivare numerică (13) să presupunem că integrala $y(x)$ a fost în prealabil calculată pe nodurile x_1, x_2, x_4, x_5, x_6. Rezolvînd ecuația (13) în raport cu $y(x_3)$, avem următoarea formulă de integrare numerică a ecuației diferențiale (1):

$$y(x_3) = 0{,}3675\, y_0 - 0{,}9\, y_1 + 1{,}125\, y_2 + 0{,}5625\, y_4 - 0{,}18\, y_5 +$$
$$+ 0{,}025\, y_6 + 0{,}15\, h f(x_0, y_0) + R \tag{17}$$

cu restul

$$R = -\frac{1}{400} \int_{x_0}^{x_6} \theta(x) f_6[x, y(x)]\, dx, \tag{18}$$

a cărui evaluare este

$$|R| \leqslant \frac{3}{140} h^7 F_6 < 0{,}0215\, h^7 F_6. \tag{19}$$

Formula (17) este foarte avantajoasă, deoarece coeficienții ei sînt numere zecimale cu un număr finit de zecimale, restul este tot de ordinul lui h^7 ca și în formula lui Adams, însă coeficientul 0,0215 din evaluarea (19) este cu mult mai mic decît coeficientul din formula lui Adams.

5. Formulele de integrare numerică (14) și (17) s-au obținut din formula de derivare numerică (13) în care nodul x_0 a fost socotit dublu. Asemenea formule se pot deduce din formule de derivare numerică, analoage cu formula (13), în care nodul x_1 să fie considerat dublu, sau nodul $x_2, \ldots$. Formula cea mai avantajoasă ca avînd coeficientul numeric din evaluarea restului, cel mai mic, este formula corespunzătoare nodului dublu x_5. Aceasta este

$$-2 y(x_0) + 15\, y(x_1) - 50\, y(x_2) + 100\, y(x_3) - 150\, y(x_4) + 137\, y(x_5) +$$
$$+ 10\, y(x_6) - 60\, h y'(x_5) = \int_{x_0}^{x_6} \theta(x)\, y^{(7)}(x)\, dx \tag{20}$$

pentru care avem

$$\int_{x_0}^{x_6} \theta(x)\, dx = \frac{10}{7} h^7. \tag{21}$$

Rezolvînd ecuația (20) în raport cu $y(x_6)$, obținem formula de integrare numerică în care y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 au fost în prealabil calculate

$$y(x_6) = 0{,}2\, y_0 - 1{,}5\, y_1 + 5 y_2 - 10\, y_3 + 15\, y_4 - 13{,}7\, y_5 + 6 h f(x_5, y_5) + R, \tag{22}$$

în care restul R este determinat de formula

$$R = \frac{1}{10} \int_{x_0}^{x_6} \theta(x) f_6[x, y(x)]\, dx \tag{23}$$

şi pentru care avem evaluarea

$$|R| \leqslant \frac{1}{7} h^7 F_6 < 0{,}149\, h^7 F_6. \tag{24}$$

Se vede bine avantajul formulei (22) cu coeficienţii numere zecimale mici, cu un număr de zecimale finit, faţă de formula (11) a lui Adams. În plus coeficientul numeric din evaluarea (24) a restului este mai mic decît coeficientul numeric din evaluarea restului în formula lui Adams, dat de formula (10).

Dacă presupunem că în prealabil au fost calculate valorile integralei pe nodurile x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, atunci rezolvînd ecuaţia (20) în raport cu $y(x_3)$, avem formula de integrare numerică

$$y(x_3) = 0{,}02 y_0 - 0{,}15 y_1 + 0{,}5 y_2 + 1{,}5 y_4 - 1{,}37 y_5 - 0{,}1 y_6 + 0{,}6 h f(x_5, y_5) + R, \tag{25}$$

în care restul R este dat de formula

$$R = \frac{1}{100} \int_{x_0}^{x_6} \theta(x) f_6[x, y(x)]\, dx \tag{26}$$

şi pentru care avem evaluarea

$$|R| \leqslant \frac{1}{70} h^7 F_6 < 0{,}0143\, h^7 F_6. \tag{27}$$

6. Pentru a calcula pe $y(x_6)$, în formula lui Adams (4) s-a presupus că valorile integralei $y(x)$ pe nodurile x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 au fost în prealabil calculate şi s-a obţinut un rest de ordinul lui h^7.

Să dăm acum formule pentru $y(x_4)$, $y(x_5)$ şi $y(x_6)$ presupunînd că valorile integralei $y(x)$ au fost în prealabil calculate numai pe nodurile x_1, x_2, x_3, restul în aceste formule fiind tot de ordinul lui h^7.

Aceste formule se obţin tot din formule de derivare numerică deduse din expresia unei diferenţe divizate pe noduri multiple [3], pusă sub formă integrală definită.

Pentru $y(x_4)$, avem următoarea formulă

$$y(x_4) = y_0 + 28 y_1 - 28 y_3 + 12 h [f(x_1, y_1) + 3 f(x_2, y_2) + f(x_3, y_3)] + R, \tag{28}$$

în care restul R este dat de formula

$$R = \int_{x_0}^{x_6} \theta(x) f_6[x, y(x)]\, dx, \tag{29}$$

cu

$$\int_{x}^{x_4} \theta(x)\, dx = \frac{h^7}{35} \tag{30}$$

şi pentru care avem următoarea evaluare

$$|R| \leqslant \frac{1}{35} h^7 F_6 < 0{,}0286\, h^7 F_6. \tag{31}$$

Pentru $y(x_5)$, avem următoarea formulă

$$y(x_5) = 16 y_0 + 405 y_1 - 80 y_2 - 340 y_3 + 60 h [3 f(x_1, y_1) + 8 f(x_2, y_2) + 2 f(x_3, y_3)] + R \tag{32}$$

în care restul este dat de formula

$$R = \int_{x_0}^{x_5} \theta(x) f_6[x, y(x)]\, dx, \tag{33}$$

cu

$$\int_{x_0}^{x_5} \theta(x)\, dx = \frac{4}{7} h^7, \tag{34}$$

de unde rezultă următoarea evaluare

$$|R| \leqslant \frac{4}{7} h^7 F_6 < 0{,}5714\, h^7 F_6. \tag{35}$$

Pentru $y(x_6)$ avem următoarea formulă

$$y(x_6) = 100 y_0 + 2376 y_1 - 675 y_2 - 1800 y_3 + 60 h [18 f(x_1, y_1) + 45 f(x_2, y_2) + 10 f(x_3, y_3)] + R, \tag{36}$$

unde

$$R = \int_{x_0}^{x_6} \theta(x) f_6[x, y(x)]\, dx, \tag{37}$$

cu

$$\int_{x_0}^{x_6} \theta(x)\, dx = \frac{30}{7} h^7,$$

de unde rezultă următoarea evaluare

$$|R| \leqslant \frac{30}{7} h^7 F_6 < 4{,}2858\, h^7 F_6. \tag{39}$$

§. 3. Formule de integrare numerică de tip Adams, cu nodurile $x_0, x_1 \ldots x_6$ sau cu un număr mai mic de noduri avînd restul de ordinul lui h^8

7. Formula

$$[x_0, x_0, x_1, x_1, x_2, \ldots, x_6; y] = \int_{x_0}^{x_6} \theta(x)\, y^{(8)}(x)\, dx,$$

în care funcţia $\theta(x)$ a fost determinantă în lucrarea [3] ne dă de asemenea formule de integrare numerică a ecuaţiei diferenţiale (1), mai practice decît formula de integrare numerică a lui Adams (11).

Formula de mai sus conduce la următoarea formulă de derivare numerică

$$-207\, y(x_0) - 102\, y(x_1) + 450\, y(x_2) - 200\, y(x_3) + 75\, y(x_4) - 18\, y(x_5) +$$

$$+ 2\, y(x_6) - 60\, h\,[y'(x_0) + 6\, y'(x_1)] = \int_{x_0}^{x_6} \theta(x)\, y^{(8)}(x)\, dx. \qquad (40)$$

Să presupunem că funcţia $f(x, y)$ din ecuaţia diferenţială (1) are derivate parţiale succesive în raport cu x şi cu y pînă la ordinul al 7-lea, continue în dreptunghiul D. În acest caz integrala $y(x)$ a ecuaţiei diferenţiale (1) are derivate succesive continue pe intervalul $[x_0, x_0 + a]$ pînă la ordinul 8 şi la formulele (6) de la nr. 2 putem adăuga astfel formula

$$y^{(8)}(x) = f_7(x, y) \qquad (41)$$

funcţia $f_7(x, y)$ fiind continuă în dreptunghiul D.

Să presupunem, ca în ipoteza ce conduce la formula lui Adams propriuzisă, că integrala $y(x)$ a ecuaţiei diferenţiale (1) care satisface la condiţia iniţială $y(x_0) = y_0$, a fost calculată în prealabil pe nodurile x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Atunci rezolvînd ecuaţia (40) în raport cu $y(x_6)$, avem formula de integrare numerică a ecuaţiei diferenţiale (1)

$$y(x_3) = 103{,}5\, y_0 + 51\, y_1 - 225\, y_2 + 100\, y_3 - 37{,}5\, y_4 + 9\, y_5 +$$

$$+ 30\, h\,[f(x_0, y_0) + 6\, f(x_1, y_1)] + R, \qquad (42)$$

care foloseşte un singur termen $f(x_1, y_1)$, în general greu de calculat, şi pentru care restul R este dat de formula

$$R = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_6} \theta(x)\, f_7[x, y(x)]\, dx. \qquad (43)$$

Avem următoarea evaluare pentru $|R|$,

$$|R| \leqslant \frac{15}{28}\, h^8 F_7 < 0{,}5358\, h^8 F_7. \qquad (44)$$

Dacă presupunem că integrala $y(x)$ a ecuaţiei diferenţiale (1), care satisface la condiţia $y(x_0) = y_0$ a fost calculată în prealabil pe nodurile x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, atunci obţinem următoarea formulă de integrare numerică a ecuaţiei diferenţiale (1), rezolvînd ecuaţia (40) în raport cu $y(x_3)$:

$$y(x_3) = -1{,}035\, y_0 - 0{,}51\, y_1 + 2{,}25\, y_2 + 0{,}375\, y_4 - 0{,}09\, y_5 + 0{,}01\, y_6 -$$

$$- 0{,}3\, h\,[f(x_0, y_0) + 6\, f(x_1, y_1)] + R, \qquad (45)$$

unde

$$R = -\frac{1}{200}\int_{x_0}^{x_6} \theta(x)\, f_7[x, y(x)]\, dx. \qquad (37)$$

Avem următoarea evaluare

$$|R| \leqslant \frac{3}{560}\, h^8 F_7 < 0{,}0054\, h^8 F_7. \qquad (47)$$

8. Formulele de integrare numerică (42) şi (45) s-au dedus din formula care exprimă diferenţa divizată a funcţiei $y(x)$ pe nodurile x_0, $x_1, \ldots, x_6$, nodurile x_0 şi x_1 fiind duble, printr-o integrală definită. Dacă presupunem că nodurile x_4 şi x_5 sînt duble, sîntem conduşi la formula de derivare numerică

$$y(x_0) - 10\, y(x_1) + 50\, y(x_2) - 200\, y(x_3) - 125\, y(x_4) + 274\, y(x_5) +$$

$$+ 10\, y(x_6) - 60\, h\,[5\, y'(x_4) + 2 y'(x_5)] = \int_{x_0}^{x_6} \theta(x)\, y^{(8)}(x)\, dx. \qquad (48)$$

Presupunînd y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 calculate în prealabil, avem următoarea formulă de integrare numerică

$$y(x_6) = -0{,}1\, y_0 + y_1 - 5\, y_2 + 20\, y_3 + 12{,}5\, y_4 - 27{,}4\, y_5 +$$

$$+ 6\, h\,[5 f(x_4, y_4) + 2\, f(x_5, y_5)] + R, \qquad (49)$$

în care

$$R = \frac{1}{10}\int_{x_0}^{x_6} \theta(x)\, y^{(8)}(x)\, dx.$$

Deoarece

$$\int_{x_0}^{x_6} \theta(x)\, dx = \frac{10}{28}, \qquad (50)$$

rezultă că

$$|R| \leqslant \frac{1}{28}\, h^8 F_7 < 0{,}0358\, h^8 F^7. \qquad (51)$$

Formula (49) foloseşte valorile lui $f(x, y)$ pe nodurile x_4 şi x_5 şi prin aceasta are un dezavantaj faţă de formula (45) care foloseşte valoarea lui $f(x, y)$ numai pe nodul x_1. În schimb coeficientul din evaluarea (51) a lui $|R|$ este mai mic decît coeficientul corespunzător al evaluării (44).

Dacă presupunem că s-a calculat în prealabil integrala $y(x)$ pe nodurile x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, atunci $y(x_3)$ se obţine rezolvînd ecuaţia (48) în raport cu $y(x_3)$ şi avem următoarea formulă de integrare numerică

$$y(x_3) = 0{,}005\, y_0 - 0{,}05\, y_1 + 0{,}25\, y_2 - 0{,}625\, y_4 + 1{,}37\, y_5 + 0{,}05\, y_6 -$$

$$- 0{,}3\, h\,[5\, f(x_4, y_4) + 2\, f(x_5, y_5)] + R, \qquad (52)$$

în care

$$R = -\frac{1}{200}\int_{x_0}^{x_6} \theta(x)\, f_7[x, y(x)]\, dx \qquad (53)$$

şi pentru care avem

$$|R| \leqslant \frac{1}{560} h^8 f_7 < 0{,}0018\, h^8 F_7. \tag{54}$$

9. Ca şi la nr. **6**, putem obţine formule pentru calculul lui $y(x_4)$, $y(x_5)$ $y(x_6)$ cu ajutorul valorilor integralei $y(x)$ pe nodurile x_1, x_2, x_3, în prealabil calculate, cu ajutorul următoarelor formule:

1°. Pentru $y(x_4)$, avem

$$y(x_4) = \frac{1}{3}[47\, y_0 + 192\, y_1 - 108\, y_2 - 128\, y_3] + 4h[f(x_0, y_0) + $$
$$+ 12\, f(x_1, y_1) + 18\, f(x_2, y_2) + 4\, f(x_3, y_3)] + R, \tag{55}$$

în care restul este

$$R = \frac{1}{3}\int_{x_0}^{x_4} \theta(x) f_7[x, y(x)]\, dx \tag{56}$$

şi pentru care avem următoarea evaluare

$$|R| \leqslant \frac{1}{70} h^8 F_7 < 0{,}0143\, h^8 F_7. \tag{57}$$

2°. Pentru $y(x_5)$, avem

$$y(x_5) = \frac{1}{3}[928\, y_0 + 3375\, y_1 - 2400\, y_2 - 1900\, y_3)] + 20\, h[4\, f(x_0, y_0) + $$
$$+ 45 f(x_1, y_1) + 60 f(x_2, y_2) + 10\, f(x_3, y_3)] + R, \tag{58}$$

în care restul este

$$R = \frac{1}{3}\int_{x_0}^{x_5} \theta(x) f_7[x, y(x)]\, dx \tag{59}$$

şi pentru care avem evaluarea

$$|R| \leqslant \frac{5}{14} h^8 F_7 < 0{,}3572\, h^8 F_7. \tag{60}$$

3°. Pentru $y(x_6)$, avem

$$y(x_6) = 2300\, y_0 + 7776\, y_1 - 6075\, y_2 - 4000 y_3 + 60\, h[10\, f(x_0, y_0) + $$
$$+ 108 f(x_1, y_1) + 135 f(x_2, y_2) + 20 f(x_3, y_3)] + R, \tag{61}$$

în care restul este

$$R = \int_{x_0}^{x_6} \theta(x) f_7[x, y(x)]\, dx \tag{62}$$

şi pentru care avem evaluarea

$$|R| \leqslant \frac{35}{14} h^8 F_7 < 3{,}2143\, h^8 F_7. \tag{63}$$

§ 4. Formule de integrare numerică de tip Adams cu nodurile $x_0, x_1, \cdots, x_6$ sau cu un număr mai mic de noduri, avînd restul de ordinul lui h^9

10. Formula care exprimă diferenţa divizată a funcţiei $y(x)$, pe nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_6$, nodurile x_0, x_1, x_2 fiind duble, printr-o integrală definită, este de forma

$$[x_0, x_0, x_1, x_1, x_2, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6; y] = \int_{x_0}^{x_6} \theta(x)\, y^{(9)}(x)\, dx,$$

în care funcţia $\theta(x)$ a fost determinată şi studiată în lucrarea [3]. Ea conduce la următoarea formulă de derivare numerică

$$237\, y(x_0) + 924\, y(x_1) - 825\, y(x_2) - 400\, y(x_3) + 75\, y(x_4) - 12\, y(x_5) + $$
$$+ y(x_6) + 60\, h[y'(x_0) + 12\, y'(x_1) + 15\, y'(x_2)] = \int_{x_0}^{x_6} \theta(x)\, y^{(9)}(x)\, dx, \tag{64}$$

în care avem

$$\int_{x_0}^{x_6} \theta(x) dx = \frac{5}{21} h^9. \tag{65}$$

Să aplicăm această formulă la integrarea numerică a ecuaţiei diferenţiale (1). Vom presupune că funcţia $f(x, y)$ are derivate parţiale în raport cu x şi cu y, pînă la ordinul 8, continue în dreptunghiul D. În acest caz putem adăuga la formulele (6) şi (41) formula

$$y^{(9)}(x) = f_8(x, y), \tag{66}$$

funcţia $f_8(x, y)$ fiind continuă în dreptunghiul D.

Presupunînd că integrala $y(x)$ a fost calculată în prealabil pe nodurile x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, formula (64) conduce la următoarea formulă de integrare numerică pentru $y(x_6)$

$$y(x_6) = -237\, y_0 - 924\, y_1 + 825\, y_2 + 400\, y_3 - 75\, y_4 + 12\, y_5 - $$
$$- 60\, h[f(x_0, y_0) + 12 f(x_1, y_1) + 15\, f(x_2, y_2)] + R, \tag{67}$$

în care restul este dat de formula

$$R = \int_{x_0}^{x_6} \theta(x)\, f_8[x, y(x)]\, dx \tag{68}$$

şi pentru care avem evaluarea

$$|R| \leqslant \frac{5}{21} h^9 F_8 < 0{,}2381\, h^9 F_8, \tag{69}$$

unde F_8 este o margine superioară a lui $|f_8(x, y)|$ în dreptunghiul D.

Presupunînd că integrala $y(x)$ a fost calculată în prealabil pe nodurile x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, formula (64) conduce la următoarea formulă de derivare numerică :

$$y(x_3) = 0{,}5925\, y_0 + 2{,}31\, y_1 - 2{,}0625\, y_2 + 0{,}1875\, y_4 - 0{,}03\, y_5 + \\ + 0{,}0025\, y_6 + 0{,}15\, h\,[f(x_0,y_0) + 12 f(x_1,y_1) + 15 f(x_2,y_2)] + R, \quad (70)$$

în care restul este dat de formula

$$R = -\frac{1}{400}\int_{x_0}^{x_6} \theta(x)\, f_8[x,\, y(x)]\, dx \quad (71)$$

şi avem evaluarea

$$|R| \leqslant \frac{1}{1680}\, h^9 F_8 < 0{,}000596\, h^9 F_8. \quad (72)$$

11. În formula de derivare numerică (64) nodurile x_0, x_1, x_2 sînt duble. Cea mai avantajoasă formulă de acest tip este aceea în care nodurile x_3, x_4, x_5 sînt duble. Această formulă este următoarea

$$- y(x_0) + 15\, y(x_1) - 150\, y(x_2) - 900\, y(x_3) + 525\, y(x_4) + 501\, y(x_5) + \\ + 10\, y(x_6) - 60\, h\,[10\, y'(x_3) + 15\, y'(x_4) + 3\, y'(x_5)] = \int_{x_0}^{x_6} \theta(x)\, y^{(9)}(x)\, dx, \quad (73)$$

pentru care avem

$$\int_{x_0}^{x_6} \theta(x)\, dx = \frac{5}{42}\, h^9. \quad (74)$$

Formula (73) conduce la două formule de integrare numerică.

1°. Presupunînd că integrala $y(x)$ a fost calculată în prealabil pe nodurile x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, avem

$$y(x_6) = 0{,}1\, y_0 - 1{,}5\, y_1 + 15\, y_2 + 90\, y_3 - 52{,}5\, y_4 - 50{,}1\, y_5 + \\ + 6h\,[10 f(x_3,\, y_3) + 15 f(x_4,\, y_4) + 3 f(x_5,\, y_5)] + R, \quad (75)$$

în care restul este dat de formula

$$R = \frac{1}{10}\int_{x_0}^{x_6} \theta(x)\, f_8[x,\, y(x)]\, dx \quad (76)$$

şi pentru care avem evaluarea

$$|R| \leqslant \frac{1}{84}\, h^9 F_8 < 0{,}012\, h^9 F_8. \quad (77)$$

2°. Presupunînd că integrala $y(x)$ a fost calculată în prealabil pe nodurile x_1, x_3, x_4, x_5, x_6 avem următoarea formulă de integrare numerică pentru calculul lui $y(x_2)$

$$y(x_2) = \frac{1}{3}\,[-0{,}02\, y_0 + 0{,}3\, y_1 - 18 y_3 + 10{,}5\, y_4 + 10{,}02\, y_5 + 0{,}2\, y_6] - \\ - 0{,}4\, h\,[10 f(x_3,\, y_3) + 15 f(x_4,\, y_4) + 3 f(x_5,\, y_5)] + R, \quad (78)$$

unde restul este determinat de formula

$$R = -\frac{1}{150}\int_{x_0}^{x_6} \theta(x)\, f_8[x,\, y(x)]\, dx \quad (79)$$

şi avem evaluarea

$$|R| \leqslant \frac{1}{1260}\, h^9 F_8 < 0{,}000794\, h^9 F_8. \quad (80)$$

12. S-au dat mai sus formulele de integrare numerică (67), (75) şi (70) pentru ecuaţia diferenţială (1), presupunînd că integrala $y(x)$ a fost calculată pe 5 noduri x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sau x_1, x_2, x_4, x_5, x_6 restul acestor formule fiind de ordinul lui h^9.

Vom da acum formule de integrare numerică pentru ecuaţia diferenţială (1), presupunînd că integrala $y(x)$ a fost calculată numai pe noduri x_1, x_2, x_3, x_4, cu restul tot de ordinul lui h^9. Aceste formule sînt :

1°. Pentru $y(x_5)$, avem

$$y(x_5) = \frac{1}{3}[-247\, y_0 - 1425\, y_1 + 300\, y_2 + 1300\, y_3 + 75\, y_4] - \\ - 20\, h\,[f(x_0,\, y_0) + 15 f(x_1,\, y_1) + 30 f(x_2,\, y_2) + 10 f(x_3,\, y_3)] + R, \quad (81)$$

în care restul este dat de formula

$$R = \frac{1}{3}\int_{x_0}^{x_6} \theta(x)\, f_8[x,\, y(x)]\, dx \quad (82)$$

şi pentru care avem evaluarea

$$|R| \leqslant \frac{5}{126}\, h^9 F_8 < 0{,}03969\, h^9 F_9. \quad (83)$$

2°. Pentru $y(x_6)$, avem

$$y(x_6) = -1225\, y_0 - 6624\, y_1 + 2025\, y_2 + 5600\, y_3 + 225\, y_4 - \\ - 60\, h\,[5 f(x_0,y_0) + 72 f(x_1,\, y_1) + 135 f(x_2,\, y_2) + 40 f(x_3,\, y_3)] + R, \quad (84)$$

restul fiind dat de formula

$$R = \int_{x_0}^{y_6} \theta(x) f_8 [s, y(x)] \, dx \tag{85}$$

şi pentru care avem evaluarea

$$| R | \leqslant \frac{5}{7} h^9 F_8 < 0{,}7143 \, h^9 F_8. \tag{86}$$

§ 5. Formule de integrare numerică de tip Adams cu nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_3$ sau cu un număr mai mic de noduri, avînd restul de ordinul lui h^{10}

13. Formula

$$[x_0, x_0, x_1, x_1, x_2, x_2, x_3, x_3, x_4, x_5, x_6 ; y] = \int_{x_0}^{x_6} \theta(x) y^{(10)}(x) \, dx,$$

în care funcţia $\theta(x)$ a fost determinată în lucrarea [3], conduce la următoarea formulă de derivare numerică

$$- 257 \, y(x_0) - 1926 \, y(x_1) - 225 \, y(x_2) + 2200 \, y x_3) + 225 \, y(x_2) - 18 \, y(x_5) +$$
$$+ y(x_6) - 60 \, h \, [y'(x_0) + 18 \, y'(x_1) + 45 \, y' (x_2) + 20 \, y' (x_3)] =$$
$$= \int_{x_0}^{x_6} \theta(x) \, y^{(10)}(x) \, dx \tag{87}$$

în care

$$\int_{x_0}^{x_6} \theta(x) \, dx = \frac{h^{10}}{14}. \tag{88}$$

Să presupunem în ecuaţia diferenţială (1) că funcţia $f(x,y)$ are derivate parţiale în raport cu x şi y pînă la ordinul 9, continue în dreptunghiul D. În acest caz integrala $y(x)$ are derivată de ordinul 10, şi putem alătura la formulele (6), (41), (66) formula

$$y^{(10)}(x) = f_9(x, y), \tag{89}$$

funcţia $f_9(x, y)$ fiind continuă în dreptunghiul D.

1°. Presupunînd că integrala $y(x)$ a fost calculată în prealabil pe nodurile x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, din formula (87) deducem următoarea formulă de integrare numerică pentru calculul lui $y(x_6)$

$$y(x_6) = 257 \, y + 1296 \, y + 225 \, y_2 - 2200 \, y_2 - 225 \, y_4 + 18 y_5 +$$
$$+ 60 \, h [f(x_0, y_0) + + 18 \, f(x_1, y_1) + 45 \, f(x_2, y_2) + 20 \, f(x_3, y_3)] + R, \tag{90}$$

în care restul R este dat de formula

$$R = \int_{x_0}^{x_6} \theta(x) f_9 [x, y(x)] \, dx \tag{91}$$

şi pentru care avem evaluarea

$$| R | \leqslant \frac{1}{14} h^{10} F_9 < 0{,}0715 \, h^{10} F_9, \tag{92}$$

unde F_9 este o margine superioară a lui $|f_9(x, y)|$ în dreptunghiul D.

2°. Presupunînd că integrala $y(x)$ a fost calculată în prealabil pe nodurile x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, avem următoarea formulă de integrare numerică pentru $y(x_4)$

$$y(x_4) = \frac{1}{9} [10{,}28 \, y_0 + 77{,}04 \, y_1 + 9 \, y_2 - 88 \, y_3 + 0{,}72 \, y_5 - 0{,}04 \, y_6] +$$
$$+ \frac{1}{3} h \, [0{,}8 f(x_0, y_0 y + 14{,}4 f(x_1, y_1) + 36 f(_2, y_2) + 16 f(x_3, y_3)] + R, \tag{93}$$

pentru care restul este determinat de formula

$$R = \frac{1}{225} \int_{x_0}^{x_6} \theta(x) f_9 [x, y(x)] \, dx \tag{94}$$

şi avem evaluarea

$$| R | \leqslant \frac{1}{3150} h^{10} F_9 < 0{,}000318 \, h^{10} F_9. \tag{95}$$

14. Cea mai avantajoasă formulă de derivare numerică de tipul (87) este cea în care nodurile x_2, x_3, x_4, x_5 sînt duble. Ea conduce la următoarea formulă de integrare numerică pentru $y(x_6)$, presupunînd că integrala $y(x)$ a fost calculată în prealabil pe nodurile x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 :

$$y(x_6) = - 0{,}2 \, y_0 + 6 \, y_1 + 145 \, y_2 + 120 \, y_3 - 195 \, y_4 - 74{,}8 \, y_5 +$$
$$+ 12 \, h \, [5 \, f(x_2, y_2) + 20 \, f(x_3, y_3) + 15 \, f(x_4, y_4) + 2 \, f(x_5, y_5)] + R, \tag{96}$$

în care restul este determinat de formula

$$R = \frac{1}{5} \int_{x_0}^{x_6} \theta(x) f_9 [x, y(x)] \, dx \tag{97}$$

şi pentru care avem următoarea evaluare

$$| R | \leqslant \frac{1}{210} h^{10} F_9 < 0{,}00477 \, h^{10} F_9. \tag{98}$$

Presupunînd că integrala $y(x)$ a fost calculată în prealabil pe nodurile x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, avem următoarea formulă pentru $y(x_1)$

$$y(x_1) = \frac{1}{3}[0{,}1\,y_0 - 72{,}5\,y_2 - 60\,y_3 + 97{,}5\,y_4 + 37{,}4\,y_5 + 0{,}5\,y_6] -$$

$$- 2h[5f(x_2, y_2) + 20f(x_3, y_3) + 15f(x_4, y_4) + 2f(x_5, y_5)] + R, \tag{99}$$

restul R fiind determinat de formula

$$R = -\frac{1}{30}\int_{x_0}^{x_6} \theta(x)\, f_9[x, y(x)]\, dx \tag{100}$$

şi pentru care avem următoarea evaluare

$$|R| \leqslant \frac{1}{1260} h^{10}F_9 < 0{,}000794\, h^{10}F_9. \tag{101}$$

15. S-au obţinut formulele de integrare numerică (90), (96), (99) pentru calculul integralei ecuaţiei diferenţiale (1) pe nodul x_6 sau x_1, presupunînd că integrala $y(x)$ a fost calculată în prealabil pe 5 noduri x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sau x_2, x_3, x_4, x_5, x_6.

Vom da acum formule pentru calculul lui $y(x_5)$ şi $y(x_6)$ presupunînd că integrala $y(x)$ a fost calculată în prealabil pe 4 noduri x_1, x_2, x_3, x_4. Aceste formule sînt următoarele :

1°. Pentru nodul x_5, avem

$$y(x_5) = \frac{1}{3}[65{,}5\,y_0 + 575\,y_1 + 300\,y_2 - 700\,y_3 - 237{,}5\,y_4] + 5h[f(x_0, y_0) +$$

$$+ 20f(x_1, y_1) + 60f(x_2, y_2) + 40f(x_3, y_3) + 5f(x_4, y_4)] + R, \tag{102}$$

unde restul este determinat de formula

$$R = \frac{1}{6}\int_{x_0}^{x_5} \theta(x)\, f_9[x, y(x)]\, dx \tag{103}$$

şi pentru care avem evaluarea

$$|R| \leqslant \frac{1}{252} h^{10}F_9 < 0{,}00397\, h^{10}F_9. \tag{104}$$

2°. Pentru nodul x_6, avem

$$y(x_6) = 650\,y_0 + 5376\,y_1 + 2025\,y_2 - 6400\,y_3 - 1650\,y_4 + 30h[5f(x_0, y_0) +$$

$$+ 96f(x_1, y_1) + 270f(x_2, y_2) + 160f(x_3, y_3) + 15f(x_4, y_4)] + R, \tag{105}$$

în care restul R este determinat de formula

$$R = \int_{x_0}^{x_6} \theta(x)\, f_9[x, y(x)]\, dx \tag{106}$$

şi avem evaluarea

$$|R| \leqslant \frac{1}{7} h^{10}F_9 < 0{,}1429\, h^{10}F_9. \tag{107}$$

§ 6. Formule de integrare numerică de tip Adams cu nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_6$ avînd restul de ordinul lui h^{11}

16. Formula

$$[x_0, x_0, x_1, x_1, x_2, x_2, x_3, x_3, x_4, x_4, x_5, x_6; y] = \int_{x_0}^{x_6} \theta(x)\, y^{(11)}(x)\, dx,$$

în care funcţia $\theta(x)$ a fost determinată în lucrarea [3], conduce la următoarea formulă de derivare numerică

$$136\,y(x_0) + 1524\,y(x_1) + 1575\,y(x_2) - 2000\,y(x_3) - 1200\,y(x_4) - 36\,y(x_5) +$$

$$+ y(x_6) + 30h[y'(x_0) + 24\,y'(x_1) + 90\,y'(x_2) + 80\,y'(x_3) +$$

$$+ 15\,y'(x_4)] = \int_{x_0}^{x_6} \theta(x)\, y^{(11)}(x)\, dx \tag{108}$$

în care funcţia $\theta(x)$ este pozitivă pe intervalul (x_0, x_6) şi avem

$$\int_{x_0}^{x_6} \theta(x) dx = \frac{1}{77} h^{11} \tag{109}$$

care conduce la două formule de integrare numerică.

Să presupunem că în ecuaţia diferenţială (1), funcţia $f(x, y)$ are derivate parţiale în raport cu x şi cu y, pînă la ordinul 10, continue în dreptunghiul D. În acest caz integrala ecuaţiei diferenţiale (1) are derivate succesive pînă la ordinul 11, continue pe intervalul $[x_0, x_0 + a]$ şi la formulele (6), (41), (66), (89) putem adăuga formula

$$y^{(11)}(x) = f_{10}(x, y), \tag{110}$$

funcţia $f_{10}(x, y)$ fiind continuă în dreptunghiul D.

1°. Să presupunem, ca şi în cazul formulei lui Adams, că integrala $y(x)$ a fost calculată în prealabil pe nodurile x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Atunci din formula (108) deducem formula de integrare numerică

$$y(x_6) = -136\,y_0 - 1524\,y_1 - 1575\,y_2 + 2000\,y_3 + 1200\,y_4 + 36\,y_5 - $$
$$- 30\,h\,[f(x_0, y_0) + 24 f(x_1, y_1) + 90 f(x_2, y_2) + 80 f(x_3, y_3) +$$
$$+ 15 f(x_4, y_4)] + R, \tag{111}$$

în care restul este determinat de formula

$$R = \int_{x_0}^{x_6} \theta(x) f_{10}[x, y(x)]\,dx \tag{112}$$

şi avem

$$|R| \leqslant \frac{1}{77} h^{11} F_{10} < 0{,}01299\, h^{11} F_{10}, \tag{113}$$

unde F_{10} este o margine superioară a lui $|f_{10}(x, y)|$ în dreptunghiul D.

2°. Să presupunem că integrala ecuaţiei diferenţiale (1) a fost calculată în prealabil pe nodurile x_1, x_2, x_3, x_4, x_6. Atunci pentru $y(x_5)$ avem formula de integrare numerică, dedusă tot din formula (108)

$$y(x_5) = \frac{1}{9}[34\,y_0 + 381\,y_1 + 393{,}75\,y_2 - 500\,y_3 - 300\,y_4 + 0{,}25\,y_6] +$$
$$+ \frac{1}{3} h\,[2{,}5 f(x_0, y_0) + 60 f(x_1, y_1) + 225 f(x_2, y_2) + 200 f(x_3, y_3) +$$
$$+ 37{,}5 f(x_4, y_4)] + R, \tag{114}$$

în care restul este determinat de formula

$$R = -\frac{1}{36}\int_{x_0}^{x_6} \theta(x) f_{10}[x, y(x)]\,dx \tag{115}$$

şi avem evaluarea

$$|R| \leqslant \frac{1}{2772} h^{11} F_{10} < 0{,}0003608\, h^{11} F_{10}. \tag{116}$$

17. În formula de derivare numerică (108) nodurile x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, sînt duble. Obţinem o formulă mai avantajoasă luînd nodurile x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 duble. Aceasta, presupunînd că $y(x)$ a fost în prealabil calculată pe nodurile x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, conduce la formula de integrare numerică

$$y(x_6) = y_0 + 101\,y_1 + 425\,y_2 - 425\,y_4 - 101\,y_5 + 30\,h\,[f(x_1, y_1) +$$
$$+ 10 f(x_2, y_2) + 20 f(x_3, y_3) + 10 f(x_4, y_4) + f(x_5, y_5)] + R, \tag{117}$$

în care restul este determinat de formula

$$R = \int_{x_0}^{x_6} \theta(x) f_{10}[x, y(x)]\,dx \tag{118}$$

şi pentru care avem următoarea evaluare

$$|R| \leqslant \frac{1}{462} h^{11} F_{10} < 0{,}002165\, h^{11} F_{10}. \tag{119}$$

§ 7. Formule de integrare numerică de tip Adams cu nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_6$ avînd restul de ordinul lui h^{12}

18. Formula

$$[x_0, x_0, x_1, x_1, x_2, x_2, x_3, x_3, x_4, x_4, x_5, x_5, x_6; y] = \int_{x_0}^{x_6} \theta(x)\, y^{(12)}(x)\,dx$$

în care funcţia $\theta(x)$ a fost determinată şi studiată în lucrarea [3], conduce la formula de derivare numerică

$$-28{,}4\,y(x_0) - 426\,y(x_1) - 825\,y(x_2) + 400\,y(x_3) + 750\,y(x_4) + 128{,}4\,y(x_5) +$$
$$+ y(x_6) - 6\,h\,[y'(x_0) + 30\,y'(x_1) + 150\,y'(x_2) + 200\,y'(x_3) + 75\,y'(x_4) + 6\,y'(x_5)] =$$
$$= \int_{x_0}^{x_6} \theta(x)\, y^{(12)}(x)\,dx, \tag{120}$$

în care

$$\int_{x_0}^{x_6} \theta(x)\,dx = \frac{1}{924} h^{12} \tag{121}$$

conduce la o formulă de integrare numerică.

Să presupunem în ecuaţia diferenţială (1) că funcţia $f(x, y)$ are derivate parţiale în raport cu x şi cu y pînă la ordinul 11, continue în dreptunghiul D. Atunci integrala ecuaţiei diferenţiale (1) are derivate succesive pînă la ordinul 12, şi la formulele (6), (41), (66), (89), (110) putem alătura formula

$$y^{(12)}(x) = f_{11}(x, y), \tag{112}$$

funcţia $f_{11}(x, y)$ fiind continuă în dreptunghiul D.

Să presupunem că integrala $y(x)$ a ecuaţiei diferenţiale (1) a fost calculată în prealabil pe nodurile x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Atunci din formula (120) deducem următoarea formulă de integrare numerică

$$y(x_6) = 28{,}4\,y_0 + 426\,y_1 + 825\,y_2 - 400\,y_3 - 750\,y_4 - 128{,}4\,y_5 +$$
$$+ 6\,h\,[f(x_0, y_0) + 30 f(x_1, y_1) + 150 f(x_2, y_2) + 200 f(x_3, y_3) +$$
$$+ 75 f(x_4, y_4) + 6 f(x_5, y_5)] + R, \tag{123}$$

în care restul este determinat de formula

$$R = \int_{x_0}^{x_6} \theta(x)\, f_{11}[x, y(x)]\, dx \tag{124}$$

şi avem evaluarea

$$|R| \leqslant \frac{1}{924} h^{12} F_{11} < 0{,}001083\, h^{12} F_{11}. \tag{125}$$

§ 8. Concluzii

19. În paragrafele precedente s-au stabilit formule de integrare numerică a ecuaţiei diferenţiale (1) pentru calculul lui $y(x_6)$, presupunînd că integrala $y(x)$ a fost calculată în prealabil pe nodurile x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. La toate aceste formule s-au determinat resturile sub formă de integrală definită şi s-au dat evaluările lor. Este foarte util ca toate aceste formule să fie comparate cu formula de integrare numerică propriu-zisă a lui Adams (4) pe care o transcriem:

$$y(x_6) = y_5 + \frac{h}{1440}[-475 f(x_0, y_0) + 2877 f(x_1, y_1) - 7298 f(x_2, y_2) +$$
$$+ 9982 f(x_3, y_3) - 7923 f(x_4, y_4) + 4277 f(x_5, y_5)] + R,$$

pentru care $|R| < 0{,}3156\, h\, F_6$ şi ai cărei coeficienţi nu sînt numere zecimale cu un număr limitat de zecimale. Această formulă foloseşte valorile funcţiei $f(x, y)$ pe toate nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_5$ care în general sînt greu de calculat.

Reamintim în rezumat formulele de integrare numerică date de noi, în care indicăm valorile lui $f(x, y)$ pe noduri care trebuie calculate şi evaluarea restului.

Formula	Se calculează	Evaluarea restului
(14)	—	$0{,}8572\ h^7F_6$
(22)	$f(x_5, y_5)$	$0{,}1429\ h^7F_6$
(42)	$f(x_1, y_1)$	$0{,}5358\ h^8F_7$
(49)	$f(x_4, y_4),\ f(x_5, y_5)$	$0{,}0358\ h^8F_7$
(67)	$f(x_1, y_1),\ f(x_2, y_2)$	$0{,}2381\ h^9F_8$
(75)	$f(x_3, y_3),\ f(x_4, y_4),\ f(x_5, y_5)$	$0{,}012\ h^9F_8$
(90)	$f(x_1, y_1),\ f(x_2, y_2),\ f(x_3, y_3)$	$0{,}0715\ h^{10}F_9$
(96)	$f(x_2, y_2), f(x_3, y_3), f(x_4, y_4), f(x_5, y_5)$	$0{,}00477\ h^{10}F_9$
(111)	$f(x_1, y_1),\ f(x_2, y_2),\ f(x_3, y_3),\ f(x_4, y_4)$	$0{,}01299\ h^{11}F_{10}$
(117)	$f(x_1, y_1), f(x_2, y_2), f(x_3, y_3), f(x_4, y_4), f(x_5, y_5)$	$0{,}002165\ h^{11}F_{10}$
(123)	$f(x_1, y_1), f(x_2, y_2), f(x_3, y_3), f(x_4, y_4), f(x_5, y_5)$	$0{,}001083\ h^{12}F_{11}$

Toate aceste formule au coeficienţii numere întregi sau numere zecimale cu un număr mic de zecimale.

20. Calculele făcute au arătat că este avantajos să se calculeze în prealabil integrala ecuaţiei diferenţiale (1) pe nodurile x_1, x_2, x_4, x_5, x_6 şi apoi să se calculeze $y(x_3)$ printr-o formulă de integrare numerică. Aceste formule sînt rezumate în tabloul următor.

Formula	Se calculează	Evaluarea restului
(17)	—	$0{,}0215\ h^7F_6$
(25)	$f(x_5, y_5)$	$0{,}0143\ h^7F_6$
(45)	$f(x_1, y_1)$	$0{,}0054\ h^8F_7$
(52)	$f(x_4, y_4), f(x_5, y_5)$	$0{,}0018\ h^8F_7$
(70)	$f(x_1, y_1), f(x_2, y_2)$	$0{,}000596\ h^9F_8$

Toate aceste formule au coeficienţii numere zecimale cu un număr mic de zecimale. De asemenea avem tabloul rezumativ:

Se calculează în prealabil integrala pe nodurile	Se foloseşte formula	Pentru calculul lui	Se calculează	Evaluarea restului
x_1, x_3, x_4, x_5, x_6	(78)	$y(x_2)$	$f(x_3, y_3), f(x_4, y_4), f(x_5, y_5)$	$0{,}000794\ h^9F_8$
x_1, x_2, x_3, x_5, x_6	(93)	$y(x_4)$	$f(x_1, y_1), f(x_2, y_2), f(x_3, y_3)$	$0{,}000318\ h^{10}F_9$
x_2, x_3, x_4, x_5, x_6	(99)	$y(x_1)$	$f(x_2, y_2), f(x_3, y_3), f(x_4, y_4), f(x_5, y_5)$	$0{,}000794\ h^{10}F_9$
x_1, x_2, x_3, x_4, x_6	(114)	$y(x_5)$	$f(x_1, y_1), f(x_2, y_2), f(x_3, y_3)$ $f(x_4, y_4)$	$0{,}0003608\ h^{11}F_{10}$

S-a mai arătat că nu este nevoie să se calculeze în prealabil integrala $y(x)$ a ecuaţiei diferenţiale (1) pe 5 din cele 6 noduri $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ şi să se calculeze valoarea integralei pe cel de al 6-lea nod printr-o formulă de integrare numerică. Se pot da formule de integrare numerică calculînd în prealabil integrala $y(x)$ pe mai puţin de 5 noduri, şi utilizînd formule de integrare numerică pentru calculul integralei pe celelalte noduri.

Dăm următorul tablou rezumativ :

Se calculează în prealabil integrala pe nodurile	Se folosește formula	Pentru calculul lui	Se calculează	Evaluarea restului
x_1, x_2, x_3	(28)	$y(x_4)$	$f(x_1, y_1), f(x_2, y_2), f(x_3, y_3)$	$0{,}0286\ h^7F_6$
x_1, x_2, x_3	(32)	(yx_5)	$f(x_1, y_1), f(x_2, y_2), f(x_3, y_3)$	$0{,}5714\ h^7F_6$
x_1, x_2, x_3	(36)	$y(x_6)$	$f(x_1, y_1), f(x_2, y_2), f(x_3, y_3)$	$4{,}2858\ h^7F_6$
x_1, x_2, x_3	(55)	$y(x_4)$	$f(x_1, y_1), f(x_2, y_2), f(x_3, y_3)$	$0{,}0143\ h^8F_7$
x_1, x_2, x_3	(58)	$y(x_5)$	$f(x_1, y_1), f(x_2, y_2), f(x_3, y_3)$	$0{,}3572\ h^8F_7$
x_1, x_2, x_3	(61)	$y(x_6)$	$f(x_1, y_1), f(x_2, y_2), f(x_3, y_3)$	$3{,}2143\ h^8F_7$
x_1, x_2, x_3, x_4	(81)	$y(x_5)$	$f(x_1, y_1), f(x_2, y_2), f(x_3, y_3)$	$0{,}03969\ h^9F_8$
x_1, x_2, x_3, x_4	(84)	$y(x_6)$	$f(x_1, y_1), f(x_2, y_2), f(x_3, y_3)$	$0{,}7143\ h^9F_8$
x_1, x_2, x_3, x_4	(102)	$y(x_5)$	$f(x_1, y_1), f(x_2, y_2), (x_3, y_3), f(x_4, y_4)$	$0{,}00397\ h^{19}F_9$
x_1, x_2, x_3, x_4	(105)	$y(x_6)$	$f(x_1, y_1), f(x_2, y_2), f(x_3, y_3), f(x_4, y_4)$	$0{,}1429\ h^{10}F_9$

Dintre acestea, formulele (28), (32), (61), (84), (105) au coeficienții numere zecimale, cu un număr mic de zecimale.

În rezumat, toate formulele de integrare numerică găsite de noi sînt mai practice decît formula lui Adams propriu-zisă. Dintre toate aceste formule recomandăm formula (123) ca cea mai avantajoasă, coeficienții ei fiind numere zecimale cu cel mult o singură zecimală și pentru care s-a dat evaluarea $0{,}001083\ h^{12}F_{11}$ pentru valoarea absolută a restului.

Într-o altă lucrare vom da extinderi ale formulelor precedente, pentru un număr de noduri $n > 6$, pentru sisteme de ecuații diferențiale și ecuații diferențiale de ordin superior.

ПРАКТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Во-первых замечается, что формула численного интегрирования Адамса, представляет собой формулу численного дифференцирования с остатком порядка h^7. Исходя от этой идеи в труде применяются другие формулы численного дифференцировнаия на узлах $x_0, x_1, \ldots, x_6$ в арифметической прогрессией с шагом h, которые получаются выражая

разделенную разность функции на рассматриваемых узлах определённым интегралом. Мы исследовали этот вопрос, в общем виде, в другом труде [3].

Рассмотренные в настоящем труде формулы численного дифференцирования ведут к формулам численного интегрирования, указанным в выводах настоящего труда. В этих трудах мы цитировали найденные формулы, выявили члены $f(x_i, y_i)$, которые должны вычислить в каждой формуле и их остатки.

Обращаем внимание в особенности на формулу (123), которая использует те же члены $f(x_1, y_1), \ldots, f(x_5, y_5)$, что и формула Адамса, с остатком, данным формулой (125). Остаток этой формулы является порядка h^{12}.

MÉTHODES PRATIQUES D'INTÉGRATION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

RÉSUMÉ

L'auteur fait remarquer tout d'abord que la formule d'intégration numérique d'Adams est une certaine formule de dérivation numérique dont le reste est de l'ordre de h^7. En partant de cette idée, il emploie, dans le présent travail, d'autres formules de dérivation numérique sur les noeuds $x_0, x_1, \ldots, x_6$ en progression arithmétique dont la raison est h, que l'on obtient en exprimant la différence divisée d'une fonction sur les noeuds considérés, par une intégrale définie. Ce problème a été traité, en général, dans un autre travail [3].

Les formules de dérivation numérique considérées dans ce travail conduisent à des formules d'intégration numérique que nous avons énumérées dans les conclusions du travail. Dans ces conclusions nous avons cité les formules trouvées et nous avons mis en évidence les termes $f(x_i, y_i)$ qui doivent être calculés dans chaque formule et leurs restes.

Nous signalons en particulier la formule (123) qui utilise les mêmes termes $f(x_1, y_1), \ldots, f(x_5, y_5)$ que la formule d'Adams, avec le reste donné ar la formule (125). Le reste de cette formule est de l'ordre de h^{12}.

BIBLIOGRAFIE

1. Ionescu D. V., *Formule de cuadratură cu noduri exterioare.* Studii și cercet. de matem. (Cluj), **IX**, 45–135, (1958).
2. — *Formules de quadrature à noeuds extérieurs.* Mathematica, **2 (25)**, 55–142 (1960).
3. — *Cuadraturi numerice.* Edit. Tehnică, București, 1957, p. 186–207.

4. Сансоне Дж., *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* Том II, Москва, 1954, p. 244 (traducere din limba italiană).

5. Tchakaloff L. *Eine Integral darstallung des Newtonschen Differenzenqotienten und ihre Anwendungen. Congrès International des mathématiciens Oslo 1936.* Jahrbuch des Universität Sofia, Physiko — Mathematishche Fakultät, **XXXIV**, 353 — 405 (1938).

6. Tollmien W., *Über die Fehlerabschätzung beim Adamschen Verfahren zur Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen.* Zeitschr. für ang. Math. und Mech., **18**, 83—90 (1938).

Primit la 10. VI. 1961.