UN PROCEDEU DE ORDINUL ŞASE DE EXACTITATE, PE DOUĂ NODURI, DE INTEGRARE NUMERICĂ A ECUAŢIILOR DIFERENŢIALE DE ORDINUL ÎNTÎI

DE

A. COŢIU

(Cluj)

Se consideră ecuaţia diferenţială de ordinul întîi

$$z' = \varphi\,(x,\ z), \tag{1}$$

şi fie $z(x)$ integrala ei, care satisface la condiţia iniţială

$$z(x_0) = z_0. \tag{2}$$

Se presupune că sînt satisfăcute condiţiile care asigură existenţa şi unicitatea integralei $z(x)$, pe intervalul închis $[x_0, x]$, unde $x = x_0 + h$.

1. Pentru integrarea numerică a ecuaţiei diferenţiale (1), cu condiţia iniţială (2), A. H u ť a [3, 4] a stabilit două procedee de ordinul şase de exactitate [1], a căror aplicare necesită opt substituţii în ecuaţia diferenţială. Formulele care se folosesc pentru aplicarea acestor procedee conţin 42 constante. Nodurile şi coeficienţii care intervin în aceste formule, sînt numere raţionale.

Mai tîrziu, E. F e h l b e r g [2] a arătat că integrarea ecuaţiei diferenţiale (1), cu condiţia iniţială (2), se reduce, printr-o transformare, la integrarea unei alte ecuaţii diferenţiale, tot de ordinul întîi. E. F e h l b e r g [2] a stabilit un procedeu de ordinul şase de exactitate, a cărui aplicare necesită trei substitiţii în ecuaţia diferenţială transformată. Formulele care se folosesc pentru aplicarea acestui procedeu, conţin nouă constante. Nodurile şi coeficienţii care intrevin în aceste formule sînt numere raţionale.

Dacă se integrează numeric ecuaţia diferenţială transformată şi se obţine integrala ei aproximativă, atunci formula de transformare ne dă integrala aproximativă a ecuaţiei diferenţiale dată (1).

2. Pentru integrarea numerică a ecuaţiei diferenţiale (1), cu condiţia iniţială (2), în această lucrare se stabileşte un nou procedeu de ordinul şase

de exactitate. În acest scop, se face, în prealabil, o transformare a ecuației diferențiale dată, care diferă de transformarea făcută de E. Fehlberg.

Formulele care se folcsesc pentru aplicarea procedeului conțin cinci constante; aplicarea procedeului necesită numai două substituții în ecuația diferențială transformată. Nodurile și coeficienții care intervin în aceste formule sînt numere iraționale.

3. Vom arăta, mai întîi, cum se transformă ecuația diferențială dată.

În locul funcției $z(x)$, integrală a ecuației diferențiale (1), cu condiția inițială (2), să introducem, printr-o transformare, o nouă funcție $y(x)$, astfel încît să satisfacă la următoarele condiții:

$y(x)$ să fie integrală a ecuației diferențiale

$$y' = f(x, y), \tag{3}$$

cu condiția inițială

$$y(x_0) = y_0 = z_0; \tag{4}$$

$y(x)$ și funcția $f(x, y)$ să satisfacă pe nodul x_0, la condițiile

$$y_0' = 0, \quad y_0'' = 0, \tag{5}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)_0 = 0. \tag{6}$$

Din (5) rezultă imediat că avem

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = 0. \tag{7}$$

Se arată ușor că condițiile (4) și (5) sînt verificate de următoarea relație, între funcțiile $z(x)$ și $y(x)$:

$$z = \theta(x,y) = y + z_0'(x - x_0) + \frac{1}{2} z_0''(x - x_0)^2 + + A(x - x_0)(y - y_0) + B(x - x_0)^2(y - y_0), \tag{8}$$

constantele A și B fiind oarecare.

Să determinăm constantele A și B, astfel încît să fie satisfăcute și condițiile (6).

Din (8), dacă derivăm în raport cu x și ținem seamă de relațiile (1) și (3), avem

$$\varphi(x, z) = [1 + A(x - x_0) + B(x - x_0)^2] f(x,y) + z_0' + + z_0''(x - x_0) + A(y - y_0) + 2B(x - x_0) y - y_0). \tag{9}$$

Să scriem că derivatele parțiale în raport cu y, ale funcțiilor care figurează în relația (9), sînt egale; avem

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = [1 + A(x - x_0) + B(x - x_0)^2]\frac{\partial f}{\partial y} + + A + 2B(x - x_0).$$

Din (8), avem

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 1 + A(x - x_0) + B(x - x_0)^2,$$

care, înlocuit mai sus, ne dă

$$[1 + A(x - x_0) + B(x - x_0)^2]\frac{\partial \varphi}{\partial z} = [1 + A(x - x_0) + + B(x - x_0)^2]\frac{\partial f}{\partial y} + A + 2B(x - x_0). \tag{10}$$

Făcînd $x = x_0$, rezultă

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_0 - A.$$

Pentru ca să fie satisfăcută prima condiție din (6), trebuie să avem

$$A = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_0. \tag{11}$$

Vom determina pe B, astfel ca să fie satisfăcută și a doua condiție din (6).

Pentru aceasta, să scriem că derivatele parțiale în raport cu x, ale funcțiilor care figurează în (10) sînt egale; avem

$$[1 + A(x - x_0) + B(x - x_0)^2]\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + [A + 2B(x - x_0)]\frac{\partial \varphi}{\partial z} = = [1 + A(x - x_0) + B(x - x_0)^2]\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + [A + 2B(x - x_0)]\frac{\partial f}{\partial y} + 2B.$$

Făcînd $x = x_0$ și ținînd seamă că

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = 0, \quad A = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_0,$$

rezultă că

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}\right)_0 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_0^2 - 2B.$$

Pentru ca a doua condiție din (6) să fie satisfăcută, trebuie să avem

$$B = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}\right)_0 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_0^2\right]. \tag{12}$$

Înlocuind pe A și B în (8), prin valorile lor date de egalitățile (11) și (12), obținem transformarea pe care trebuie s-o facem asupra ecuației diferențiale dată.

Din (9), în care A și B sînt dați de relațiile (11) și (12), avem

$$f(x, y) = \frac{1}{1 + A(x - x_0) + B(x - x_0)^2}\{\varphi[x, \theta(x, y)] - z_0' - z_0''(x - x_0) - A(y - y_0) - - 2B(x - x_0)(y - y_0)\}. \tag{13}$$

În concluzie, integrarea ecuației diferențiale (1), cu condiția inițială (2), se reduce, prin transformarea (8), la integrarea ecuației diferențiale (3), cu condiția inițială (4), unde funcția $f(x,y)$, care figurează în membrul al doilea, este dată de (13).

Integrala $y(x)$ și funcția $f(x,y)$ satisfac, pe nodul x_0, la condițiile (5), (6) și (7).

Dacă se integrează numeric ecuația diferențială transformată (3) se obține integrala ei aproximativă $\widetilde{y}(x)$, atunci formula (8) ne dă integrala aproximativă $\widetilde{z}(x)$ a ecuației diferențiale inițiale (1), înlocuind în (8) pe $y(x)$ cu $\widetilde{y}(x)$, adică

$$\widetilde{z}(x) = \widetilde{y}(x) + z_0'(x - x_0) + \frac{1}{2} z_0''(x - x_0)^2 + \\ + A(x - x_0)\, \widetilde{y}\,[(x) - y_0] + B\,(x - x_0)^2\,[\widetilde{y}(x) - y_0], \tag{14}$$

unde A și B sînt dați de egalitățile (11) și 12).

4. Să stabilim acum procedeul de integrare numerică a ecuației diferențiale transformată.

Presupunem că integrala $y(x)$ a ecuației diferențiale transformată se poate dezvolta în vecinătatea nodului x_0, după formula lui Taylor; avem

$$y(x) = y_0 + \frac{y_0'}{1\,!}\, h + \frac{y_0''}{2!}\, h^2 + \ldots \tag{15}$$

Să exprimăm numerele $y_0^{(\nu)}$, care figurează în (15) cu ajutorul valorilor derivatelor parțiale ale funcției $f(x,y)$, în raport cu x și y, pe nodul x_0. Ținînd seamă de condițiile (5), (6) și (7), avem

$$y_0' = 0, \quad y_0'' = 0, \quad y_0''' = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0,$$
$$y_0^{(4)} = \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_0, \quad y_0^{(5)} = \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right)_0, \tag{16}$$
$$y_0^{(6)} = \left(\frac{\partial^5 f}{\partial x^5}\right)_0 + 10\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\right)_0.$$

Pentru calculul numeric al integralei $y(x)$ a ecuației diferențiale transformată, să scriem următoarele formule

$$k_1 = f\,(x_0 + \alpha_1 h, y_0)\, h,$$
$$k_2 = f\,(x_0 + \alpha_2 h, y_0 + \beta\, k_1)\, h, \tag{17}$$
$$\widetilde{y}(x) = y_0 + c_1 k_1 + c_2 k_2\,;\; x = x_0 + h. \tag{18}$$

Vom determina constantele α_1, α_2, β, c_1 și c_2, comparînd coeficienții puterilor lui h, din dezvoltările după formula lui Taylor ale membrului al doilea al relațiilor (17) și (18), cu coeficienții acelorași puteri ale lui h, din dezvoltarea (15), dați de (16).

Ținînd seamă de condițiile (5), (6) și (7), obținem

$$k_1 = \frac{1}{2}\,\alpha_1^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 h^3 + \frac{1}{6}\,\alpha_1^3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_0 h^4 + \\ + \frac{1}{24}\alpha_1^4\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right)_0 h^5 + \frac{1}{120}\,\alpha_1^5\left(\frac{\partial^5 f}{\partial x^5}\right)_0 h^6 + \ldots, \tag{19}$$

$$k_2 = \frac{1}{2}\,\alpha_2^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 h^3 + \frac{1}{6}\,\alpha_2^3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_0 h^4 + \frac{1}{24}\,\alpha_2^4\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right)_0 h^5 + \\ + \left[\frac{1}{4}\,\alpha_1^2\,\alpha_2^2\,\beta\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y}\right)_0 + \frac{1}{120}\,\alpha_2^5\left(\frac{\partial^5 f}{\partial x^5}\right)_0\right] h^6 + \ldots \tag{20}$$

Compararea coeficienților acelorași puteri ale lui h, din dezvoltările (15) și (18), ținînd seamă de (16), (19) și (20), ne conduce la următorul sistem de ecuații:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 h^3: \quad \alpha_1^2 c_1 + \alpha_2^2 c_2 = \frac{1}{3}, \\
&\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_0 h^4: \quad \alpha_1^3 c_1 + \alpha_2^3 c_2 = \frac{1}{4}, \\
&\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right)_0 h^5: \quad \alpha_1^4 c_1 + \alpha_2^4 c_2 = \frac{1}{5}, \\
&\left(\frac{\partial^5 f}{\partial x^5}\right)_0 h^6: \quad \alpha_1^5 c_1 + \alpha_2^5 c_2 = \frac{1}{6}, \\
&\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\right)_0 h^6: \quad \alpha_1^2\,\alpha_2^2\,\beta c_2 = \frac{1}{18}.
\end{aligned} \tag{21}$$

Primele patru ecuații din sistemul (21), sînt aceleași care se întîlnesc în formula de cuadratură a lui Stieltjes

$$\int_0^1 p(x)\, g(x)\, dx = A_1 g(x_1) + A_2 g(x_2) + R,$$

în care se cere să se determine coeficienții A_1, A_2 și nodurile x_1, x_2 cuprinse între 0 și 1, astfel ca această formulă să fie exactă, adică să aibă restul nul, pentru un polinom oarecare de gradul trei. Funcția $p(x)$ este continuă și pozitivă pe intervalul [0, 1], iar $g(x)$ este o funcție de clasa C^5 pe intervalul [0, 1.]

În acest caz trebuie să avem

$$A_1 + A_2 = \int_0^1 p(x)\, dx,$$

$$A_1\, x_1 + A_2\, x_2 = \int_0^1 p(x) x\, dx,$$

$$A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 = \int_0^1 p(x) x^2 dx,$$

$$A_1 x_1^3 + A_2 x_2^3 = \int_0^1 p(x) x^3 dx.$$

Alegînd $p(x) = x^2$, obţinem tocmai primele patru ecuaţii din sistemul (21). De aici rezultă că problema pusă de noi este posibilă, deoarece se ştie că nodurile x_1 şi x_2 sînt reale şi cuprinse între 0 şi 1, iar coeficienţii A_1 şi A_2 sînt pozitivi.

Deci, punînd

$$\alpha_1^2 c_1 = A_1, \ \alpha_2^2 c_2 = A_2,$$

primele patru ecuaţii din sistemul (21) ne vor da, ca la formula de cuadratură a lui Stieltjes

$$\alpha_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}, \quad \alpha_2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}, \tag{22}$$

$$A_1 = \frac{1}{6} - \frac{5}{48}\sqrt{\frac{2}{5}}, \quad A_2 = \frac{1}{6} + \frac{5}{48}\sqrt{\frac{2}{5}},$$

de unde

$$c_1 = \frac{85}{216} + \frac{125}{864}\sqrt{\frac{2}{5}}, \quad c_2 = \frac{85}{216} - \frac{125}{864}\sqrt{\frac{2}{5}}. \tag{23}$$

Ultima ecuaţie din sistemul (21), ne dă

$$\beta = \frac{25}{72} \frac{\alpha_2^2(\alpha_2 - \alpha_1)}{\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\alpha_1} = \frac{680 + 250\sqrt{\frac{2}{5}}}{729}. \tag{24}$$

Aplicarea procedeului, astfel determinat, necesită numai două substituţii în ecuaţia diferenţială transformată. Ordinul de exactitate al procedeului este şase. Formulele (17) şi (18), pe care le folosim pentru aplicarea acestui procedeu, conţin cinci constante. Nodurile şi coeficienţii acestor formule, aşa cum arată relaţiile (22), (23) şi (24), sînt numere iraţionale.

Universitatea „Babeş-Bolyai" Cluj,
Catedra de ecuaţii diferenţiale

ПРИЁМ ШЕСТОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ, НА ДВУХ УЗЛАХ, ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В труде излагается новый приём, шестого порядка точности численного интегрирования дифференциального уравнения (1) при начальном условии (2). С этой целью производится, в первой очереди, преобразование заданного дифференциального уравнения. Формулы (17) и (18) используемые для применения этого приёма содержат пять констант. Применение приёма требует только двух замен в преобразованном дифференциальном уравнении. Узлы и коэффициенты, входящие в формулах (17) и (18) являются иррациональными числами.

UN PROCÉDÉ DU SIXIÈME ORDRE D'EXACTITUDE, SUR DEUX NOEUDS, D'INTÉGRATION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE

RÉSUMÉ

On établit un nouveau procédé du sixième ordre d'exactitude, d'intégration numérique de l'équation différentielle (1), à la condition initiale (2). A cette fin, on fait, au préalable, une transformation de l'équation différentielle donnée. Les formules (17) et (18), utilisées à l'application de ce procédé, contiennent cinq constantes. L'application du procédé réclame seulement deux substitutions dans l'équation différentielle transformée. Les noeuds et les coefficients qui interviennent dans les formules (17) et (18) sont des nombers irrationnels.

BIBLIOGRAFIE

1. Collatz L., *Numerische Behandlung von Differentialgleichungen.* Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1951.
2. Fehlberg E., *Eine Methode zur Fehlerverkleinerung beim Runge-Kutta-Verfahren.* Z. angew. Math. Mech., **38**, 421—426 (1958).
3. Huťa A., *Une amélioration de la méthode de Runge-Kutta-Nyström pour la résolution numérique des équations différentielles du premier ordre.* Acta Fac. Rerum Naturalium Univ. Comenianae, Mathematica (Bratislava), **I**, fasc. IV—VI, 201—224 (1956).
4. — *Contribution à la formule de sixième ordre dans la méthode de Runge-Kutta-Nyström.* Acta Fac. Rerum Naturalium Univ. Comenianae, Mathematica (Bratislava), **II**, fasc. I—II, 21—24 (1957).