# ASUPRA UNOR PROPRIETĂŢI ALE MARTICILOR COMPLET PONDERATE ŞI COMPLET MIXTE*)

DE

ALEXANDRU B. NÉMETH

(Cluj)

În teoria jocurilor, matricile complet mixte au un rol important, deoarece în acest caz sînt valabile o serie de proprietăţi simple, şi multe jocuri practice sînt de această natură. Proprietăţile matricelor complet mixte au fost deduse din teoria generală a reprezentării soluţiilor optime extremale. În lucrarea de faţă dăm demonstraţii mai simple ale acestor proprietăţi, fără a face uz de teoria generală.

Am introdus de asemenea noţiunea de matrice complet ponderată (c. p.), care generalizează matricile complet mixte (c. m). Pentru aceste matrici am stabilit teorema 4.

Reamintim definiţiile şi proprietăţile de care ne vom folosi în lucrare :

DEFINIŢIA. 1. *O matrice de jocuri* $\mathbf{A}$ *se numeşte c. m., dacă pentru toate strategiile optime* $\mathbf{x}$ *şi* $\mathbf{y}$, *avem* $x_i > 0$ *pentru toţi* $i$ *şi* $y_j > 0$ *pentru toţi* $j$.

DEFINIŢIA 2. *O matrice de jocuri* $\mathbf{A}$ *se numeşte c.p., dacă pentru orice linie* $i$ *şi coloană* $j$ *găsim cîte o strategie optimă* $\mathbf{x}^{(i)}$ *şi* $\mathbf{y}^{(j)}$, *astfel ca* $x_i^{(i)} > 0$ *şi* $y_j^{(j)} > 0$.

DEFINIŢIA 3. *Strategia* $\mathbf{x}$ *a matricii* $\mathbf{A}$ *se numeşte complet ponderată, dacă* $x_i > 0$ *pentru toţi* $i$.

1. Orice combinaţie convexă a strategiilor optime este strategie optimă.

2. Matricea de jocuri $\mathbf{A}'$ obţinută din matricea $\mathbf{A}$, adăugînd numărul $a$ la elementele lui $\mathbf{A}$, are aceleaşi strategii optime ca şi $\mathbf{A}$, iar valoarea ei este $v' = c + a$, unde $v$ este valoarea lui $\mathbf{A}$.

3. Dacă pentru o strategie optimă $\mathbf{x}$ a matricii $\mathbf{A}$ avem $x_{i_0} > 0$, atunci

$$(\mathbf{A}\mathbf{y})_{i_0} = v,$$

---

*) Această lucrare se publică şi în limba franceză în revista ,,Mathematica", vol 4 (27), 1962.

pentru orice strategie optimă $\mathbf{y}$ (unde $v$ este valoarea jocului).

4. Dacă $\mathbf{A}$ este o matrice c.p., pentru orice pereche de strategii optime $\mathbf{x}$ și $\mathbf{y}$, avem :

$$\mathbf{xA} = \mathbf{v}\,; \qquad \mathbf{Ay} = \mathbf{v},$$

unde $\mathbf{v}$ este vectorul linie respectiv coloană cu toate elementele egale cu valoarea jocului.

Această propoziție rezultă imediat din definiția matricilor c.p. și propoziția 3.

5. Orice matrice $\mathbf{A}$ c.p. are strategii optime complet ponderate.

*Demonstrație*. Considerăm matricea c.p. $\mathbf{A}$ de ordin $m \times n$. Din definiția matricei c. p. urmează că pentru orice linie $i$ și coloană $j$ din $\mathbf{A}$ găsim cîte o strategie optimă $\mathbf{x}^{(i)}$ respectiv $\mathbf{y}^{(j)}$ astfel ca $x_i^{(i)} > 0$, $y_j^{(j)} > 0$. Notăm combinația convexă a strategiilor de acest fel (unde $\lambda_i > 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ și $\mu_j > 0$ $(j = 1, \ldots, n)$) cu $\mathbf{x}^0$ respectiv $\mathbf{y}^0$:

$$\mathbf{x}^0 = \lambda_1 \mathbf{x}^{(1)} + \lambda_2 \mathbf{x}^{(2)} + \ldots + \lambda_m \mathbf{x}^{(m)}\,; \quad \mathbf{y}^0 = \mu_1 \mathbf{y}^{(1)} + \eta_2 \mathbf{y}^{(2)} + \ldots + \mu_n \mathbf{y}^{(n)}.$$

Aceste strategii sînt optimale și complet ponderate.

TEOREMA 1. *Condiția necesară și suficientă ca o matrice c.p. $\mathbf{A}$ să fie c.m., este ca strategiile ei optime c.p. să fie unice.*

*Demonstrăm* că condiția este necesară, adică dacă $\mathbf{A}$ este c.m., atunci ea are strategii optime unice.

Presupunem contrariul : strategiile optime ale lui $\mathbf{A}$ nu sînt unice. Fie $\mathbf{x}^1$ și $\mathbf{x}^2$ două strategii optime diferite ale lui $\mathbf{A}$. Construim vectorul $\mathbf{x}^0$ în felul următor :

$$x^0 = x^1 + \varepsilon(x^1 - x^2).$$

Vom arăta că îl putem alege pe $\varepsilon > 0$ astfel ca $x_i^0 \geqq 0$ și $x_{i_0}^0 = 0$ cel puțin pentru un $i_0$.

Fie $\mathcal{J} = \{ i \mid x_i^1 - x_i^2 > 0 \}$ ($\mathcal{J}$ este evident nevidă pentru că $\mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}^2$).

Îl alegem pe $i_0$ astfel ca $\dfrac{x_{i_0}^2}{x_{i_0}^1} = \max\limits_{i \in \mathcal{J}} \dfrac{x_i^2}{x_i^1}$.

Fie acum $\varepsilon = -\dfrac{x_{i_0}^1}{x_{i_0}^1 - x_{i_0}^2}$. Atunci $x_{i_0}^0 = x_{i_0}^1 + \varepsilon\left(x_{i_0}^1 - x_{i_0}^2\right) = 0$.

Ne rămîne să arătăm că pentru toți indicii $i$ avem :

$$x_i^0 = x_i^1 + \varepsilon(x_i^1 - x_i^2) \geqq 0.$$

Întrucît $\varepsilon > 0$, pentru $i \overline{\in} \mathcal{J}$ inegalitatea de mai sus este satisfăcută. Ea trebuie verificată numai pentru $i \in \mathcal{J}$. Pe baza alegerii lui $i_0$ avem pentru orice $i \in \mathcal{J}$ :

$$0 \leqq \left( \frac{x_{i_0}^2}{x_{i_0}^1} - \frac{x_i^2}{x_i^1} \right) x_i^1 = \left( \frac{x_{i_0}^2}{x_{i_0}^1} - \frac{x_{i_0}^2}{x_{i_0}^1} \right) x_i^1 + x_i^1 - x_i^2 = \frac{1}{\varepsilon}\, x_i^1 + x_i^1 - x_i^2 .$$



De aici urmează că $x_i^1 + \varepsilon(x_i^1 - x_i^2) \geqq 0$.

Observăm că $\mathbf{x}^0$ este o strategie. Într-adevăr $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^0 = 1$; mai mult, $\mathbf{x}^0\mathbf{A} = \mathbf{x}^1\mathbf{A} + \varepsilon(\mathbf{x}^1\mathbf{A} - \mathbf{x}^2\mathbf{A}) = \mathbf{v}$, de unde urmează că $\mathbf{x}^0$ este o strategie optimă.

Am găsit deci o strategie optimă $\mathbf{x}^0$ pentru $\mathbf{A}$, astfel ca $x_{i_0}^0 = 0$. Am ajuns în contradicție cu presupunerea că $\mathbf{A}$ este o matrice c.m. și necesitatea condiției teoremei este demonstrată.

Pentru a demonstra suficiența condiției, trebuie arătat că din faptul că strategiile optime c.p. sînt unice, urmează că $\mathbf{A}$ este c.m.

Presupunem contrariul : $\mathbf{A}$ nu este c.m. Atunci are cel puțin o strategie optimă $\mathbf{x}^{(i)}$ astfel ca $x_i^{(i)} = 0$. Dacă $\mathbf{x}^0$ este o strategie optimă c.p., atunci evident și $\mathbf{x}^1 = \dfrac{1}{2}\mathbf{x}^0 + \dfrac{1}{2}\mathbf{x}^{(i)}$ este o strategie optimă c.p. și diferă de $\mathbf{x}^0$. Deci, presupunînd că $\mathbf{A}$ nu este c.m., am ajuns în contradicție cu faptul că strategiile c.p. sînt unice. Teorema este în întregime demonstrată.

TEOREMA 2. *Orice matrice c.m., $\mathbf{A}$, cu valoare diferită de zero, este nesingulară.*

*Deomonstrație*. Fie $v \neq 0$ valoarea jocului c.m. $\mathbf{A}$. Vom arăta că sistemele

$$\mathbf{xA} = \mathbf{v}, \tag{1}$$

$$\mathbf{Ay} = \mathbf{v}, \tag{2}$$

admit o soluție unică. Știm că strategiile optime $\mathbf{x}^0$ și $\mathbf{y}^0$ sînt soluții ale acestor sisteme. Vom arăta că sînt unicele soluții. Presupunem contrariul : $\mathbf{u}$ este diferit de $\mathbf{x}^0$ și satisface sistemul (1)

$$\mathbf{uA} = \mathbf{v},$$

$$v \sum_{i=1}^{m} u_i = \mathbf{u}(\mathbf{Ay}) = (\mathbf{uA})\mathbf{y} = v, \qquad \sum_{i=1}^{m} u_i = 1.$$

Construim vectorul $\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^0 + \varepsilon(\mathbf{x}^0 - \mathbf{u})$. Întrucît $\mathbf{x}^0 \neq \mathbf{u}$ pentru orice $\varepsilon \neq 0$, avem $\mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}^0$. Pe $\varepsilon$ îl putem alege atît de mic (și diferit de zero) încît $x_i^1 \geqq 0$ $(i = 1, \ldots, m)$; dar $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^1 = 1$, deci $\mathbf{x}^1$ este o strategie. Mai mult, avem :

$$\mathbf{x}^1\mathbf{A} = \mathbf{x}^0\mathbf{A} + \varepsilon(\mathbf{x}^0\mathbf{A} - \mathbf{uA}) = \mathbf{x}^0\mathbf{A} = \mathbf{v}\,;$$

deci $\mathbf{x}^1$ este și strategie optimă. Totodată $\mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}^0$. Avem două strategii optime diferite, ceea ce contrazice presupunerea că $\mathbf{A}$ este c.m. Deci sistemul (1) are o soluție unică. În mod analog putem arăta că și (2) are soluție unică. De aici urmează că $\mathbf{A}$ este nesingulară.

TEOREMA 3. *Orice matrice c.m. este pătratică.*

*Demonstrație*. Considerăm o matrice c.m., $\mathbf{A}$. Dacă valoarea jocului cu matricea $\mathbf{A}$ este diferită de zero $(v \neq 0)$, teorema este demonstrată ;

dacă valoarea jocului este egală cu zero ($v = 0$), construim matricea $\mathbf{A}'$ adunînd la fiecare element al matricei $\mathbf{A}$ un număr $a$ diferit de zero. O astfel de matrice are aceleaşi strategii optime ca şi $\mathbf{A}$ (deci strategiile optime unice $\mathbf{x}^0$ şi $\mathbf{y}^0$) şi are valoarea $v' = a$ diferită de zero. Matricea $\mathbf{A}'$ este deci o matrice de jocuri c.m., cu valoarea diferită de zero. Din teorema 2 urmează că ea este nesingulară şi astfel este şi pătratică. Din construcţia lui $\mathbf{A}'$ urmează că şi $\mathbf{A}$ este pătratică. Cu ocazia demonstrării teoremei am stabilit şi faptul că o matrice de jocuri c.m., avînd valoarea zero, adăugîndu-i-se la fiecare element un număr diferit de zero, devine matrice nesingulară.

TEOREMA 4. *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca matricea* $\mathbf{A}$ *să fie c.p., este ca unul din sistemele de ecuaţii lineare*

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{xA} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{Ay} &= \mathbf{0} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

sau

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{xA} &= \mathbf{1} \\ \mathbf{Ay} &= \mathbf{1} \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

*să aibă o soluţie strict diferită de zero cu toate componentele de acelaşi semn* (unde $\mathbf{1}$ este vectorul de linie respectiv de coloană cu toate componentele egale cu 1).

*Demonstraţie.* Dacă $\mathbf{A}$ este c.p., avem pentru orice pereche de strategii optime $\mathbf{x}^0$ şi $\mathbf{y}^0$ relaţiile:

$$\mathbf{x}^0\mathbf{A} = \mathbf{v},$$
$$\mathbf{A}\mathbf{y}^0 = \mathbf{v}.$$

Deoarece $\mathbf{A}$ este o matrice c.p., ea are strategii optime c.p.; fie acestea chiar $\mathbf{x}^0$ şi $\mathbf{y}^0$. Dacă $v = 0$, sistemul (3) are o soluţie strict pozitivă. Dacă $v \neq 0$, atunci $\frac{1}{v}\mathbf{x}^0$ şi $\frac{1}{v}\mathbf{y}^0$ sînt soluţii strict diferite de zero, cu componentele de acelaşi semn ale sistemului (4).

Să presupunem acum că sistemul (3) sau (4) are o soluţie strict diferită de zero cu componentele de acelaşi semn. Fie această soluţie $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$. Punem

$$\mathbf{x}^0 = \frac{\mathbf{x}^*}{\sum_{i=1}^{m} x_i^*}; \quad \mathbf{y}^0 = \frac{\mathbf{y}^*}{\sum_{j=1}^{n} y_j^*}.$$

Arătăm că $\mathbf{x}^0$ şi $\mathbf{y}^0$ sînt strategii optime pentru $\mathbf{A}$. Observăm mai întîi că $\sum_{i=1}^{m} x_i^0 = \sum_{j=1}^{n} y_j^0 = 1$, $x_i^0 > 0$, $y_j^0 > 0$ ($i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$).

Avem

$$\mathbf{x}^0\mathbf{A} = \mathbf{0}, \qquad\qquad \mathbf{x}^0\mathbf{A} = \frac{\mathbf{1}}{\sum x_i^*}$$

sau

$$\mathbf{A}\mathbf{y}^0 = \mathbf{0}, \qquad\qquad \mathbf{A}\mathbf{y}^0 = \frac{\mathbf{1}}{\sum y_j^*}$$



În primul caz, pentru strategiile arbitrare $\mathbf{x}$ şi $\mathbf{y}$ avem:

$$\mathbf{x}^0\mathbf{A}\mathbf{y} = 0 = \mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{y}^0,$$

deci $\mathbf{x}^0$ şi $\mathbf{y}^0$ sînt strategii optime pentru $\mathbf{A}$.

În al doilea caz avem $\mathbf{x}^*\mathbf{A} = \mathbf{1}$, $\mathbf{A}\mathbf{y}^* = \mathbf{1}$, deci $\mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{y}^* = \sum_{i=1}^{m} x_i^*$, $\mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{y}^* = \sum_{j=1}^{n} y_j^*$, aşadar $\sum_{i=1}^{m} x_i^* = \sum_{j=1}^{n} y_j^* = \frac{1}{v}$. Pentru strategiile arbitrare $\mathbf{x}$ şi $\mathbf{y}$ avem

$$\mathbf{x}^0\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{v} = \mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{y}^0,$$

deci $\mathbf{x}^0$ şi $\mathbf{y}^0$ sînt strategii optime pentru $\mathbf{A}$. Ţinînd seama că $\mathbf{x}^0$, $\mathbf{y}^0$ sînt totdeauna strategii complet ponderate, teorema 4 este demonstrată.

*Observaţie.* Dacă la condiţiile teoremei mai adăugăm ca în cazul sistemului (3) soluţiile de acest fel să fie toate proporţionale, iar în cazul sistemului (4) să fie unice, atunci teorema este adevărată pentru matrici c.m.

## О СВОЙСТВАХ ПОЛНОВЕСОВЫХ И ПОЛНОСМЕШАННЫХ МАТРИЦ

### КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ


Называем полновесовой (пв) матрицу игр, имеющую для каждой линии $i$ и для каждого столбца $j$ по одной оптимальной стратегии $\mathbf{x}^{(i)}$ соответственно $\mathbf{y}^{(j)}$ так, чтобы $x_i^{(i)} > 0$, $y_j^{(j)} > 0$. Ради кратности также, напишем пс вместо „полносмешанной".

ТЕОРЕМА 1. *Необходимым и достаточным условием для того чтобы пв, матрица игр была пс, является то чтобы она имела единственные оптимальные полновесовые стратегии.*

ТЕОРЕМА 2. *Любая* пс *матрица игр со значением отличным от нуля является несингулярной.*

ТЕОРЕМА 3. пс *матрица игр всегда квадратична.*

ТЕОРЕМА 4. *Необходимым и достаточным условием для того чтобы матрица* $\mathbf{A}$ *была* пв, *является то, чтобы одна из систем линейных уравнений*

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{xA} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{Ay} &= \mathbf{0} \end{aligned}\right\},$$

*или*

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{xA} &= \mathbf{1} \\ \mathbf{Ay} &= \mathbf{1} \end{aligned}\right\}$$

*имела решение строго отличающееся от нуля с составляющими одного и того же знака* (где $\mathbf{1}$ — вектор линии, соответственно столбца, со всеми составляющими равными 1).

# SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES MATRICES COMPLÈTEMENT PONDÉRÉES ET COMPLÈTEMENT MIXTES


## RÉSUMÉ

Nous appelons matrice complètement pondérée (c.p.) une matrice de jeux ayant pour chaque ligne $i$ et colonne $j$ une stratégie optima $\mathbf{x}^{(i)}$ et $\mathbf{y}^{(j)}$ telle que $x_i^{(i)} > 0$, $y_j^{(j)} > 0$.

Inévira puor abréger c. m. au lieu de ,,complétement mixte''.

Théorème 1. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de jeux c. p. soit c. m. est qu'elle ait des stratégies optimales complètement pondérées uniques.*

Théorème 2. *Toute matrice de jeux c. m à la valeur différente de zéro est non singulière.*

Théorème 3. *Une matrice de jeux c. m. est toujours quadratique.*

Théorème 4. *La condition nécessaire et suffisante pour qu' une matrice* $\mathbf{A}$ *soit c. p. est que l'un des systèmes d'équations linéaires*

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{x}A &= \mathbf{0} \\ A\mathbf{y} &= \mathbf{0} \end{aligned}\right\}$$

ou

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{x}A &= \mathbf{1} \\ A\mathbf{y} &= \mathbf{1} \end{aligned}\right\}$$

*ait une solution strictement différente de zéro avec les composantes du même signe* (où $\mathbf{1}$ est le vecteur de ligne, respectivement de colonne avec toutes les composantes égales à 1).


## BIBLIOGRAFIE


1. Karlin S., *Mathematical methods and theory in games, programming and economics.* Pergamon Press, London-Paris, 1959, vol. I, cap. 1–4.
2. Kaplansky A., *Contribution to von Neumann's Theory of Games.* Ann. Math., **46**, 474–79 (1945).
3. Kuhn H. W., Tucker A. W., *Contribution to the theory of games.* Ann. Math. Studies, **38**, Princeton University Press, 1956.
4. Neumann J. Von, Morgenstern O., *Theory of games and economic behavior.* Princeton University Press, 1947.


Primit la 27. XI. 1961.