CONTRIBUŢIE LA STUDIUL RAPIDITĂŢII DE CONVERGENŢĂ A SERIILOR CU TERMENI POZITIVI*)

DE

ANDREI NEY

(Cluj)

Scopul acestui articol este de a arăta că criteriul lui Kummer-Jensen este un instrument util în studiul rapidităţii de convergenţă a seriilor cu termeni pozitivi. Cu ajutorul acestui criteriu se poate realiza o anumită clasificare a seriilor, după rapiditatea lor de convergenţă şi este posibilă construirea unei metode unitare de determinare a domeniului de aplicabilitate al diferitelor criterii de convergenţă, care derivă din cel al lui Kummer.

§ 1. Cîteva observaţii în legătură cu criteriul lui Kummer

1. Fie

$$S = \sum_{1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \tag{1}$$

o serie convergentă, cu termeni pozitivi, pentru care se defineşte suma parţială

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \tag{2}$$

şi restul

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots \tag{3}$$

Criteriul lui Kummer poate fi enunţat [4] sub o formă puţin diferită de cea clasică, după cum urmează:

Existenţa unui şir $\{a_n\}$ de termeni pozitivi, care satisface relaţia

$$\left(a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}\right) \to \mu > 0 \qquad (n \to \infty), \tag{4}$$

*) Această lucrare se publică şi în limba franceză în revista „Matematica", vol. 4(27), 1962.

este o condiție necesară și suficientă pentru ca seria cu termeni pozitivi $\sum_{1}^{\infty} u_n$ să fie convergentă.

Dacă relația (4) este satisfăcută, se obține în conformitate cu lucrarea [4] următoarea formulă asimptotică pentru restul R_n al seriei (1) :

$$R_n \cong \mathcal{R}_n = \frac{a_n u_n - \lim\limits_{n\to\infty} a_n u_n}{\mu}\ ^{1)}.$$

Înlocuind în (4) a_n, prin $a_n^* = \frac{a_n}{\mu} - \frac{\lim a_n u_n}{\mu \cdot u_n}$, se obține

$$\left(a_n^* \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}^*\right) \to 1 \qquad (n \to \infty), \tag{5}$$

iar pentru rest

$$R_n \cong \mathcal{R}_n^* = a_n^* u_n \to 0 \qquad (n \to \infty). \tag{6}$$

Relația (5), la care se atașează (6), va fi denumită forma redusă a relației (4).

În cele ce urmează vom utiliza și o altă variantă a criteriului lui Kummer, [4], și anume :

Existența un șir $\{\alpha_n\}$ de termeni pozitivi care satisface egalitatea

$$\alpha_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - \alpha_{n+1} = 1 \qquad (n > N) \tag{7}$$

este o condiție necesară și suficientă pentru ca seria cu termeni pozitivi, $\sum_{1}^{\infty} u_n$, să fie convergentă.

---

1) $R_n \cong \mathcal{R}_n$ înseamnă că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{R_n}{\mathcal{R}_n} = 1$. Aici $\mathcal{R}_n$ este simbolul unei expresii asimptotice a restului R_n al seriei (1).

Se menționează că *dacă avem un șir* $\{\mathcal{R}_n\}$ *pentru care sînt valabile relațiile* a) $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{R}_n = 0$ *și* b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\mathcal{R}_n - \mathcal{R}_{n+1}}{u_{n+1}} = 1$, *atunci seria* $\sum_{1}^{\infty} u_n$ *este convergentă și* $\mathcal{R}_n$ *este o expresie asimptotică a restului ei.* Într-adevăr din b) rezultă $(1-\varepsilon)u_{n+1} < \mathcal{R}_n - \mathcal{R}_{n+1} < (1+\varepsilon)u_{n+1}$, pentru $n > N_\varepsilon$, ε fiind un număr pozitiv arbitrar, de unde urmează $u_{n+1} < \frac{1}{1-\varepsilon}(\mathcal{R}_n - \mathcal{R}_{n+1})$. După o însumare de la n la $n+p-1$ se obține $u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p} < \frac{1}{1-\varepsilon}(\mathcal{R}_n - \mathcal{R}_{n+p})$. Cînd p tinde către infinit, membrul stîng al inegalității crește, fără să depășească pe $\frac{1}{1-\varepsilon}\mathcal{R}_n$, deci seria coverge. Pentru restul R_n al seriei este valabilă egalitatea $u_{n+1} = R_n - R_{n+1}$ și în consecință b) se scrie $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\mathcal{R}_n - \mathcal{R}_{n+1}}{R_n - R_{n+1}} = 1$. Aplicînd teorema lui Cezàro-Stolz, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\mathcal{R}_n}{R_n} = 1$, ceea ce înseamnă: $R_n \cong \mathcal{R}_n$.

Relația (7) se poate pune sub forma unei ecuații cu diferențe finite

$$\Delta\alpha_n - \left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = -1 \qquad (\Delta\alpha_n = \alpha_{n+1} - \alpha_n), \tag{8}$$

a cărei soluție particulară, $\alpha_n^* = \frac{R_n}{u_n}$ (ceea ce se verifică prin simplă înlocuire), se bucură de proprietatea că seria $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^*}$, adică $\sum_{1}^{\infty} \frac{u_n}{R_n}$ este divergentă [3]. Menționăm că seria $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{a_n^*}$, unde a_n^* satisface (5) și (6), este de asemenea divergentă, deoarece

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^*}{\alpha_n^*} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^* u_n}{\alpha_n^* u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathcal{R}_n^*}{R_n} = 1.$$

Soluția generală a ecuației (8) este $\alpha_n = \frac{R_n + k}{u_n}$, k fiind o constantă nenegativă, arbitrară, [4]. Privind enunțul criteriului lui Kummer din [3], se poate preciza că în afara soluției α_n^*, toate celelalte (deci pentru care $k > 0$) sînt de așa natură încît seriile corespunzătoare de tipul $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n}$ sînt *convergente*. Într-adevăr, pentru $k > 0$ termenul general $\frac{1}{\alpha_n} = \frac{u_n}{R_n + k}$ este echivalent cu termenul general al seriei convergente $\sum_{1}^{\infty} \frac{u_n}{k}$, pentru $n \to \infty$.

În sfîrșit se mai consideră și următoarea formulare a criteriului lui Kummer :

Existența unui șir $\{a_n\}$ de termeni pozitivi, care satisface inegalitatea

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \geqslant \mu > 0 \qquad (n > m,\ m \text{ întreg pozitiv}) \tag{9}$$

este o condiție necesară și suficientă pentru ca seria cu termeni pozitivi, $\sum_{1}^{\infty} u_n$, să fie convergentă.

În [4] se pune în evidență echivalența condițiilor (4), (5), (7) și (9) pentru ca seria (1) să fie convergentă.

2. În vederea celor ce urmează, se vor construi formule adecvate pentru u_n și R_n, pornind de la formele reduse ale relațiilor (4) și (7) și anume :

$$\left.\begin{aligned} & a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} = 1 + \omega_{n+1}; \quad \lim_{n\to\infty} \omega_{n+1} = 0 \\ & R_n \cong \mathcal{R}_n = a_n u_n \to 0 \qquad (n \to \infty) \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

respectiv

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - \alpha_{n+1} = 1, \\ &R_n = \alpha_n u_n \to 0 \qquad (n \to \infty) \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Din (10) se obţine

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a_n}{1 + \omega_{n+1} + a_{n+1}} \qquad (n > N), \quad {}^{2)}$$

de unde rezultă

$$u_n = u_{n+1} \prod_{\nu=m+1}^{n-1} \frac{a_\nu}{1 + \omega_{\nu+1} + a_{\nu+1}} \qquad (n \geqslant m + 2 > N),$$

m fiind un întreg nenegativ. O transformare simplă ne conduce la

$$u_n = \frac{u_{m+1}\left(1 + \omega_{m+1} + a_{m+1}\right)}{a_n} \cdot \frac{1}{\prod\limits_{\nu=m+1}^{n} \left(1 + \frac{1+\omega_\nu}{a_\nu}\right)} \; (n \geqslant m + 1 > N).$$

Cu ajutorul lui (9), relaţia precedentă ia forma

$$u_n = \frac{a_m u_m}{a_n \prod\limits_{\nu=m+1}^{n} \left(1 + \frac{1+\omega_\nu}{a_\nu}\right)} \qquad (n \geqslant m + 1 > N). \tag{12}$$

Pornind de la (11), se obţine pe aceeaşi cale

$$u_n = \frac{\alpha_m u_m}{\alpha_n \prod\limits_{\nu=m+1}^{n} \left(1 + \frac{1}{\alpha_\nu}\right)} \qquad (m \geqslant m + 1 > N). \tag{13}$$

Pentru restul seriei (1) are loc formula asimptotică

$$R_n \cong \mathcal{R}_n = \frac{a_m u_m}{\prod\limits_{m+1}^{n} \left(1 + \frac{1+\omega_\nu}{a_\nu}\right)}, \tag{14}$$

respectiv formula exactă

$$R_n = \frac{\alpha_m u_m}{\prod\limits_{m+1}^{n} \left(1 + \frac{1}{\alpha_\nu}\right)} \qquad (n \geqslant m + 1 > N). \tag{15}$$

---

2) Egalitatea analoagă acesteia, ce se obţine din (11), este menţionată – dintr-un alt punct de vedere – într-o notă de pe pagina 2-a a cărţii [1].

În baza relaţiei (9) se obţine

$$u_n \leqslant \frac{a_m u_m}{a_n \prod\limits_{m+1}^{n} \left(1 + \frac{\mu}{a_\nu}\right)} \qquad (n \geqslant m + 1 > N). \tag{16}$$

Definiţia 1. *O serie cu termeni pozitivi, la care relaţiile* (10) *ataşează şirul* $\{a_n\}$ *cu termeni pozitivi, se denumeşte* s e r i e a_n- c o n v e r g e n t ă. *Termenul general al unei serii* a_n*-convergente se exprimă prin* (12).

Definiţia 2. *O serie cu termeni pozitivi, la care relaţiile de tipul* (11) *ataşează un şir* $\{a_n\}$, *cu termeni pozitivi, astfel încît să aibă loc*

$$a_n \frac{u_u}{u_{u+1}} - a_{u+1} = 1 \quad \text{şi} \quad R_u = a_u u_u \to 0 \quad (n \to \infty),$$

va fi denumită s e r i e s t r i c t a_n- c o n v e r g e n t ă. *Termenul general al unei serii strict* a_n*-convergente se exprimă prin formula* (13), *unde* α_n *se înlocuieşte cu* a_n.

Observaţia 1. Cu ajutorul relaţiilor (9), (10) şi (11) se pot stabili condiţiile pentru ca termenii seriei $\sum\limits_{1}^{\infty} u_n$ să formeze un şir nedescrescător, deci pentru a avea $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$.

Relaţia (9) ne conduce la inegalitatea $\frac{a_n}{\mu + a_{n+1}} \leqslant 1$, de unde rezultă următoarea condiţie suficientă : $\Delta a_n \geqslant -\mu$ $(\mu > 0)$, pentru ca să avem $u_{n+1} \leqslant u_n$.

Relaţia (10), privitoare la o serie a_n-convergentă, ne conduce la $\frac{a_n}{1 + a_{n+1} + \omega_{n+1}} \leqslant 1$, de unde rezultă următoarea condiţie necesară şi suficientă : $\Delta a_n \geqslant -1 - \omega_{n+1}$ $(\lim \omega_{n+1} = 0)$, pentru ca să aibă loc inegalitatea $n_{n+1} \leqslant u_n$; sau, mai simplu, o condiţie suficientă este următoarea :

$$\Delta a_n \geqslant -1 + \varepsilon \quad (1 > \varepsilon > |\omega_{n+1}| \text{ pentru } n > N_\varepsilon).$$

În cazul unei serii strict a_n-convergente, o condiţie necesară şi suficientă pentru ca să avem $u_{n+1} \leqslant u_n$, este $\Delta a_n \geqslant -1$. Din aceste trei cazuri rezultă :

—nedescreşterea şirului $\{a_n\}$ *atrage după sine descreşterea şirului* $\{u_n\}$, *iar de aici urmează că*

—pentru o serie $\sum\limits_{1}^{\infty} u_n$ *cu termeni pozitivi, a cărei convergenţă se poate pune în evidenţă fie prin criteriul lui d'Alembert, fie prin criteriul lui Raabe-Duhamel sau J.Bertand, şirul* $\{u_n\}$ *al termenilor este descrescător, deoarece* $\Delta 1 = 0$, $\Delta n = 1 > 0$ *şi* $\Delta\, n \ln n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \ln(n+1) > 0$.

§ 2. Despre „funcții-ordin"

3. Pentru a putea aprofunda studiul rapidității de convergență este necesar de a face cîteva observații prealabile privitor la ordinul infinitezimal al unei funcții definite pe valorile întregi, pozitive, ale argumentului n (de exemplu u_n și R_n). În această ordine de idei, dacă se poate determina un număr pozitiv μ, astfel încît să avem $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{\frac{1}{n^\mu}} = k > 0$, atunci μ va fi (după É. Borel [1][3]) ordinul infinitezimal al lui u_n. În „Teoria creșterii", Borel menționează cazul cînd un astfel de număr μ nu există, dar se poate găsi un număr μ astfel ca să aibă loc relațiile

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{\frac{1}{n^{\mu-\varepsilon}}} = 0 \quad \text{și} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{\frac{1}{n^{\mu+\varepsilon}}} = \infty,$$

oricît de mic să fie numărul pozitiv ε. În acest caz se va spune că ordinul infinitezimal al infinitului mic u_n este (μ) și se pronunță „μ-paranteză". (Considerații analoge se pot face privind și infiniții mari.)

DEFINIȚIA 3. *Expresia* $\frac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n}$ [4] *se denumește* funcția-ordin a termenului general *al seriei* $\sum\limits_1^\infty u_n$ *cu termeni pozitivi, și va fi notată cu* $\Omega(u_n)$.

Cu ajutorul acestei noțiuni, termenul general al unei serii cu termeni pozitivi (convergente sau divergente) poate fi pus sub forma $u_n = \frac{1}{n^{\Omega(u_n)}}$.

DEFINIȚIA 4. *Expresia* $\frac{\ln\frac{1}{R_n}}{\ln n}$ *se denumește* funcția-ordin a restului *seriei* $\sum\limits_1^\infty u_n$ *cu termeni pozitivi și se va nota cu* $\Omega(R_n)$. *Se va putea scrie, deci* $R_n = \frac{1}{n^{\Omega(R_n)}}$.

Definiția 4 admite o analogie privind expresia asimptotică $\mathcal{R}_n$ a restului R_n.

Considerarea noțiunii de funcție-ordin introduce mai multă generalitate decît noțiunea de ordin infinitezimal. Dacă μ este ordinul infinitezimal

[3]) E. Borel utilizează în cartea sa expresia $\lim\limits_{x\to 0}\frac{y(x)}{x^\mu}$.

[4]) Această expresie intervine de asemenea în enunțul criteriului logaritmic al lui Cauchy.

al lui u_n, în conformitate cu definiția care figurează în [1], vom avea deasemenea $\lim\limits_{n\to\infty}\Omega(u_n) = \mu$. Într-adevăr, dacă

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{\frac{1}{n^\mu}} = k > 0, \quad u_n = \frac{k[1+o(1)]}{n^\mu},$$

deci

$$\frac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n} = \mu - \frac{\ln k[1+o(1)]}{\ln n} \to \mu \ (n\to\infty).$$

Reciproca propoziției de mai sus nu este în general valabilă. Relația $\lim\limits_{n\to\infty}\Omega(u_n) = \mu$ poate fi pusă sub forma

$$\frac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n} = \mu[1+o(1)],$$

de unde

$$u_n = \frac{1}{n^{\mu[1+o(1)]}} = \frac{1}{n^\mu\cdot n^{o(1)}},$$

iar comportarea lui $n^{o(1)}$, cînd $n\to\infty$, poate fi foarte diferită, în funcție de $o(1)$. Să considerăm de exemplu seria $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^2}$. În acest caz $\Omega(u_n) = 1 + 2\frac{\ln\ln n}{\ln n} \to 1 \ (n\to\infty)$. Ordinul infinitezimal „1-paranteză", după Borel, poate fi utilizat aici numai într-un sens nou: „la dreapta", pus în evidență de $\Omega(u_n)$. Dacă se consideră seria $u'_n = \frac{\ln n}{n^2}$, se obține $\Omega(u'_n) = 2 - \frac{\ln\ln n}{\ln n} \to 2 \ (n\to\infty)$, în timp ce

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u'_n}{\frac{1}{n^2}} = \infty \quad \text{și} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{u'_n}{\frac{1}{n^{2-\varepsilon}}} = 0.$$

În acest caz, ordinul infinitezimal „2-paranteză" poate fi utilizat doar într-un sens nou: „la stînga", pus în evidență de $\Omega(u'_n)$.

Bineînțeles, se pot face considerații similare și privitor la $\Omega(R_n)$.

Este util să se precizeze — pornind de la criteriul logaritmic al lui Cauchy — că dacă $\lim\limits_{n\to\infty}\Omega(u_n)$ există pentru o serie convergentă și cu termeni pozitivi, vom avea $\lim\limits_{n\to\infty}\Omega(u_n) \geqslant 1$; relația $\lim\limits_{n\to\infty}\Omega(u_n) < 1$ atrage după sine divergența seriei cu termeni pozitivi. (Pentru seriile convergente ale lui Bertrand se obţine $\lim\limits_{n\to\infty} \Omega(u_n) = 1$.) De asemenea, dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} \Omega(R_n)$, pentru o serie convergentă cu termeni pozitivi, atunci inegalitatea $\lim\limits_{n\to\infty} \Omega(R_n) \geqslant 0$ trebuie să fie îndeplinită ; relaţia $\lim\limits_{n\to\infty} \Omega(R_n) < 0$ atrage după sine divergenţa seriei cu termeni pozitivi (pentru seriile convergente ale lui Bertrand se obţine $\lim\limits_{n\to\infty} \Omega(R_n) = 0$).

4. TEOREMA 1. *Între funcţiile-ordin* $\Omega(u_n)$ *şi* $\Omega(R_n)$ *respectiv* $\Omega(\mathcal{R}_n)$ *şi şirul* $\{\alpha_n\}$ *respectiv* $\{a_n\}$, *care figurează în enunţul* (11), *respectiv* (10) *al criteriului lui Kummer, are loc relaţia*

$$\alpha_n = n^{\Omega(u_n) - \Omega(R_n)}, \tag{17}$$

respectiv

$$a_n = n^{\Omega(u_n) - \Omega(\mathcal{R}_n)} = \alpha_n \cdot n^{\frac{\ln[1+o(1)]}{\ln n}}. \tag{18}$$

Demonstraţie. Pornind de la egalitatea $R_n = \alpha_n u_n$ se obţine

$$\frac{\ln \frac{1}{R_n}}{\ln n} = \frac{\ln \frac{1}{\alpha_n}}{\ln n} + \frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n},$$

adică

$$\Omega(R_n) = -\frac{\ln \alpha_n}{\ln n} + \Omega(u_n), \tag{19}$$

de unde rezultă $\alpha_n = n^{\Omega(u_n) - \Omega(R_n)}$. Pe de altă parte, relaţia $\mathcal{R}_n = a_n u_n$ ne conduce la $a_n = n^{\Omega(u_n) - \Omega(\mathcal{R}_n)}$. Cu ajutorul egalităţii $R_n = \mathcal{R}_n [1 + o(1)]$ se obţine

$$\Omega(R_n) = \Omega(\mathcal{R}_n) + \frac{\ln [1 + o(1)]}{\ln n}, \tag{20}$$

ceace ne conduce prin intermediul egalităţii $a_n = n^{\Omega(u_n) - \Omega(R_n)}$ la cea de a doua egalitate din (18).

Aplicaţie. Să se exprime funcţiile-ordin ale unei serii a_n-convergente, cu ajutorul formulei (12) respectiv al formulei (13), precum şi cu (14) respectiv (15). Se va efectua calculul pentru cazul cînd seria $\sum\limits_{\nu=n_0}^{\infty} \frac{1}{a_\nu^2}$ converge. Acesta este un caz frecvent în aplicaţii practice. Din (12) se obţine

$$\Omega(u_n) = \frac{\ln a_n}{\ln n} + \frac{\ln \prod\limits_{m+1}^{n} \left(1 + \frac{1+\omega_\nu}{a_\nu}\right)}{\ln n} - \frac{\ln a_m u_m}{\ln n},$$

de unde

$$\Omega(u_n) = \frac{\ln a_n}{\ln n} + \frac{\sum\limits_{m+1}^{n} \ln \left(1 + \frac{1+\omega_\nu}{a_\nu}\right)}{\ln n} - \frac{\ln a_m u_m}{\ln n}.$$

Dacă $\sum\limits_{n_0}^{\infty} \frac{1}{a_\nu^2}$ converge, atunci $\sum\limits_{n_0}^{\infty} \frac{(1+\omega_\nu)^2}{a_\nu^2}$ converge de asemenea, deci pentru $\nu > \nu_0$ vom avea $\left|\frac{1+\omega_\nu}{a_\nu}\right| < 1$. Expresia lui $\Omega(u_n)$ se poate pune sub forma

$$\Omega(u_n) = \frac{\ln a_n}{\ln n} + \frac{\sum\limits_{m+1}^{n} \frac{1+\omega_\nu}{a_\nu} + \sum\limits_{m+1}^{n} \vartheta_\nu \left(\frac{1+\omega_\nu}{a_\nu}\right)^2}{\ln n} - \frac{\ln a_m u_m}{\ln n},$$

unde $\lim\limits_{n\to\infty} \vartheta_\nu = -\frac{1}{2}$ [5]).

Pentru seriile ,, $\frac{n}{\mu}$ - convergente'' ($\mu > 0$), se obţine

$$\Omega(u_n) = 1 - \frac{\ln \mu}{\ln n} + \frac{\mu \sum\limits_{m+1}^{n} \frac{1+\omega_\nu}{\nu}}{\ln n} + \frac{\mu^2 \sum\limits_{m+1}^{n} \left(\frac{1+\omega_\nu}{\nu}\right)^2}{\ln n} - \frac{\ln \frac{m u_m}{\mu}}{\ln n}.$$

Pentru seriile ,,strict $\frac{n}{\mu}$ - convergente'' rezultă de aici

$$\Omega(u_n) = 1 - \frac{\ln \mu}{\ln u} + \frac{\mu \sum\limits_{m+1}^{n} \frac{1}{\nu}}{\ln u} + \frac{\mu^2 \sum\limits_{m+1}^{n} \frac{\partial_\nu}{\nu^2}}{\ln n} - \frac{\ln \frac{m u_m}{\mu}}{\ln n}. \tag{21}$$

Deoarece $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n = C_n$, unde $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = 0{,}577 \dots$, adică constanta lui Euler, numărătorul celui de al treilea termen din (21) se scrie $\mu\left[C_n + \ln n - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m}\right)\right]$. Atunci, din (21) rezultă

$$\lim_{n\to\infty} \Omega(u_n) = 1 + \mu.$$

În acelaşi caz, pornind de la (15) se obţine $\lim\limits_{n\to\infty} \Omega(R_n) = \mu$. În celelalte cazuri se procedează în mod similar.

---

[5]) A se vedea capitolul privind produsele infinite în [2].

§ 3. Considerații asupra rapidității de convergență

5. În cartea sa [1], É. Borel definește rapiditatea de convergență a seriei (1) prin „gradul (degré) de mărime a lui $\frac{1}{S-S_n}$ $(n = \infty)$", deci prin „gradul" de mărime a valorii reciproce, $\frac{1}{R_n}$, a restului, cînd $n \to \infty$. Autorul cărții [1] folosește și expresia „ordinul infinitezimal al infinitului mic $S - S_n$, cînd n este infinit mare".

Compararea rapidității de convergență a două serii cu termeni pozitivi $\sum_1^\infty u_n$ și $\sum_1^\infty u_n'$ ale căror resturi sînt respectiv R_n și R_n', se face prin intermediul raportului $\frac{R_n}{R_n'}$ [6]. În această ordine de idei se menționează criteriul de comparare bine cunoscut, [5], care se referă la două serii convergente cu termeni pozitivi; și anume

$$\underline{\lim}\, \frac{u_n}{u_n'} \leqslant \underline{\lim}\, \frac{R_n}{R_n'} \leqslant \overline{\lim}\, \frac{R_n}{R_n'} \leqslant \overline{\lim}\, \frac{u_n}{u_n'}.$$

Concluziile cele mai importante care rezultă din aceste inegalități sînt:

A) Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_n'} = 0$, atunci are loc și relația $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{R_n}{R_n'} = 0$, adică seria $\sum_1^\infty u_n$ converge mai repede decît seria $\sum_1^\infty u_n'$.

B) Dacă $0 < a < \frac{u_n}{u_n'} < b < +\infty$, atunci $0 < c < \frac{R_n}{R_n'} < d < +\infty$, deci cele două serii cu termeni pozitivi converg la fel de repede. Reciproca acestei propoziții nu este adevărată în general.

Prezintă interes următoarea problemă: ce relație există între funcțiile-ordin a două serii convergente cu termeni pozitivi, pentru care are loc sistemul de inegalități $0 < a < \frac{u_n}{u_n'} < b < +\infty$? Răspunsul la această intrebare este dat în următoarea teoremă:

TEOREMA 2. *Dacă pentru seriile* $\sum_1^\infty u_n$ *și* $\sum_1^\infty u_n'$, *convergente și cu termeni pozitivi, au loc inegalitățile* $0 < a < \frac{u_n}{u_n'} < b < +\infty$, *cel puțin de la un indice suficient de mare, atunci diferențele* $\Omega(u_n') - \Omega(u_n)$ *și* $\Omega(R_n') - \Omega(R_n)$ *sînt de ordinul lui* $\frac{1}{\ln n}$ *cînd* $n \to \infty$.

Demonstrație. Din inegalitățile $a < \frac{u_n}{u_n'} < b$ se obține $a\frac{1}{u_n} < \frac{1}{u_n'} < b\frac{1}{u_n}$, adică $\ln a + \ln\frac{1}{u_n} < \ln\frac{1}{u_n'} < \ln b + \ln\frac{1}{u_n}$, de unde $\frac{\ln a}{\ln n} + \Omega(u_n) < \Omega(u_n') < \frac{\ln b}{\ln n} + \Omega(u_n)$. Inegalitățile $\frac{\ln a}{\ln n} < \Omega(u_n') - \Omega(u_n) < \frac{\ln b}{\ln n}$ puse sub forma egalității $\Omega(u_n') - \Omega(u_n) = \frac{\ln k_n}{\ln n}$ $(a < k_n < b)$, exprimă ceea ce trebuia demonstrat.

Privitor la diferența $\Omega(R_n') - \Omega(R_n)$, ea se studiază în același fel, deoarece din $a < \frac{u_n}{u_n'} < b$ rezultă în conformitate cu punctul B) de mai sus, inegalitățile $c < \frac{R_n}{R_n'} < d$.

6. Șirurile de tipul $\langle a_n \rangle$, care figurează în enunțul criteriului lui Kummer, caracterizează, într-un anumit sens, rapiditatea de convergență a seriilor cu termeni pozitivi. În această ordine de idei se demonstrează următoarele teoreme:

TEOREMA 3. *Dacă pentru o serie* a_n*-convergentă,* $\sum_1^\infty u_n$, *și pentru o serie* a_n'*-convergentă,* $\sum_1^\infty u_n'$, *au loc inegalitățile* $c_1 < \frac{u_n}{u_n'} < c_2$ $(n > N)$, atunci *vor fi valabile și inegalitățile* $k < \frac{a_n}{a_n'} < K$, *unde* c_1, c_2, k *și* K *sînt numere pozitive.*

Demonstrație. În conformitate cu punctul 5 din acest paragraf, are loc $c' < \frac{R_n}{R_n'} < c''$, c' și c'' fiind numere pozitive. Deoarece în baza relațiilor (11) avem $R_n = \alpha_n u_n$ și $R_n' = \alpha_n' u_n'$, rezultă $\frac{\alpha_n}{\alpha_n'} = \frac{R_n}{R_n'}\frac{u_n'}{u_n}$, deci $\frac{c'}{c_2} < \frac{\alpha_n}{\alpha_n'} < \frac{c''}{c_1}$. Ținînd seamă de egalitățile $a_n = \alpha_n[1 + o(1)]$ și $a_n' = \alpha_n'[1 + o(1)]$, cînd $n \to \infty$, rezultă $0 < k < \frac{a_n}{a_n'} < K$ pentru $n > N$.

Observația 2. Reciproca teoremei 2 nu este adevărată, după cum rezultă din exemplul seriilor $u_n = \frac{1}{2^n}$ și $u_n' = \frac{1}{3^n}$. În acest caz $a_n = 1$ și $a_n' = \frac{1}{2}$, deci $\frac{a_n}{a_n'} = 2$ și totuși $\frac{u_n}{u_n'} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \to \infty$ $(n \to \infty)$, adică $\sum_1^\infty u_n'$ converge mai repede decît $\sum_1^\infty u_n$.

O serie a_n-convergentă nu are neapărat aceeași rapiditate de convergență ca și o serie strict a_n-convergentă. Într-adevăr seria $\sum_1^\infty \frac{n}{2^n}$ este

„1-convergentă", pe cînd seria $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ este „strict 1-convergentă", și totuși

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} = +\infty,$$ deci a doua serie converge mai repede decît prima.

Este cazul să se enunțe aici propoziția: două serii a_n-convergente nu converg neapărat cu aceeași rapiditate (formula (25) cu ajutorul căreia se demonstrează această afirmație se va întîlni mai jos). Dacă în (25) se pune $a_\nu = a'_\nu$, se obține

$$\frac{R'_n}{R_n} = \frac{u'_m}{u_m}\left[1 + o(1)\right] \prod_{\nu=m+1}^{n} \left(1 + \frac{\omega_\nu - \omega'_\nu}{a_\nu + 1 + \omega_\nu}\right)$$

și produsul infinit va putea să aibă o valoare finită (nulă sau nu), respectiv o valoare infinită, în funcție de ω_ν și ω'_ν. În consecință, raportul $\frac{R'_n}{R_n}$ se comportă în mod destul de diferit cînd $n \to \infty$. Prezintă un inters teoretic problema studierii ordinului de mărime a diferenței dintre funcțiile-ordin ale termenilor generali a două serii a_n-convergente. În § 2 s-a stabilit că ordinul infinitezimal al termenului general al unei serii $\frac{n}{\mu}$ -convergente este $1 + \mu$ $(\mu > 0)$.

Pentru seriile $\sum_{m+1}^{\infty} u_n$ și $\sum_{1}^{\infty} u'_n$, ambele $\frac{n}{\mu}$ -convergente, avem :

$$\Omega(u_n) - \Omega(u'_u) = \frac{\mu \sum_{m+1}^{n} \frac{\omega_\nu - \omega'_\nu}{\nu}}{\ln n} + \frac{\mu^2 \sum_{m+1}^{n} \left[\frac{\vartheta_\nu (1 + \omega_\nu)^2 - \vartheta'_\nu (1 + \omega'_\nu)^2}{\nu^2}\right] - \ln \frac{u_m}{u'_m}}{\ln n}.$$

Numărătorul celei de a doua fracții din membrul drept al egalității de mai sus este finit, deci fracția este cel puțin de ordinul lui $\frac{1}{\ln n}$. Dacă suma $\sum_{m+1}^{n} \frac{\omega_\nu - \omega'_\nu}{\nu}$ rămîne mărginită cînd $n \to \infty$, atunci prima fracție este de asemenea cel puțin de ordinul lui $\frac{1}{\ln n}$. Dacă însă $\overline{\lim}_{n\to\infty} \left| \sum_{m+1}^{n} \frac{\omega_\nu - \omega'_\nu}{\nu} \right| = +\infty$, atunci punînd $\sup |\omega_\nu - \omega'_\nu| = \delta_{m+1}$, se va putea scrie

$$\left| \sum_{m+1}^{n} \frac{\omega_\nu - \omega'_\nu}{\nu} \right| < \delta_{m+1} \sum_{m+1}^{n} \frac{1}{\nu} = \delta_{m+1} \cdot \frac{\ln n + C_n - \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m}\right)}{\ln n}.$$

Această ultimă expresie tinde către δ_{m+1} cînd $n \to \infty$, deci

$$\left| \frac{\mu \sum_{m+1}^{n} \frac{\omega_\nu - \omega'_\nu}{\nu}}{\ln n} \right| < \frac{\mu\, \delta_{m+1}}{\ln n}.$$

În acest caz diferența $\Omega(u_n) - \Omega(u'_n)$ este de asemenea cel puțin de ordinul lui $\frac{1}{\ln n}$. Putem afirma că dacă, începînd cu un indice suficient de mare, inegalitățile $0 < k < \frac{a_n}{a'_n} < K < \infty$ au loc, atunci ordinul de mărime al raportului $\frac{R_n}{R'_n}$ este același cu cel al raportului $\frac{u_n}{u'_n}$. Într-adevăr, din egalitatea

$$\frac{R_n}{R'_n} = \frac{a_n}{a'_n}\left[1 + o(1)\right]\frac{u_n}{u'_n}$$

rezultă

$$k[1 + o(1)]\frac{u_n}{u'_n} < \frac{R_n}{R'_n} < K[1 + o(1)]\frac{u_n}{u'_n},$$

adică

$$k'\frac{u_n}{u'_n} < \frac{R_n}{R'_n} < K'\frac{u_n}{u'_n} \qquad \begin{cases} (0 < k' < k < K < K' < \infty) \\ (n < N) \end{cases} \tag{22}$$

și de asemenea

$$\frac{1}{K'}\frac{R_n}{R'_n} < \frac{u_n}{u'_n} < \frac{1}{k'}\frac{R_n}{R'_n}. \tag{23}$$

Din (22) și (23) rezultă

TEOREMA 4. *Dacă pentru o serie a_n-convergentă $\sum_{1}^{\infty} u_n$ și una a'_n-convergentă $\sum_{1}^{\infty} u'_n$ au loc inegalitățile $0 < \overline{\lim} \frac{a_n}{a'_n} \leqslant \overline{\lim} \frac{a_n}{a'_n} < +\infty$, atunci relațiile*

$$0 < \underline{\lim} \frac{u_n}{u'_n} \leqslant \overline{\lim} \frac{u_n}{u'_n} < +\infty \quad \text{și} \quad 0 < \underline{\lim} \frac{R_n}{R'_n} \leqslant \overline{\lim} \frac{R_n}{R'_n} < +\infty$$

sînt echivalente. În particular, din $\overline{\lim} \frac{u_n}{u'_n} = \infty$ rezultă $\overline{\lim} \frac{R_n}{R'_n} = \infty$ și invers; de asemenea din $\underline{\lim} \frac{u_n}{u'_n} = 0$ rezultă $\underline{\lim} \frac{R_n}{R'_n} = 0$ și invers.

Menționăm că această teoremă completează propoziția 7.30 din [5], care se referă la o condiție suficientă, dar nenecesară pentru ca două serii cu termeni pozitivi să aibă aceeași rapiditate de conve gență. (A se vedea § 3, nr. 5. din prezentul articol.)

TEOREMA 5. *Dacă începînd de la un indice sufici nt de mare, termenii corespunzători a două serii convergente și cu termeni poziti vı sînt proporționali, adică $\frac{u'_n}{u_n} = k > 0$ $(n > N)$, atunci ambele serii sînt a_n-convergente sau strict a_n-convergente.*

Demonstrație. Dacă înlocuim în (10) și (11) u_n prin ku_n, se ajunge la aceleași relații de la care s-a pornit.

TEOREMA 6. *Pentru două serii a_n-convergente are loc relația*

$$\frac{u_{n+1}}{u'_{n+1}} = \frac{u_n}{u'_n}[1 + o(1)]$$

și în acest caz se va spune că termenii celor două șiruri sînt cuasi-proporționali. Pentru două serii strict a_n-convergente avem proporționalitate riguroasă.

Demonstrație. În conformitate cu (10) se poate pune

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a_n}{1 + a_{n+1} + \omega_{n+1}} \quad \text{și} \quad \frac{u'_{n+1}}{u'_n} = \frac{a_n}{1 + a_{n+1} + \omega'_{n+1}},$$

de unde rezultă

$$\frac{u_{n+1}}{u'_{n+1}} = \frac{u_n}{u'_n} \frac{1 + a_{n+1} + \omega'_{n+1}}{1 + a_{n+1} + \omega_{n+1}} = \frac{u_n}{u'_n}[1 + o(1)].$$

Pentru $\omega'_n \equiv \omega_n \equiv 0$, se obține $\frac{u_{n+1}}{u'_{n+1}} = \frac{u_n}{u'_n}$.

Observația 3. Noțiunea de cuasi-proporționalitate nu este identică cu cea de proporționalitate asimptotică, aceasta din urmă definindu-se în teoria seriilor prin relația $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{u'_n} = k \neq 0$. Cuasi-proporționalitatea nu presupune ca cele două serii să fie de aceeași natură. Astfel, de exemplu, în cazul seriilor $\sum\limits_1^{\infty} \frac{1}{n^2}$ și $\sum\limits_1^{\infty} \frac{1}{n}$ putem vorbi de cuasi-proporționalitate, dar proporționalitatea asimptotică nu are loc. În cazul de cuasi-proporționalitate, din relația $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda \neq 0$ rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u'_{n+1}}{u'_n} = \lambda$, iar din egalitatea $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u'_{n+1}}{u'_n} = \lambda \neq 0$ rezultă cuasi-proporționalitatea.

TEOREMA 7. *Considerăm o serie a_n-convergentă $\sum\limits_1^{\infty} u_n$ și o serie a'_n-convergentă $\sum\limits_1^{\infty} u'_n$. Fie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a'_n = \infty$.*

1°. *Dacă șirurile $\{a_n\}$ și $\{a'_n\}$ sînt asimptotic proporționale, atunci șirurile $\{u_n\}$ și $\{u'_n\}$ vor fi cuasi-proporționale;*

2°. *Dacă șirurile $\{u_n\}$ și $\{u'_n\}$ sînt asimptotic proporționale, atunci șirurile $\{a_n\}$ și $\{a'_n\}$ vor fi cuasi-proporționale.*

În cazul 1° resturile vor fi cuasi-proporționale, iar în cazul 2° resturile celor două serii vor fi asimptotic proporționale.

Demonstrație. Din condițiile cuprinse în enunțul teoremei rezultă

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a_n}{1 + a_{n+1} + \omega_{n+1}} \quad \text{și} \quad \frac{u'_{n+1}}{u'_n} = \frac{a'_n}{1 + a'_{n+1} + \omega'_{n+1}},$$

de unde

$$\frac{u_{n+1}}{u'_{n+1}} = \frac{u_n}{u'_n} \cdot \frac{a_n}{a'_n} \cdot \frac{a'_{n+1} + 1 + \omega'_{n+1}}{a_{n+1} + 1 + \omega_{n+1}} \qquad (n > N),$$

adică

$$\frac{u_{n+1}}{u'_{n+1}} = \frac{u_n}{u'_n} \frac{a_n}{a'_n} \frac{a'_{n+1}}{a_{n+1}}[1 + o(1)]. \tag{24}$$

Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a'_n} = k \neq 0$, se obține $\frac{u_{n+1}}{u'_{n+1}} = \frac{u_n}{u'_n}[1 + o(1)]$. În ceea ce privește resturile, din (24) rezultă

$$\frac{\mathcal{R}_{n+1}}{\mathcal{R}'_{n+1}} = \frac{\mathcal{R}_n}{\mathcal{R}'_n}[1 + o(1)], \quad \text{de unde} \quad \frac{R_{n+1}}{R'_{n+1}} = \frac{R_n}{R'_n}[1 + o(1)].$$

Relația (24) se transformă în

$$\frac{a_{n+1}}{a'_{n+1}} = \frac{a_n}{a'_n} \frac{u_n}{u'_n} \frac{u'_{n+1}}{u_{n+1}}[1 + o(1)].$$

Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{u'_n} = l \neq 0$, atunci $\frac{a_{n+1}}{a'_{n+1}} = \frac{a_n}{a'_n}[1 + o(1)]$. În ceea ce privește resturile, cuasi-proporționalitatea rezultă ca și în primul caz, proporționalitatea asimptotică este trivială (§ 3, nr. 5).

TEOREMA 8. *Fie seria a_n-convergentă $\sum\limits_1^{\infty} u_n$ și seria a'_n-convergentă $\sum\limits_1^{\infty} u'_n$. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a'_n}{a_n} = +\infty$ și $\lim\limits_{n\to\infty} a'_n = \infty$, atunci seria $\sum\limits_1^{\infty} u_n$ converge mai repede decît seria $\sum\limits_1^{\infty} u'_n$.*

Demonstrație. Utilizînd formula (12), se ajunge la

$$\frac{R'_n}{R_n} = \frac{\mathcal{R}'_n}{\mathcal{R}_n}[1 + o(1)] = \frac{a'_n u'_n}{a_n u_n}[1 + o(1)] =$$

$$= \frac{a'_m u'_m}{a_m u_m}[1 + o(1)] \prod_{\nu=m+1}^{n} \frac{1 + \dfrac{1 + \omega_\nu}{a_\nu}}{1 + \dfrac{1 + \omega'_\nu}{a'_\nu}}.$$

După o transformare simplă

$$\frac{R'_n}{R_n} = \frac{a'_m u'_m}{a_m u_m}[1+o(1)] \prod_{\nu=m+1}^{n} \left[1 + \frac{1+\omega_\nu - (1+\omega'_\nu)\dfrac{a_\nu}{a'_\nu}}{a_\nu + (1+\omega'_\nu)\dfrac{a_\nu}{a'_\nu}} \right] \tag{25}$$

Începînd de la un indice m suficient de mare, seria cu termenul general

$$w_\nu = \frac{1+\omega_\nu - (1+\omega'_\nu)\dfrac{a_\nu}{a'_\nu}}{a_\nu + (1+\omega'_\nu)\dfrac{a_\nu}{a'_\nu}}$$

va avea toți termenii pozitivi, căci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_\nu}{a'_\nu} = 0$ și produsul care figurează în (25) va avea o limită finită sau infinită după cum $\sum\limits_1^\infty w_\nu$ converge sau diverge. Deci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R'_n}{R_n} = \frac{a'_m u'_m}{a_m u_m} \lim_{n\to\infty} \prod_{\nu=m+1}^{n} (1+w_\nu)\,. \tag{26}$$

Considerînd seria $v_\nu = \frac{1}{a_\nu}$, rezultă $\lim\limits_{\nu\to\infty} \frac{w_\nu}{v_\nu} = 1$ și în consecință din divergența seriei $\sum\limits_1^\infty \frac{1}{a_\nu}$ (a se vedea §1, 1) urmează divergența seriei $\sum\limits_1^\infty w_\nu$ și a produsului $\prod\limits_{m+1}^\infty (1+w_\nu)$. Relația (26) se scrie deci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{R'_n}{R_n} = \infty$, ceea ce înseamnă că $\sum\limits_1^\infty u_n$ converge mai repede decît $\sum\limits_1^\infty u'_n$.

COROLARUL 1. *Din teorema* 8 *rezultă că formele limită ale criteriilor lui d'Alembert, Raabe-Duhamel și Bertrand pun în evidență convergența unor serii, din ce în ce mai încet convergente, căci pentru șirurile de tipul* $\langle a_n \rangle$, *care figurează respectiv în aceste criterii, și anume*:

$$\frac{1}{\mu_0},\ \frac{n}{\mu_1},\ \frac{n \ln n}{\mu_2} \quad (\textit{unde}\ \mu_0,\ \mu_1,\ \mu_2, > 0),\ \textit{avem}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n}{\mu_1}}{\dfrac{1}{\mu_0}} = \infty \quad \textit{și} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n \ln n}{\mu_2}}{\dfrac{n}{\mu_1}} = \infty\,.$$

TEOREMA 9. *Fie o serie* a_n*-convergentă* $\sum\limits_1^\infty u_n$ *și o serie* a'_n*-convergentă* $\sum\limits_1^\infty u'_n$. *Dacă inegalitățile*

$$\underline{\lim}\, \frac{a'_n}{a_n} > 1 \quad \textit{și} \quad \underline{\lim}\, a_n > 0 \tag{27}$$

sînt satisfăcute, atunci seria $\sum\limits_1^\infty u_n$ *converge mai repede decît seria* $\sum\limits_1^\infty u'_n$.

Demonstrație. Din condițiile (27) se obține $\frac{a_n}{a'_n} < \tau < 1$ și $a_n > a > 0$ $(n > N)$. Plecînd de la (25), rezultă

$$w_\nu = \frac{1+\omega_\nu - (1+\omega'_\nu)\dfrac{a_\nu}{a'_\nu}}{a_\nu + (1+\omega'_\nu)\dfrac{a_\nu}{a'_\nu}} > \frac{1+\omega_\nu - (1+\omega'_\nu)\tau}{a_\nu + (1+\omega'_\nu)\tau}\,,$$

de unde

$$\frac{1+\omega_\nu - (1+\omega'_\nu)\tau}{a_\nu + (1+\omega'_\nu)\tau} \cong \frac{1-\tau}{a_\nu+\tau} = w'_\nu \qquad (\nu \to \infty).$$

Considerînd seria $v_\nu = \frac{1}{a_\nu}$ și comparînd termenii ei cu termenii corespunzători ai seriei $\sum\limits_1^\infty w'_\nu$, rezultă

$$\frac{w'_\nu}{v_\nu} = \frac{\dfrac{1-\tau}{a_\nu+\tau}}{\dfrac{1}{a_\nu}} = \frac{1-\tau}{1+\dfrac{\tau}{a_\nu}}\,.$$

Deoarece

$$\frac{1-\tau}{1+\dfrac{\tau}{a}} < \frac{1-\tau}{1+\dfrac{\tau}{a_\nu}} < 1-\tau,$$

seria cu termenii pozitivi $\sum\limits_n^\infty \frac{1-\tau}{a_\nu+\tau}$ este de aceeași natură ca și seria $\sum\limits_1^\infty \frac{1}{a_\nu}$, deci divergentă. În consecință, seria $\sum\limits_1^\infty w_\nu$ este de asemenea divergentă. Astfel produsul $\prod\limits_{m+1}^{n} (1+w_\nu)$ are drept limită $+\infty$ cînd $n \to \infty$ și prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{R'_n}{R_n} = \infty$.

7. Teoremele 8 şi 9 fac posibilă o anumită ordonare pe clase a mulţimii seriilor convergente cu termeni pozitivi, după rapiditatea lor de convergenţă. Se consideră un şir de şiruri cu termeni pozitivi. Şirul de rangul p se notează cu $\left\{a_n^{(p)}\right\}=\left\{a_1^{(p)}, a_2^{(p)}, a_3^{(p)}, \ldots\right\}$. Dacă două şiruri consecutive, oarecare, satisfac condiţiile

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{a_n^{(p+1)}}{a_n^{(p)}} > 1 \ (p = 1, 2, \ldots) \quad \text{şi} \quad \varliminf a_n^{(1)} > 0 \tag{28}$$

obţinem prin aplicarea repetată a teoremei 9, $\varliminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n^{(p)}}{a_n^{(q)}} > 1$, dacă $p > q$ $(p, q = 1, 2, \ldots)$. Rezultă de aici că *fiecare şir de tipul* $\left\{a_n^{(1)}\right\} \left\{a_n^{(2)}\right\}, \ldots, \left\{a_n^{(p)}\right\}, \ldots,$ *care satisface inegalităţile* (28), *determină în mulţimea seriilor convergente cu termeni pozitivi, clase de serii* $a_n^{(p)}$*-convergente* $(p = 1, 2, \ldots)$, *astfel încît un element — o serie — din clasa de rangul* p *va converge mai încet decît un element arbitrar din clasa de rangul* q, *dacă* $q < p$. *Clasa seriilor* $a_n^{(p)}$*-convergente nu este ea însăşi ordonată prin intermediul teoremelor 8 şi* 9 (a se vedea observaţia 2).

§ 4. Determinarea domeniului de aplicabilitate al criteriilor de convergenţă [6])

8. În teoria clasică a seriilor cu termeni pozitivi se demonstrează criterii de convergenţă, fără să se determine în general *mulţimea seriilor* a căror convergenţă se poate pune în evidenţă cu ajutorul acestor criterii.

În acest paragraf se va prezenta, pornind de la criteriul de convergenţă al lui Kummer, o metodă unitară pentru determinarea domeniului de aplicabilitate al diferitelor criterii de convergenţă care derivă din cel al lui Kummer. În prealabil se demonstrează următoarea

LEMĂ. *Dacă* $\{a_n\}$ *este un şir de numere pozitive şi* $\mu > 0$, *atunci seria cu termenul general*

$$c_n = \frac{1}{a_n} e^{-\mu \sum\limits_{\nu=m+1}^{n} \frac{1}{a_\nu}} \quad (m \text{ întreg nenegativ}) \tag{29}$$

este convergentă.

Demonstraţie. Se aplică criteriul lui Kummer luînd pentru şirul care figurează în enunţul criteriului chiar şirul $\{a_n\}$. Rezultă

$$a_n \frac{c_n}{c_{n+1}} - a_{n+1} = a_{n+1} e^{\mu\frac{1}{a_{n+1}}} - a_{n+1} = a_{n+1}\left(e^{\frac{\mu}{a_{n+1}}} - e^0\right).$$

[6]) Unele rezultate din acest paragraf au fost prezentate la şedinţa de comunicări a Filialei din Cluj a Societăţii de ştiinţe matematice şi fizice din R.P. Romînă, la 20 ianuarie 1961.

Aplicînd teorema mediei a lui Lagrange, la diferenţa ce figurează în paranteza de mai sus, obţinem

$$a_n \frac{c_n}{c_{n+1}} - a_{n+1} = \mu e^{\frac{\mu\theta}{a_{n+1}}} > \mu \quad (0 < \theta < 1) \tag{30}$$

şi cu aceasta lema este demonstrată.

Observaţia 4. În baza lemei se poate considera transformarea $C(u_n)$ definită prin

$$C(u_n) = u_n e^{-\mu \sum\limits_{\nu=m+1}^{n} u_\nu} \quad (\mu > 0,\ m \text{ întreg pozitiv}), \tag{31}$$

$\sum\limits_1^\infty u_n$ fiind o serie cu termeni pozitivi oarecare. *Operaţia „C" definită prin* (31), *transformă o serie cu termeni pozitivi, convergentă sau divergentă, totdeauna într-o serie cu termeni pozitivi şi convergentă.*

Dacă seria originală $\sum\limits_1^\infty u_n$ este convergentă, transformata sa $\sum\limits_1^\infty C(u_n)$ va avea aceeaşi rapiditate de convergenţă, ceea ce se poate vedea din raportul a doi termeni corespunzători

$$\lim_{n\to\infty} \frac{C(u_n)}{u_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} e^{\mu \sum\limits_{m+1}^{n} u_\nu}} = \frac{1}{e^{\mu R_m}}. \tag{32}$$

Notînd restul seriei $\sum\limits_1^\infty C(u_n)$ cu R_n^*, se obţine din (32) (a se vedea şi § 3, nr. 5)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R_n^*}{R_n} = \frac{1}{e^{\mu R_n}},$$

adică

$$R_n^* \cong R_n\, e^{-\mu R_m}. \tag{33}$$

9. În scopul examinării criteriilor clasice este suficient să se considere două alternative:

I. Fie $0 < a_n \leqslant a$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Din inegalitatea (16) rezultă

$$u_n \leqslant \frac{a_m u_m}{a_n \prod\limits_{m+1}^{n} \left(1 + \frac{\mu}{a_\nu}\right)} \leqslant \frac{a_m u_m}{a_n \prod\limits_{m+1}^{n} \left(1 + \frac{\mu}{a}\right)} = \frac{a_m u_m}{a_n \left(1 + \frac{\mu}{a}\right)^{n-m}} \tag{34}$$

Pentru a putea trage o concluzie cu privire la cazul criteriului lui d'Alembert, se pune în (9) $a_n = 1$ şi din (34) rezultă

$$u_n \leqslant \frac{u_n \left(1 + \frac{1}{a}\right)^m}{\left(1 + \frac{\mu}{a}\right)^n}, \quad \text{sau} \quad \frac{u_n}{\frac{1}{\left(1 + \frac{\mu}{a}\right)^n}} \leqslant u_m \left(1 + \frac{1}{a}\right)^m$$

Deoarece $1 + \frac{\mu}{a} > 1$, rezultă că $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{\mu}{a}\right)^n}$ este o serie geometrică cu termeni pozitivi avînd rația mai mică decît unitatea; ea converge deci conform criteriului lui d'Alembert interpretat drept un caz particular al criteriului lui Kummer. În consecință se enunță următoarea propoziție:

PROPOZIȚIA 1. *Cu ajutorul criteriului lui d'Alembert se poate demonstra convergența acelor și numai a acelor serii cu termeni pozitivi ai căror termeni generali tind „nu mai puțin repede"*[7] *către zero decît termenul general al unei serii din clasa seriilor geometrice convergente cu termeni pozitivi.*

Clasa seriilor geometrice considerate în propoziția 1, indică sensibilitatea criteriului lui d'Alembert.

II. Fie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. Plecînd de la (16), produsul care figurează în numitor se transformă după cum urmează

$$\prod_{m+1}^{n}\left(1 + \frac{\mu}{a_\nu}\right) = e^{\ln \prod\limits_{m+1}^{n}\left(1 + \frac{\mu}{a_\nu}\right)} = e^{\sum\limits_{m+1}^{n} \ln\left(1 + \frac{\mu}{a_\nu}\right)}$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, începînd cu un indice suficent de mare au loc inegalitățile $0 < \frac{\mu}{a_\nu} < 1$, și se va putea scrie

$$\prod_{m+1}^{n}\left(1 + \frac{\mu}{a_\nu}\right) = e^{\sum\limits_{m+1}^{n}\left[\frac{\mu}{a_\nu} + \vartheta_\nu\left(\frac{\mu}{a_\nu}\right)^2\right]}, \quad \text{unde } \lim_{\nu\to\infty} \vartheta_\nu = -\frac{1}{2}. \text{ [8]}$$

Este suficient să se considere cazul cînd seria $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{a_\nu^2}$ converge, atunci relația (16) ia forma

$$u_n \leqslant \frac{a_m u_m}{a_n e^{\mu \sum\limits_{m+1}^{n} \frac{1}{a_\nu}} e^{\mu^2 \sum\limits_{m+1}^{n} \frac{\vartheta_\nu}{a_\nu^2}}},$$

adică

$$\frac{u_n}{\frac{1}{a_n} e^{-\mu \sum\limits_{m+1}^{n} \frac{1}{a_\nu}}} \leqslant \frac{a_m u_m}{e^{\mu^2 \sum\limits_{m+1}^{n} \frac{\vartheta_\nu}{a_\nu^2}}} \tag{35}$$

---

[7] u_n tinde „nu mai puțin repede" către zero ca v_n, dacă $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$ și $0 \leqslant \underline{\lim} \frac{u_n}{v_n} \leqslant \overline{\lim} \frac{u_n}{v_n} < +\infty$ $(u_n, v_n > 0)$.

[8] A se vedea nota 5.

Expresia din membrul al doilea al inegalității (35) are o limită finită pentru $n \to \infty$, și în consecință

$$0 \leqslant \underline{\lim} \frac{u_n}{c_n} \leqslant \overline{\lim} \frac{u_n}{c_n} \leqslant K, \tag{36}$$

unde c_n este termenul general al seriei (29), K fiind o constantă pozitivă. Din (36) rezultă

TEOREMA 10. *Seria cu termenii pozitivi* $\sum\limits_{m+1}^{n} u_n$, *pentru care relația* (9) *și condiția suplimentară* $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{m+1}^{n} \frac{1}{a_\nu^2} < +\infty$ *sînt valabile, este convergentă. Termenul ei general tinde „nu mai puțin repede" către zero, ca termenul general a unei serii de tipul* c_n, (29).

COROLARUL 2. *Rapiditatea de convergență a seriei* $\sum\limits_{m+1}^{n} u_n$ *nu este mai mică decît a seriei* $\sum\limits_{m+1}^{n} c_n$. (A se vedea § 3, nr. 5.)

Pentru a obține criteriul lui Raabe-Duhamel, se pune $a_n = n$ în (9). Expresia

$$\frac{u_n}{\frac{1}{a_n} e^{-\mu \sum\limits_{m+1}^{n} \frac{1}{a_\nu}}},$$

care figurează în (35), ia forma

$$\frac{u_n}{\frac{1}{n} e^{-\mu \sum\limits_{m+1}^{n} \frac{1}{\nu}}}$$

În conformitate cu inegalitățile

$$\int_{m+1}^{n+1} \frac{dx}{x} < \sum_{\nu=m+1}^{n} \frac{1}{\nu} < \int_{m}^{n} \frac{dx}{x} \quad (n \geqslant m + 1 \geqslant 2),$$

termenul general al seriei $\frac{1}{n} e^{-\mu \sum\limits_{m+1}^{n} \frac{1}{\nu}}$ se poate delimita după cum urmează

$$\frac{1}{n} e^{-\mu \ln \frac{n+1}{m+1}} > \frac{1}{n} e^{-\mu \sum\limits_{m+1}^{n} \frac{1}{\nu}} > \frac{1}{n} e^{-\mu \ln \frac{n}{m}},$$

adică

$$\frac{1}{n}\left(\frac{n+1}{m+1}\right)^{-\mu} > \frac{1}{n} e^{-\mu \sum\limits_{m+1}^{n} \frac{1}{\nu}} > \frac{1}{n}\left(\frac{n}{m}\right)^{-\mu}$$

Aceste inegalități din urmă se transcriu

$$(m+1)^{\mu}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\mu}\frac{1}{n^{2+\mu}} > \frac{1}{n}\,e^{-\mu\sum\limits_{m+1}^{n}\frac{1}{\nu}} > m^{\mu}\frac{1}{n^{1+\mu}},$$

de unde

$$(m+1)^{\mu} > \frac{\frac{1}{n}\,e^{-\mu\sum\limits_{m+1}^{n}\frac{1}{\nu}}}{\frac{1}{n^{1+\mu}}} > m^{\mu}. \tag{37}$$

Deoarece m este în cazul de față un întreg pozitiv anumit și $\mu > 0$, seria cu termenul general $\frac{1}{n}\,e^{-\mu\sum\limits_{m+1}^{n}\frac{1}{\nu}}$ converge cu aceeași rapiditate ca seria cu termenul general $\frac{1}{n^{1+\mu}}$. Se menționează că termenii generali ai celor două serii tind deodată către zero, cînd $n \to \infty$.

În baza relațiilor (35) și (37) și a teoremei 10, se enunță

PROPOZIȚIA 2. *Cu ajutorul criteriului lui Raabe-Duhamel se poate demonstra convergența acelor și numai a acelor serii cu termeni pozitivi ai căror termeni generali tind „nu mai puțin repede" către zero, decît termenul general al unei serii din clasa seriilor armonice generalizate* $\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\mu}}$ $(\mu < 0)$.

Rapiditatea de convergență a seriei $\sum\limits_{m+1}^{\infty} u_n$ *este nu mai mică decît cea a seriei* $\sum\limits_{m+1}^{n}\frac{1}{n^{1+\mu}}$.

Clasa seriilor armonice generalizate, convergente, indică sensibilitatea criteriului în cauză.

Pentru a obține criteriul lui J. Bertrand, se pune în (9) $a_n = n \cdot \ln n \cdot \ln\ln n \ldots \underbrace{\ln\ln \ldots \ln}_{p} n$, p fiind întreg pozitiv. Se urmează același cale prin care s-a ajuns la propoziția 2.

Pornind de la inegalitățile

$$\int\limits_{m+1}^{n+1}\frac{dx}{x\ln x \ldots \ln\ln \ldots \ln x} < \sum_{m+1}^{n}\frac{1}{a_\nu} < \int\limits_{m}^{n}\frac{dx}{x\ln x \ldots \ln\ln \ldots \ln x},$$

se ajunge la

$$\ln\frac{\ln\ln \ldots \ln(n+1)}{\ln\ln \ldots \ln(m+1)} < \sum_{m+1}^{n}\frac{1}{a_\nu} < \ln\frac{\ln\ln \ldots \ln n}{\ln\ln \ldots \ln m},$$

de unde rezultă

$$\frac{1}{a_n}\left[\frac{\ln\ln \ldots \ln(n+1)}{\ln\ln \ldots \ln(m+1)}\right]^{-\mu} > \frac{1}{a_n}\,e^{-\mu\sum\limits_{m+1}^{n}\frac{1}{a_\nu}} > \frac{1}{a_n}\left[\frac{\ln\ln \ldots \ln n}{\ln\ln \ldots \ln m}\right]^{-\mu}$$

ceea ce se poate pune sub forma

$$[\ln\ln \ldots \ln(m+1)]^{\mu} > \frac{\frac{1}{a_n}\,e^{-\mu\sum\limits_{m+1}^{n}\frac{1}{a_\nu}}}{\frac{1}{n\cdot\ln n\cdot\ln\ln n \ldots (\ln\ln \ldots \ln n)^{1+\mu}}} > [\ln\ln \ldots \ln m]^{\mu}.$$

Utilizînd un raționament analog celui de mai sus, se poate enunța următoarea propoziție:

PROPOZIȚIA 3. *Cu ajutorul criteriului lui J. Bertand se poate demonstra convergența acelor și numai a acelor serii cu termeni pozitivi, ai căror termeni generali tind „nu mai puțin repede" către zero, decît termenul general al unei serii din clasa*

$$\sum_{m+1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln n\cdot\ln\ln n \ldots (\ln\ln \ldots \ln n)^{1+\mu}} \quad (\mu > 0,\ p \text{ întreg pozitiv}). \tag{38}$$

Rapiditatea de convergență a seriei $\sum\limits_{1}^{\infty} u_n$ *este „nu mai mică" decît a unei serii din clasa amintită.*

Clasa seriilor (38) *indică sensibilitatea criteriului lui Bertrand.*

§ 5. Asupra unei condiții necesare de convergență

10. În teoria clasică a seriilor cu termeni pozitivi se arată că seriile convergente pentru care avem $u_{n+1} \leq u_n$ $(n > N)$, se bucură de proprietatea

$$\lim_{n\to\infty} nu_n = 0, \tag{39}$$

ceea ce se exprimă mai cu seamă sub forma unei condiții necesare de convergență pentru seriile amintite [6, 2].

În cele ce urmează se arată că *există clase de serii convergente cu termeni pozitivi, astfel încît șirul termenilor nu este monoton și totuși are loc proprietatea* (39).

11. Se consideră seriile a_n-convergente supuse și condiției

$$\underline{\lim}\,\frac{a_n}{n} > 0. \tag{40}$$

Din (40) rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > 0$ deci și egalitatea

$$\ln\left(1+\frac{1+\omega_\nu}{a_\nu}\right) = \frac{1+\omega_\nu}{a_\nu} + \vartheta_\nu\left(\frac{1+\omega_\nu}{a_\nu}\right)^2 \quad (\nu > \nu_0), \tag{41}$$

unde $\lim\limits_{n\to\infty} \vartheta_\nu = -\frac{1}{2}$. Din (41) urmează

$$\prod_{\nu=m+1}^{n}\left(1+\frac{1+\omega_\nu}{a_\nu}\right) = e^{\sum\limits_{m+1}^{n}\frac{1+\omega_\nu}{a_\nu}}\, e^{\sum\limits_{m+1}^{n}\vartheta_\nu\left(\frac{1+\omega_\nu}{a_\nu}\right)^2}, \tag{42}$$

unde seria $\sum\limits_{\nu=m+1}^{\infty}\vartheta_\nu\left(\frac{1+\omega_\nu}{a_\nu}\right)^2$ este absolut convergentă, căci

$\left|\vartheta_\nu\frac{(1+\omega_\nu)^2}{a_\nu^2}\right| < \frac{(1+\omega_\nu)^2}{a_\nu^2}$ și (40) se scrie $\frac{a_n}{n} > k > 0$, sau $\frac{1}{a_n} < \frac{1}{k}\cdot\frac{1}{n}$, de unde rezultă $\frac{(1+\omega_\nu)^2}{a_\nu^2} < \frac{1}{k^2}\frac{(1+\omega_\nu)^2}{\nu^2} < \frac{4}{k^2}\cdot\frac{1}{\nu^2}$. Seria $\sum\limits_{m+1}^{\infty}\frac{1}{a_\nu}$ este divergentă (a se vedea § 1, nr. 1). Punînd $\mathcal{S}_n = \sum\limits_{m+1}^{n}\frac{1+\omega_\nu}{a_\nu}$, respectiv $\mathcal{S}'_n = \sum\limits_{m+1}^{n}\frac{1}{a_\nu}$, rezultă

$$\frac{\Delta\mathcal{S}_{n-1}}{\Delta\mathcal{S}'_{n-1}} = \frac{\frac{1+\omega_n}{a_n}}{\frac{1}{a_n}} \to 1 \quad (n\to\infty),$$

de unde, prin aplicarea teoremei lui Cezàro-Stolz ($\mathcal{S}'_n$ tinde crescător către infinit) rezultă : $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\mathcal{S}_n}{\mathcal{S}'_n} = 1$. Punînd $e^{\sum\limits_{m+1}^{n}\vartheta_\nu\left(\frac{1+\omega_\nu}{a_\nu}\right)^2} = \sigma_n$ cu $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n < +\infty$ și $\mathcal{S}_n = \eta_n\,\mathcal{S}'_n$ cu $\lim\limits_{n\to\infty}\eta_n = 1$, relația (42) devine

$$\prod_{m+1}^{n}\left(1+\frac{1+\omega_\nu}{a_\nu}\right) = \sigma_n\, e^{\eta_n\sum\limits_{m+1}^{n}\frac{1}{a_\nu}},$$

ceea ce introdus în (12) duce la

$$u_n = \frac{a_m u_m}{\sigma(1+\omega)}\frac{1}{a_n}\, e^{-\eta_n\sum\limits_{m+1}^{n}\frac{1}{a_\nu}}, \ (\lim_{n\to\infty}\omega = 0;\ \lim_{n\to\infty}\eta_n = 1). \tag{43}$$

În particular, are loc următoarea formulă asimptotică pentru restul seriei $\sum\limits_{1}^{\infty} u_n$:

$$R_n \cong \mathcal{R}_n = \frac{a_m u_m}{\sigma(1+\omega)}\, e^{-\eta_n\sum\limits_{m+1}^{n}\frac{1}{a_\nu}}, \quad \text{cu} \begin{cases}\lim\limits_{n\to 8}\omega = 0\\ \lim\limits_{n\to\infty}\eta_n = 1.\end{cases} \tag{44}$$

Pornind de la (43), se formează produsul nu_n :

$$n\,u_n = \frac{a_m u_m}{\sigma(1+\omega)}\cdot\frac{1}{\left(\frac{a_n}{n}\right)}\, e^{-\eta_n\sum\limits_{m+1}^{n}\frac{1}{a_\nu}}. \tag{45}$$

Cînd $n\to\infty$, prima fracţie din membrul al doilea al egalităţii (45) tinde către numărul pozitiv $\frac{a_m u_m}{\sigma}$, $\frac{a_n}{n}$ este mărginit inferior de un număr pozitiv, prin urmare $\frac{1}{\frac{a_n}{n}}$ este superior mărginit și seria cu termeni pozitivi $\sum\limits_{m+1}^{\infty}\frac{1}{a_\nu}$ diverge către infinit, deci : $\lim\limits_{n\to\infty} n\,u_n = 0$.

Cu ajutorul formulei (43) se pot construi în mod simplu clase de serii cu termeni pozitivi, a_n-convergente, pentru care (40) este valabilă și prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} nu_n = 0$, fără ca șirul termenilor unor astfel de serii să fie monoton.

Exemplu. Punînd $a_n = [p+(-1)^n q]\,n \quad (p > q > 0)$, rezultă

$$\frac{a_n}{n} = p + (-1)^n q = \begin{cases} p+q & (n \text{ par})\\ p-q & (n \text{ impar}).\end{cases}$$

Se introduce a_n în formula $u_n = \frac{1}{a_n}\, e^{-\sum\limits_{m+1}^{n}\frac{1}{a_\nu}}$ și se obţine

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{(p-q)n}\, e^{-\sum\limits_{m+1}^{n}\frac{1}{[p+(-1)^\nu q]\nu}} & (n \text{ impar})\\[2ex] \frac{1}{(p+q)n}\, e^{-\sum\limits_{m+1}^{n}\frac{1}{[p+(-1)^\nu q]\nu}} & (n \text{ par}).\end{cases}$$

Pentru a verifica nemonotonia șirului $\{u_n\}$, se formează rapoartele $\frac{u_{2k}}{u_{2k-1}}$ și $\frac{u_{2k+1}}{u_{2k}}$, după cum urmează

$$\frac{u_{2k}}{u_{2k-1}} = \frac{(p-q)(2k-1)}{(p+q)2k}\, e^{-\frac{1}{(p+q)2k}} \to \frac{p-q}{p+q} < 1 \qquad (k\to\infty),$$

$$\frac{u_{2k+1}}{u_{2k}} = \frac{(p+q)2k}{(p-q)(2k+1)}\, e^{-\frac{1}{(p-q)(2k+1)}} \to \frac{p+q}{p-q} > 1 \qquad (k\to\infty).$$

12. Se pot face anumite precizări privind clasa seriilor convergente cu termeni pozitivi şi ai căror termeni formează şiruri nemonotone. Menţionînd faptul aproape evident că relaţia $\lim\limits_{n\to\infty} nu_n = 0$ este valabilă pentru toate seriile $\sum\limits_{1}^{\infty} u_n$, cu termeni pozitivi pentru care termenul general tinde către zero nu mai puţin repede ca termenul general al unei serii armonice generalizate $\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\mu}}$ $(\mu > 0)$[9], se enunţă următoarea propoziţie:

PROPOZIŢIA 4. *Oricît de mică ar fi rapiditatea cu care termenul general,* $\frac{1}{n^{1+\mu}}$ $(\mu > 0)$, *al unei serii armonice generalizate convergente tinde către zero, tot mai există serii convergente cu termenul general* $(u_n > 0)$ *tinzînd nemonoton către zero şi mai puţin repede ca* $\frac{1}{n^{1+\mu}}$, *satisfăcînd totuşi relaţia* $\lim\limits_{n\to\infty} nu_n = 0$.

Demonstraţie. Seria $\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\mu}}$ este $\frac{n}{\mu}$-convergentă. Se construieşte o serie a_n-convergentă astfel încît $\underline{\lim}\frac{a_n}{\frac{n}{\mu}} > 1$. Atunci această serie va avea proprietăţile enunţate în propoziţia 4. Este suficient, în acest scop, să punem

$$a_n = \frac{1}{\mu}[p + (-1)^n q]n \qquad (p > q + 1 > 1),$$

de unde

$$\underline{\lim}\frac{a_n}{\frac{n}{\mu}} = \begin{cases} p + q > 1 & (n \text{ par}) \\ p - q > 1 & (n \text{ impar}), \end{cases}$$

şi teorema 9 ne conduce la propoziţia 4.

Universitatea ,,Babeş-Bolyai'' Cluj
Catedra de analiză

9) Dacă $\overline{\lim}\frac{u_n}{\frac{1}{n^{1+\mu}}} < +\infty$, atunci $\overline{\lim}\frac{nu_n}{\frac{1}{n^{\mu}}}$ este de asemenea $< +\infty$ şi deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\mu}} = 0$, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} nu_n = 0$. În cazul contrar am avea $\overline{\lim}\frac{nu_n}{\frac{1}{n^{\mu}}} = +\infty$.

К ИЗУЧЕНИЮ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ РЯДОВ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Исходя от адекватных формулировок критерия сходимости Кумера, находящихся в трудах [9—11], автор вводит определениями 1 и 2 понятия о „a_n-сходящемся ряде", соответственно, о „строго a_n-сходящемся ряде", при помощи которых дается подходящее выражение, как общему члену сходящегося ряда с членами положительными $\sum\limits_{1}^{\infty} u_n$, так и его остатку. При помощи этого аппарата и понятий о „функции-порядке", введенных определениями 3 и 4, покаjывается, что критерий Куммера является полезным орудием в исследовании скорости сходимости. Автор производит определённую классификацию рядов с положительными членами, по их скорости сходимости и строит единый метод определения области применения различных критерий сходимости, происходящих от критерия Куммера, выделяя множество рядов, сходимость которых можно установить при помощи различных частных критерий (например Даламбера, Раабе — Духамеля, Бертрана).

Пятый параграф труда содержит замечания, касающиеся классов сходящихся рядов с положительными членами, имеющих свойство $\lim\limits_{n\to\infty} nu_n = 0$.

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DE LA RAPIDITÉ DE CONVERGENCE DES SÉRIES À TERMES POSITIFS

RÉSUMÉ

En partant de quelques formes adéquates du critérium de convergence de Kummer, comprises dans [9—11], l'auteur introduit par les définitions 1 et 2 les notions de ,,série a_n-convergente'' et de ,,série strictement a_n-convergente'', à l'aide desquelles il donne une expression convenable tant au terme général de série convergente à termes positifs $\sum\limits_{1}^{\infty} u_n$, qu'à son reste. Moyennant cet appareil et les notions de ,,fonction-ordre'' introduites par les définitions 3 et 4, il montre que le critérium de Kummer est un instrument utile à l'étude de la rapidité de convergence. L'auteur donne une certaine classification des séries aux termes positifs selon leur rapidité de convergence et construit une méthode unitaire de détermination du domaine d'applicabilité des différents critérims de convergence qui dérivent de celui de Kummer, en délimitant les ensembles de séries dont

la convergence peut être mise en évidence moyennant divers critériums particuliers, tels que ceux de d'Alembert, Raabe-Duhamel, Bertrand.

Le § 5 du travail contient des observations relatives aux classes de séries convergentes aux termes positifs qui joissent de la propriété $\lim_{n\to\infty} nu_n = 0$.

BIBLIOGRAFIE

1. Borel É., *Leçons sur les séries à termes positifs*. Paris, Gauthier-Villars, 1902.
2. Knopp K., *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*. Berlin, J. Springer Verlag, 1931.
3. В. Немыцкий, М. Слудская, А. Черкасов, *Курс математического анализа*. Т. I, Глава VII, Гостехиздат, Москва, 1957.
4. Ney A., *O formulă asimptotică generală pentru evaluarea restului seriilor convergente cu termeni pozitivi*. Studii și cercet. de mat. (Cluj), **XII**, *2*, 315–332 (1961).
5. Nicolescu M., *Analiza matematică*, vol. I, Edit. Tehnică, București, 1957.
6. Pringsheim A., *Vorlesungen über Zahlen-und Functionenlehre*, I. 2, *Unendliche Reihen mit reellen Gliedern*. Teubner Verlag, Berlin, 1923.

Primit la 10. XI. 1961.