NOUA FORMĂ A PRINCIPIULUI DEPLASĂRILOR VIRTUALE *)

DE

VICTOR VÎLCOVICI

(București)

Lucrare prezentată la Colocviul de analiză numerică din 8-13 decembrie 1960, Cluj

Principiul deplasărilor virtuale, numit și principiul lucrului virtual, conține în sine o contradicție provenind dintr-o falsă definiție a condiției de compatibilitate pentru deplasările virtuale cu legăturile impuse sistemului. Dintre încercările anterioare de a înlătura contradicția nu cunoaștem decît una singură, aceea a lui Z. H o r á k [9], care reușește pe deplin — cel puțin în cazul sistemelor neolonome particulare de care se ocupă autorul. În lucrarea de față, după ce se lămurește contradicția pe un exemplu simplu, se face corecția cuvenită și apoi se extinde această corecție la sisteme generale neolonome, cu ajutorul unui nou operator, care de altfel fusese semnalat de Z. Horák. Cu ajutorul aceluiași operator se evită totodată o altă contradicție care apare în forma generală a principiilor variaționale ale mecanicii clasice.

§ 1

Mecanica teoretică își bazează cercetările în mare parte pe principiul cunoscut sub numele de *principiul deplasărilor virtuale* sau al *lucrului virtual.*

Principiul deplasărilor virtuale este fără îndoială un puternic instrument de lucru în Mecanică, în special în Mecanica analitică, instrument pe care l-a întrebuințat știința cu succes timp de peste două milenii. Folosit la început numai în Statică — de pe timpul lui Arhimede (287—212 î.e.n.) — principiul a cucerit mai tîrziu, cu Jean Bernoulli (1667—1748), și domeniul Dinamicii. Bernoulli formulează principiul aproape sub forma lui de azi, într-o scrisoare adresată lui Varignon în 1717 și publicată ulterior, în 1725, în fruntea mecanicii lui Varignon.

*) Această lucrare se publică și în limba engleză în revista „Mathematica" Vol. 3(26), 1961.

Cu toată imensa lui popularitate, principiul a întîmpinat şi oarecare rezistenţă. Însuşi marele G a u s s, în lucrarea [5] publicată în 1829, declară că nu există motive serioase pentru ca principiul „să fie socotit plauzibil", fără a preciza motivul îndoielilor sale.

Ulterior s-a repetat, cu diverse ocazii, acuzaţia adusă de Gauss acestui principiu. Vom cita în special lucrarea [3] a matematicianului italian L u i g i C a s t o l d i, publicată în 1947, în care se şi propune o nouă definiţie pentru deplasarea virtuală, folosindu-se cunoscutele variaţii ale lui Jourdain.

Însă reforma lui Castoldi nu rezolvă pe deplin problema; mai întîi, deoarece elementul înlocuitor apare oarecum complicat, iar în al doilea rînd, pentru că deşi aşa de complicată, noua creaţie nu este în stare să pună de acord principiul d'Alembert — Lagrange cu principiile variaţionale ale Mecanicii.

Matematicianul cehoslovac Z. H o r á k, în lucrarea [9], publicată în 1935, atrage atenţia asupra acestui fapt şi propune altă formă pentru deplasările virtuale compatibile cu legăturile, servindu-se în acest scop de un operator δ (de altfel identic cu operatorul $\triangle$ din prezenta lucrare). Horák stabileşte ecuaţiile de mişcare ale unui sistem de puncte urmînd în oarecare măsură metodele relativităţii speciale (restrînse) prin considerarea unui spaţiu-timp cu patru dimensiuni.

În cele ce urmează vom dezvolta noua formă a principiului, limitîndu-ne deocamdată la cazul simplu al unui singur punct material A supus unei singure legături olonome. Ulterior, vom extinde consideraţiile acestea la sisteme generale, neolonome. Se va vedea astfel că noua formă dată principiului are virtutea de a evita şi o altă contradicţie — în orice caz, o dificultate — care apare în principiile variaţionale ale Mecanicii, atunci cînd mişcarea este supusă unor legături reonome (olonome sau neolonome).

§ 2. Reacţiune şi deplasare virtuală

Într-o lucrare anterioară [20] [1] am formulat două axiome fundamentale pe care se bazează Mecanica analitică a lui Lagrange în cazul sistemului (A) de n puncte materiale A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ supus acţiunii sistemului (F) de n forţe F_i, precum şi sistemului $(\mathcal{L})$ de legături şi anume:

1°. *Axioma eliberării sau a existenţei* $(\exists)$. *Există un sistem* (R) *de forţe* R_i — *reacţiunile — care au proprietatea de a elibera sistemul* (A) *de obligaţiile impuse de sistemul* $[\mathcal{L}]$ *de legături.* Simbolic se poate reprezenta această axiomă sub forma

$$[(F) + (R)](A) \simeq [(F) + (\mathcal{L})](A),$$

ceea ce înseamnă că aplicînd simultan operatorii (F) şi (R) asupra sistemului (A), se obţine acelaşi rezultat ca şi cu operatorii (F) şi $(\mathcal{L})$ aplicaţi asupra aceluiaşi sistem (A).

2°. *Axioma lucrului virtual al reacţiunilor. Lucrul virtual corespunzător oricărei deplasări compatibile cu legăturile* $(\mathcal{L})$ *este nul.* Axioma aceasta are însuşirea de a stabili unicitatea (U).

[1] La p. 249.

Vom aplica axiomele 1° şi 2°, aşa cum am anunţat mai sus, la cazul simplu al unui singur punct material A supus la o singură legătură, aceasta avînd expresia analitică

$$f(x, y, z, t) = 0 \text{ sau mai scurt } f(\bar{r}, t) = 0, \tag{1}$$

unde $\bar{r}$ este vectorul de poziţie al punctului A de coordonate x, y, z la momentul t. Relaţia (1) reprezintă o obligaţie analitică pentru variabilele x, y, z, t. Dacă t nu figurează explicit în (1), adică dacă legătura este scleronomă, atunci condiţia reprezintă obligaţia ca mişcarea să se efectueze pe suprafaţa fixă avînd ecuaţia (1). În cazul cînd t figurează explicit în (1) suprafaţa trebuie concepută ca fiind mobilă sau chiar deformabilă, iar mobilul A nu se mişcă în general, pe nici una din suprafeţele S_t ale familiei (1), privind pe t ca un parametru.

Existenţa legăturii se manifestă din punct de vedere mecanic prin apariţia reacţiunii $\bar{R}$ (axioma eliberării) ca forţă. Ecuaţia de mişcare va fi

$$m\ddot{\bar{r}} = \bar{F} + \bar{R}, \tag{2}$$

$\bar{F}$ fiind forţa care acţionează asupra mobilului A de masă m.

Vom descompune pe $\bar{R}$ în două componente, ca de obicei, una tangenţială, $\bar{R}_t$, conţinută în planul tangent la suprafaţa S_t reprezentată prin ecuaţia (1) la momentul t, alta normală, $\bar{R}_n$. Componenta tangenţială se interpretează de obicei ca fiind datorită frecării pe care ar întîmpina-o mobilul A din partea suprafeţei (1). O vom presupune nulă (adică suprafaţa ar fi perfect netedă), $\bar{R}_t = 0$, deci $\bar{R} = \bar{R}_n$. Prin urmare vom avea

$$\bar{R} = \lambda\, \nabla f, \tag{3}$$

notînd cu λ un factor scalar necunoscut.

Deplasarea reală este reprezentată prin vectorul $d\bar{r}(dx, dy, dz)$, variaţia vectorului de poziţie $\bar{r}$ a mobilului în intervalul de timp dt, aşa fel ca să subsiste egalitatea

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v},$$

$\bar{v}$ fiind viteza mobilului.

Deplasarea virtuală $\delta\bar{r}(\delta x, \delta y, \delta z)$ corespunde unei variaţii arbitrare a lui $\bar{r}$; ea depinde de trei parametri scalari arbitrari δx, δy, δz, independenţi între ei.

Cazul legăturii scleronome. Să presupunem pentru un moment că timpul t nu apare explicit în condiţia (1), adică legătura este scleronomă; atunci relaţia (1) va trebui înlocuită prin

$$f(x, y, z) = 0. \tag{1'}$$

Întreruperea geometrică a legăturii este, după cum am observat mai sus: mobilul A va trebui să-şi efectueze mişcarea pe suprafaţa fixă avînd ecuaţia (1').

Ecuaţia de mişcare (2) se poate simplifica prin multiplicare scalară cu $\delta\bar{r}$, notînd cu $\delta\bar{r}$ o deplasare virtuală compatibilă cu legătura (1').

Este evident că pentru ca deplasarea $\delta\bar{r}$ să fie compatibilă cu legătura (1'), va trebui ca vectorul $\delta\bar{r}$ să fie situat pe suprafaţă, adică pe planul tangent la aceasta, în punctul considerat. Va trebui deci să avem

$$\nabla f\,\delta\bar{r} = 0. \tag{4}$$

Să observăm în treacăt că lucrul virtual $\bar{R}\,\delta\bar{r}$ al reacţiei R, corespunzător deplasării $\delta\bar{r}$ compatibile cu legătura (1'), este nul, adică axioma 2^0 este îndeplinită — după cum se vede confruntînd relaţia (4) cu expresia (3) a reacţiunii.

Prin eliminarea reacţiunii $\bar{R}$ din ecuaţia (2), adică prin multiplicarea ei scalar cu $\delta\bar{r}$, ecuaţia (2) devine

$$\bar{\Phi}\,\delta\bar{r} = 0, \tag{5}$$

$\bar{\Phi}$ fiind vectorul lui d'Alembert,

$$\bar{\Phi} = -m\ddot{\bar{r}} + \bar{F}.$$

Cazul legăturii reonome. Să trecem acum la cazul general al condiţiei de legătură reonomă (1), cînd variabila t apare explicit. În acest caz, artificiul de calcul folosit mai sus pentru eliminarea lui $\bar{R}$ din ecuaţia de mişcare (2) conduce la acelaşi rezultat (5), dacă se continuă a se numi „compatibilă cu legătura (1)" deplasarea $\delta\bar{r}$ situată pe suprafaţa fixă S_t din momentul t — aşa cum se procedează în Mecanica clasică, în prezent. Vom avea, în adevăr,

$$\bar{R}\,\delta_0\bar{r} = \lambda\,\nabla f\,\delta_0\bar{r} = 0, \tag{6}$$

ceea ce reiese din (1) prin diferenţiere, în cazul cînd timpul t este menţinut constant; am notat cu $\delta_0\bar{r}$ variaţia virtuală $\delta_0\bar{r}$ în cazul particular t = const., adică $\delta t = 0$.

§ 3. Contradicţia

Deplasarea reală $d\bar{r}$ a punctului supus legăturii (1) trebuie să fie una din deplasările virtuale $\delta\bar{r}$, dar nu neapărat una dintre deplasările $\delta_0\bar{r}$ (aşa-numite compatibile cu legătura).

În adevăr, toate deplasările virtuale $\delta_0\bar{r}$ „compatibile cu legătura (1)" s-au obţinut prin fixarea timpului t la o valoare constantă; este evident însă că deplasarea reală $d\bar{r}$ nu poate fi considerată ca fiind una din aceste deplasări virtuale $\delta_0\bar{r}$, deoarece deplasarea reală $d\bar{r}$ nu admite menţinerea timpului constant, aşa cum s-a procedat la definirea deplasării virtuale $\delta_0\bar{r}$ compatibile cu legătura, ci ea e legată de variaţia dt a timpului.

Aici apare o contradicţie. Deplasarea reală $d\bar{r}$ nu figurează în genere printre deplasările virtuale „compatibile cu legătura". Dar nici nu se poate

admite ideea că mişcarea reală n-ar fi compatibilă cu legătura, deoarece punctul mobil este *obligat* în mişcarea sa să satisfacă condiţia (1).

De unde provine această evidentă contradicţie?

§ 4. Variaţia virtuală compatibilă cu legătura

Examinînd mai de aproape împrejurările în care a apărut contradicţia, se observă că numirea „compatibilă cu legătura" care s-a dat deplasării virtuale $\delta_0\bar{r}$ satisfăcînd condiţia (4), este greşită; ea este, în orice caz, neîndreptăţită, deoarece „legătura" este reprezentată prin condiţia (1)-nu prin condiţia (4). O deplasare compatibilă cu legătura ar trebui să ţină seama şi de variaţia posibilă a timpului t (să o notăm cu δt), aşa încît variaţiile δx, δy, δz, δt ale coordonatelor x, y, z, şi ale timpului t ar trebui să fie supuse unei condiţii de compatibilitate în conformitate cu legătura (1). Ar trebui deci să admitem relaţia $f(x, y, z, t) = 0$, sau pe scurt $f(\bar{r}, t) = 0$, pentru poziţia P la momentul t şi apoi $f(\bar{r}', t') = 0$ pentru poziţia P' vecină, la timpul vecin t'; am notat: $\bar{r}' = \bar{r} + \delta\bar{r}$, $t' = t + \delta t$.

Se deduce imediat printr-o operaţie de diferenţiere

$$\nabla f\,\delta\bar{r} + f_t\,\delta t = 0. \tag{7}$$

Aceasta este condiţia care trebuie să înlocuiască relaţia (4), pentru a avea o deplasare compatibilă cu legătura (1). După cum se vede, *deplasarea spaţială* trebuie însoţită de *variaţia temporală* δt.

Vom numi ansamblul $(\delta\bar{r}, \delta t)$ „*o variaţie virtuală*" a cronotopului. Această variaţie va fi compatibilă cu legătura (1) numai în cazul cînd mărimile $\delta\bar{r}$, δt vor satisface condiţia (7).

Un caz particular al variaţiei virtuale compatibile cu legătura trebuie să fie dată de *deplasarea reală $d\bar{r}$ care are loc în timpul real dt*. Aşadar, va trebui să avem relaţia (7) îndeplinită de variaţia $(d\bar{r}, dt)$,

$$\nabla f\,d\bar{r} + f_t\,dt = 0, \tag{8}$$

de unde se deduce, prin diviziune cu dt,

$$\nabla f\,\dot{\bar{r}} + f_t = 0. \tag{8'}$$

Lucrul mecanic elementar al reacţiunii $\bar{R}$ pentru deplasarea $d\bar{r}$ este diferit de zero,

$$\bar{R}\,d\bar{r} = \lambda\nabla f\,d\bar{r}$$

sau, ţinînd seama de (8),

$$\bar{R}\,d\bar{r} = -\lambda f_t\,dt. \tag{9}$$

De altfel, pentru orice variaţie virtuală $(\delta\bar{r}, \delta t)$ compatibilă cu legătura, lucrul mecanic corespunzător este diferit de zero,

$$\bar{R}\,\delta\bar{r} = -\lambda f_t\,\delta t. \tag{10}$$

Înlocuind pe f_t prin expresia sa $-\nabla f\,\dot{\bar{r}}$ scoasă din (8′), obținem

$$\bar{R}\,\delta\bar{r} = \lambda\nabla f\,\dot{\bar{r}}\,\delta t$$

de unde rezultă, dacă se ține seama de (3)

$$\lambda\nabla f\,\delta\bar{r} = \lambda\,\nabla f\,\dot{\bar{r}}\,\delta t,$$

adică

$$\nabla f(\delta\bar{r} - \dot{\bar{r}}\,\delta t) = 0. \tag{11}$$

Vom pune această relație sub forma

$$\nabla f \,\triangle\, \bar{r} = 0, \tag{11′}$$

notînd pe scurt

$$\triangle\,\bar{r} = \delta\bar{r} - \dot{\bar{r}}\,\delta t. \tag{12}$$

Deducem, cu (3),

$$\bar{R}\triangle\bar{r} = 0, \tag{12′}$$

adică *lucrul mecanic virtual al reacțiunii $\bar{R}$ pentru o deplasare $\Delta\bar{r}$ este nul.*

Dar ce este deplasarea $\Delta\bar{r}$? Este deplasarea virtuală $\delta\bar{r}$ (arbitrară) la care se adaugă deplasarea $-\dot{\bar{r}}\,\delta t$ efectuată cu viteza $-\dot{\bar{r}}$ în intervalul de timp δt (figura 1).

Deplasarea $\Delta\bar{r}$ este situată tot în planul tangent în P la suprafața S_t, după cum se vede din relația (12), care este identică cu

$$\lambda\,\nabla f\,\triangle\,\bar{r} = 0,$$

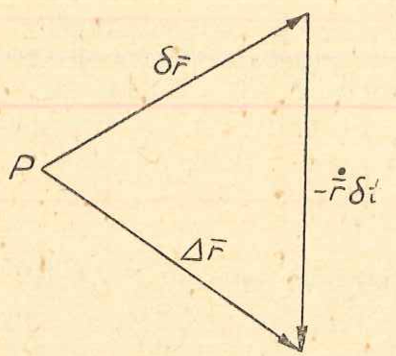

Fig. 1

adică cele două deplasări $\delta_0\bar{r}$ și $\Delta\bar{r}$, au același domeniu de existență. Ele pot fi chiar identificate una cu alta. Însă în structura lui $\delta\bar{r}$ intră trei parametri scalari, δx, δy, δz, neavînd nimic comun cu deplasarea reală $d\bar{r}$, pe cînd $\Delta\bar{r}$ constă dintr-o deplasare *arbitrară* $\delta\bar{r}$ însoțită de deplasarea $-\dot{\bar{r}}\,\delta t$; în structura lui $\Delta\bar{r}$ intră deci patru parametri scalari, δx, δy, δz, δt, între care există o relație liniară, așa fel ca ei să poată da o imagine a deplasării reale, ceea ce nu putea face deplasarea $\delta_0\bar{r}$.

Din cele ce preced rezultă că este mult mai logic de a considera mărimea $\Delta\bar{r}$ drept deplasare virtuală compatibilă cu legătura, deoarece, după cum se vede din (12), mărimea $\Delta\bar{r}$ ține seama și de o eventuală variație δt a timpului.

De altfel, *lucrul virtual $\bar{R}\,\Delta\bar{r}$ al reacțiunii $\bar{R}$ corespunzător acestei deplasări $\Delta\bar{r}$ este nul*, cum se vede din (12′), fără a impune deplasării virtuale

$\delta\bar{r}$ vreo altă condiție în afară de relația (7) care reprezintă însăși condiția (1) de legătură.

Deci axioma 2° este satisfăcută fără nici o altă condiție în plus, așa cum se întîmplă în cazul variației $\delta_0\bar{r}$.

La variația $\Delta\bar{r}$ compatibilă (efectiv) cu legătura, se ajunge deci cu operatorul Δ,

$$\Delta = \delta - \delta t\,\frac{d}{dt}, \tag{13}$$

aplicat vectorului $\bar{r}$, așa încît, pentru a găsi deplasarea virtuală compatibilă cu legătura, trebuie să ne folosim de operatorul Δ, nu de operatorul δ_0[2]).

§ 5. Soluția problemei de mișcare

Pentru a determina mișcarea punctului A supus legăturii (1), ne vom folosi de ecuația fundamentală, cum am mai făcut,

$$\bar{\Phi} + \bar{R} = 0, \tag{14}$$

căreia i se alătură relația de legătură (1).

Reacțiunea $\bar{R}$ fiind necunoscută, este natural să se caute a se elimina această forță din ecuația (14). Eliminarea ei se poate realiza folosind una din ecuațiile (5) sau (12′).

Să începem cu ecuația (5). De altfel ideea cea mai simplă — aceea care a fost folosită de cercetătorul primordial — a fost folosirea ecuației (5), așadar a deplasării elementare $\delta_0\bar{r}$. Multiplicînd ecuația (14) scalar cu $\delta_0\bar{r}$, se obține

$$\bar{\Phi}\,\delta\bar{r} = 0. \tag{15}$$

Ținînd seama de relația (1) de condiție, se va putea elimina vectorul $\delta_0\bar{r}$. Eliminarea lui $\delta_0\bar{r}$ se realizează imediat dacă se pune condiția (1) sub forma (4),

$$\Delta f\,\delta_0\bar{r} = 0, \tag{16}$$

valabilă pentru deplasarea $\delta_0\bar{r}$ pe suprafața (fixă) S_t. Dar acest procedeu presupune că relația de condiție (1) poate fi înlocuită prin relația (16), ceea ce am văzut că nu este just.

Combinarea relației (15) cu relația nepotrivită (16) pare a fi fost admisă numai din cauza proprietății acesteia de a oferi o eliminare comodă a lui $\delta_0\bar{r}$ între (15) și (16).

Relația de condiție (1) pusă sub formă diferențială este dată, după cum am văzut, de (11), adică de (11′),

$$\nabla f\,\Delta\bar{r} = 0. \tag{17}$$

---

[2]) Operatorul Δ este identic cu operatorul $\bar{\delta}$ introdus anterior (1935) de Z. Horák în lucrarea sa [9]. Operatorul Δ a apărut în mod natural și independent de [9] în lucrarea [20]. Socotim totuși nimerit ca acest operator să poarte numele matematicianului Horák — operatorul lui Horák — ca o recunoaștere a dreptului său de prioritate.

Aşadar, eliminarea lui $\bar{R}$ din ecuaţia (14) va trebui realizată cu relaţia (12) multiplicînd ecuaţia (14) scalar cu vectorul $\Delta\bar{r}$. Vom obţine astfel

$$\Phi \Delta \bar{r} = 0. \tag{18}$$

Între (17) şi (18) se poate face eliminarea parametrului $\Delta\bar{r}$ conducînd la soluţia problemei. Această eliminare se poate face tot aşa de lesne cum s-a făcut înainte eliminarea lui $\delta_0\bar{r}$ între (15) şi (16): este exact aceeaşi operaţie algebrică în ambele cazuri, aşa că soluţia problemei nu suferă nici o alterare. De altfel, însuşi $\Delta\bar{r}$ poate fi identificat cu $\delta_0\bar{r}$, după cum am observat mai sus. Este probabil că, datorită acestei împrejurări care identifică cele două metode de lucru, conducînd la aceeaşi soluţie, se poate explica lunga durată a erorii de a se fi folosit, în principiul deplasărilor virtuale, relaţia (16) în locul relaţiei (17).

În concluzie, principiul deplasărilor virtuale obţine o formă corectă prin înlocuirea operatorului δ_0 cu operatorul Δ.

§ 6. Extinderea principiului la o clasă generală de legături

Am arătat într-o lucrare anterioară [16] că forma firească a unei condiţii de legătură (olonomă sau neolonomă) nu poate fi o relaţie întreagă între parametrii definind poziţiile punctelor unui sistem şi eventual elementele lor cinematice (viteze, acceleraţii) — aşa cum se concepe formal în Mecanica clasică, problema mişcării unui sistem de puncte materiale; am arătat anume că este mult mai natural să se impună condiţia de legătură între deplasările elementare ale punctelor sistemului în intervalul corespunzător de timp dt, şi intervalul dt de asemenea.

Mai precis, fie (A) un sistem de n puncte materiale A_i $(i = 1, \ldots, n)$ şi fie x^i vectorul de poziţie al punctului A_i, $\dot{x}^i$, $\ddot{x}^i$ viteza, respectiv acceleraţia sa. Am arătat [3)] că cele m legături $(m < 3n)$ ale sistemului îşi găsesc o reprezentare mai firească în relaţiile scalare

$$\alpha_i^j\, dx^i + \beta^j\, dt = 0, \quad (i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m). ^{3)} \tag{19}$$

În această relaţie am presupus că indicele repetat i înseamnă, ca de obicei, o sumă; mărimile α_i^j în număr de mn înseamnă vectori în spaţiul euclidian E_3 iar mărimile β^j, în număr de m, sînt scalare; toate aceste mărimi $(\alpha_i^j \beta^j)$ sînt funcţii derivabile de x, $\dot{x}$, $\ddot{x}$, t într-un anumit domeniu al unei multiplicităţi corespunzătoare cu zece dimensiuni; vom presupune că relaţiile (19) sînt *distincte* în sensul stabilit în lucrarea [16], aşa încît ele

[3)] Forma (19) nu este expresia Pfaff sub care se pun de obicei legăturile neolonome în mecanica clasică, deoarece mărimile α_i^j şi β^j sînt funcţiuni de x, $\dot{x}$, $\ddot{x}$, t, nu numai de x şi de t cum se socoteşte în mecanica clasică. Insuşi Z. H o r á k în interesanta sa lucrare [9] se limitează la forme Pfaff reprezentabile prin varietăţi neolonome în sensul lui G. V r ă n c e a n u [21], deci la cazuri particulare faţă de formula generală (19).

vor forma un sistem de m relaţii distincte între variabilele x, $\dot{x}$, $\ddot{x}$, t dacă le punem sub forma

$$\beta^j = -\alpha_i^j\, \dot{x}^i \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m). \tag{19'}$$

Vom spune că „variaţia” sistemului (A) reprezentată prin mărimile vectoriale δx^i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ la care se asociază şi mărimea scalară δt, este compatibilă cu legătura (19) pentru o anumită valoare a indicelui j, dacă aceste mărimi satisfac relaţia

$$\alpha_i^j\, \delta x^i + \beta^j\, \delta t = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{20}$$

pentru acea valoare j a indicelui.

Este evident că deplasarea reală dx^i împreună cu variaţia temporală corespunzătoare dt constituie o „variaţie” particulară a sistemului (A) compatibilă cu legăturile.

Înlocuind pe β^j prin expresia sa (19'), relaţia (20) va lua forma

$$\alpha_i^j (\delta x^i - \dot{x}^i \delta t) = 0,$$

sau deci

$$\alpha_i^j\, \Delta x^i = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m), \tag{21}$$

dacă folosim operatorul Δ definit prin (13). Aşadar variaţia $(\delta x^i, \delta t)$ care verifică relaţia (21) este compatibilă cu legătura „j”.

Reacţiunea R_i care corespunde punctului A^i va avea expresia

$$R^i = \lambda^i\, \alpha_i^j \qquad (j = 1, 2, \ldots, m), \tag{22}$$

λ^j fiind mărimi scalare, necunoscute deocamdată. Relaţia (21) ne îndreptăţeşte a scrie

$$R_i\, \Delta x^i = 0, \tag{23}$$

ceea ce reprezintă expresia axiomei 2°, axioma lucrului virtual.

Ecuaţia de mişcare a punctului A_i va fi

$$\Phi_i + R_i = 0, \tag{24}$$

unde am notat, ca mai sus, cu Φ_i vectorul lui d'Alembert, corespunzător punctului A_i. Multiplicînd relaţia (24) scalar cu Δx^i şi ţinînd seama de (23), vom obţine

$$\Phi_i\, \Delta x^i = 0. \tag{25}$$

Eliminarea parametrului Δx^i între relaţiile (21) şi (25) conduce la un sistem de ecuaţii diferenţiale a cărui soluţie rezolvă problema.

În adevăr, această eliminare conduce la un număr de $3n - m$ ecuaţii scalare între cele n mărimi vectoriale x^i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Ţinînd seama şi de cele m relaţii scalare de legătură (19'), vom avea un sistem de $3n$ ecuaţii scalare pentru $3n$ necunoscute scalare. Cu alte cuvinte, procesul de eliminare este identic cu acela clasic, în care „compatibilitatea” este definită luîndu-se $\delta t = 0$.

Eliminarea se face mai comod, după cum se știe, cu ajutorul multiplicatorilor lui Lagrange. Se obțin astfel ecuațiile lui Lagrange de speța I.

$$\Phi_i + \lambda^i \alpha_i^j = 0, \qquad (i = 1, \ldots, n\,;\; j = 1, \ldots, m), \tag{26}$$

unde mărimile scalare λ_i (multiplicatorii lui Lagrange) sînt necunoscute.

Ecuațiile (26) rezolvă problema mișcării sistemelor neolonome, în special a acelora care au o origine fizică. Teorema de existență demonstrată de S. Łojasiewicz (Kraków) [12] subsistă și în acest caz. Demonstrația este tot aceea dată de S. Łojasiewicz, cu unele modificări: în locul hipersuprafeței cu $3n-m$ dimensiuni va apare o varietate neolonomă într-un spațiu *fibrat* [4]).

Cazul coordonatelor Lagrange. În cazul cînd vectorii de poziție x^i se exprimă în funcție de s parametri scalari $q^1, q^2, \ldots, q^s$ și de timpul t,

$$x^i = x^i(q^1, q^2, \ldots, q^s, t) \qquad (s \leqslant 3n) \tag{27}$$

se poate efectua schimbarea de variabile (26), de unde se scot expresiile mărimilor $\dot{x}^i$, $\ddot{x}^i$.

Prin diferențieri și derivări se deduc formulele

$$\delta x^i = x^i_{,k}\,\delta q^k + x^i_{,t}\,\delta t,$$

$$\dot{x}^i = x^i_{,k}\,\dot{q}^k + x^i_{,t},$$

folosind notațiile

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^k} = x^i_{,k}, \qquad \frac{\partial x^i}{\partial t} = x^i_{,t}.$$

Legăturile (19) ale sistemului considerat vor lua forma

$$\gamma^j_k\, dq^k + \sigma^j dt = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, s\,;\; j = 1, 2, \ldots, m\,;\; m < 3n - s), \tag{28}$$

unde am notat

$$\gamma^j_k = \alpha^j_i\, x^i_{,t}, \quad \sigma^j = \alpha^j_i x^i_{,t} + \beta_j \tag{29}$$

Mărimile γ^j_k sînt scalare avînd proprietăți de regularitate într-un domeniu corespunzător.

Divizînd relația (28) prin dt, ca mai sus, obținem relațiile

$$\sigma^j = -\gamma^j_k\, \dot{q}^k. \tag{28'}$$

O variație $(\delta q^k, \delta t)$ va fi compatibilă cu legătura j dacă relația

$$\gamma^j_k\, \delta q^k + \sigma^j\, \delta t = 0 \tag{30}$$

4) Un spațiu a cărui structură locală este aceea a unui produs cartezian între spațiul obișnuit (timpul apărînd ca una din coordonate), spațiul vitezelor și spațiul accelerațiilor.

este satisfăcută, sau, ținînd seama de (28'), ca mai sus

$$\gamma^j_k \Delta\, q^k = 0, \tag{31}$$

unde Δ înseamnă operatorul definit prin (13).

Expresia diferențială Δx^i,

$$\Delta x^i = \delta x^i - \dot{x}^i \delta t$$

a deveni în noile coordonate q

$$\Delta x^i = x^j_{,k}\, \Delta q^k. \tag{32}$$

Formula (32) ne spune că la o schimbare de variabilă (27), Δx^i se tratează ca o diferențială. În consecință, relațiile (25) și (21) se vor scrie respectiv

$$\Phi_k\, \Delta q^k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n\,;\; k = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\gamma^j_k\, \Delta q^k = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n\,;\; k = 1, 2, \ldots, n),$$

iar soluția problemei se va obține prin eliminarea parametrilor Δq^k $(k = 1, 2, \ldots, s)$ între ele.

§ 7. Avantajele introducerii operatorului privind principiile variaționale ale mecanicii

Într-o lucrare anterioară [20][5]) am calculat expresia variației δI a unei integrale generale I de forma

$$I(\Gamma) = \int_\Gamma f(x, \dot{x}, t)\, dt, \tag{33}$$

Γ fiind o curbă de integrare iar f o funcție larg regulată de variabilele indicate.

Trecînd de la curba Γ la o curbă vecină Γ', am obținut pentru diferența

$$\delta I = I(\Gamma') - I(\Gamma)$$

următoarea expresie

$$\delta I = \int_\Gamma \theta f \Delta x\; dt, \tag{34}$$

unde am notat cu θ operatorul lui Euler,

$$\theta = \Delta_x - \frac{d}{dt}\Delta_{\dot{x}}. \tag{35}$$

5) La p. 253.

În spațiul corespunzător (q) al variabilelor lui Lagrange, formula (34) devine

$$\delta I = \int_\Gamma \theta f \Delta q \, dt, \tag{36}$$

cu notația

$$\theta = \frac{\partial}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \,. \tag{37}$$

Se întîmplă un fenomen matematic fericit pentru calcul — că elementul diferențial în integrala δI este dat de operatorul Δ, nu de operatorul δ.

Condiția ca funcționala I să fie staționară va fi deci

$$\int \theta f \Delta x \, dt = 0 \tag{38}$$

în cazul spațiului obișnuit, și

$$\int \theta f \Delta q \, dt = 0 \tag{39}$$

în cazul spațiului (q) al lui Lagrange.

Dacă sistemul nu este supus nici unei legături, atunci parametrii Δx, respectiv Δq sînt arbitrari, așa încît relațiile (38) și (39) ne conduc la cunoscuta ecuație a lui Euler

$$\theta f = 0,$$

θ fiind operatorul (35) sau (37), după cum poziția sistemului de puncte considerat este reprezentată prin vectorii x^i, în spațiul obișnuit, sau prin coordonatele lui Lagrange, q^i.

Dacă însă sistemul este supus la un număr m de legături $(m < 3n - s)$ de forma (19), în cazul spațiului fizic, sau de forma (28) în cazul spațiului Lagrange, atunci relațiile (38) respectiv (39) vor trebui să aibă loc numai pentru deplasări compatibile cu legăturile.

În mecanica clasică, compatibilitatea deplasărilor virtuale cu legăturile se exprimă cu ajutorul operatorului δ_0, spre pildă, relația (4). Eliminarea acestor deplasări virtuale nu se poate face deoarece elementul diferențial în expresia lui δI nu este dat de operatorul δ_0, ci de operatorul Δ.

În mecanica clasică s-a trecut în general peste această piedică, presupunîndu-se că variația δI nu se referă decît la mișcări vecine sincrone, iar legăturile sînt toate scleronome. Însă chiar din 1955 matematicianul italian E. S t o r c h i a arătat că principiul Hamilton-Ostrogradski rămîne valabil și pentru cazul cînd sînt admise la concurență și mișcări nesincrone [14].

Așadar, forma clasică a principiului variațional Hamilton-Ostrogradski este o formă restrînsă.

Folosind dezvoltările din prezenta lucrare, se poate extinde domeniul de valabilitate al acestui principiu la cazul variațiilor nesincrone precum și la cazul legăturilor generale reonome. Limitîndu-ne deocamdată la spațiul fizic, va trebui să eliminăm pe Δx din relațiile (38), unde însă parametrii Δx satisfac condițiile de compatibilitate (21).

Soluția se determină, ca de obicei, cu ajutorul multiplicatorilor lui Lagrange : se înlocuiește în expresia lui δI funcția f prin forma

$$f + \lambda_j \alpha_i^j \qquad (j = 1, 2, \ldots, m),$$

căreia i se aplică apoi operatorul eulerian θ, egalîndu-se rezultatul la zero.

În mod analog se va proceda și cu spațiul Lagrange (q).

Concluzii

Definiția defectuoasă din Mecanica clasică a deplasărilor virtuale compatibile cu legăturile, conduce la o contradicție care face din principiul lucrului virtual (sau al deplasărilor virtuale) o metodă de lucru lipsită de fundament real. Z. Horák a înlăturat această contradicție, servindu-se de un operator nou $\bar{\delta}$ pentru definirea condițiilor de compatibilitate.

Independent de Horák, am definit acest operator, pe care l-am desemnat prin Δ și mulțumită căruia contradicția dispare din corpul principiului. Cu ajutorul lui am putut stabili principiul lucrului virtual într-o formă mult mai întinsă, valabilă fiind pentru legături neolonome de o structură generală.

Interesant este faptul că operatorul Δ apare și în stabilirea condiției ca o funcțională să fie staționară, cu alte cuvinte, în structura principiilor variaționale ale Mecanicii clasice. Cu această observare, problemele variaționale ale mecanicii, care pentru cazul legăturilor reonome erau irezolubile prin metoda obișnuită a multiplicatorilor lui Lagrange, devin tratabile, fără nici o distincție de cazul scleronom.

НОВАЯ ФОРМА ПРИНЦИПА ВИРТУАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Принцип виртуальных перемещений названный и принципом виртуальной работы, содержит в себе противоречие, происходящее от неправильного определения условия совместности виртуальных перемещений со связями, предписанными системе. Из предыдущих попыток устранять это противоречие цитируем попытку З. Х о р а к а [9], которая вполне удачна, по крайней мере в случае частных неголономных систем, которыми он занимается.

В настоящем труде, после того как разъясняется противоречие на простом примере, производится надлежащая поправка и потом распро-

страняется эта поправка к общим неголономным системам при помощи нового оператора, отмеченного и З. Хораком. При помощи того же оператора избегается одновременно и другого противоречия, возникающего в общей форме вариационных принципов классической механики.

LA NOUVELLE FORME DU PRINCIPE DES DÉPLACEMENTS VIRTUELS

RÉSUMÉ

Le principe des déplacements virtuels, appelé aussi principe du travail virtuel, contient en soi une contradiction provenant d'une fausse définition de la condition de compatibilité pour les déplacements virtuels avec les liaisons imposées au système. Parmi ceux qui ont essayé d'écarter cette contradiction, nous citons Z. Horák [9], dont la tentative réussit pleinement, du moins dans le cas des systèmes non holonomes particuliers dont il s'occupe.

Dans ce travail, après avoir éclairé la contradiction par un exemple simple, on fait la correction requise et puis on étend cette correction à des systèmes généraux non holonomes, à l'aide d'une opérateur nouveau qui avait d'ailleurs été signalé par Z. Horák. Moyennant le même opérateur, on évite aussi une autre contradiction qui apparaît dans la forme générale des principes variationnels de la mécanique classique.

BIBLIOGRAFIE

1. Appell P., *Rendiconti Palermo*, **33**, 259–267 (1912) sau *Mémorial des Sci. Math.*, **1** (1925).
2. Castoldi L., *Rend. Ist. Lombardo*, **79**, 1–18 (1954–46).
3. — *Rend. Lincei*, 3, 329–333 (1947).
4. Delassus E., *Ann. Ec. N. Sup.*, 1925.
5. Gauss C. F., *Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik.* Crelle J., **IV** (1829), sau Werke, V, 1877, p. 25.
6. Hamel G., *Math. Ann.*, **92**, 33–41 (1924).
7. — *Math. Ann.*, **111**, 94–97 (1935).
8. — *Teoretische Mechanik.* Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer Verlag, 1949.
9. Horák Z., *Prace matematiczne fiziczne*, **XLII** (1935).
10. Kerner M., *Prace*, **38**, 1–21 (1931).
11. Lagrange J. L., *Mécanique analytique* (3e ed. revue par J. Bertrand), Paris, 1853.
12. Lojasiewicz S., *Annales Polonici Mathematici*, **V**, 247–256 (1958–59).
13. Nordheim L., *Handbuch der Physik* (H. Geiger u. K. Scheel), Springer Verlag, Berlin, 1927, p. 43–90.
14. Storchi E., *Rend. Lincei*, **18**, 162–167 (1955).
15. Vâlcovici V., *Rend. Lincei*, **19**, 441–448 (1955).
16. — *C. R. Acad. Sci. Paris*, **243**, 1012–1014, 1096–1098 (1956).
17. — *Ber. sächs. Akad. Wiss.*, Leipzig, **102**, 1–39 (1958).
18. — *Rev. de Méc. appl.*, **3**, 365–371 (1958).
19. — *Rev. de Math. pures et appl.*, **3**, 191–206 (1958).
20. — *Arch. for Rational Mech. and Analysis*, **3**, 249–262 (1960).
21. Vrănceanu G., *Geometria analitică şi proiectivă*. Ed. Tehnică, Bucureşti, 1954, p. 488.

Primit la 8. XII. 1960