CÎTEVA FORMULE PRACTICE DE CUBATURĂ

DE

D. V. IONESCU

(Cluj)

Într-o lucrare recentă [1] am stabilit formula de cubatură

$$\begin{gathered}\iint_D f(x, y)dxdy = \\ -4hkf(x_0, y_0) + 2h\int_{y_0-k}^{y_0+k} f(x_0, y)dy + 2k\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x, y_0)dx + R,\end{gathered} \tag{1}$$

unde D este un dreptunghi cu laturile paralele cu axele Ox, Oy de lungimi $2h$, $2k$ şi cu centrul în punctul de coordonate (x_0, y_0). S-a demonstrat că restul R se poate pune sub forma

$$R = \iint_D \Phi(x, y)\,\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}\,dxdy, \tag{2}$$

unde funcţia $\Phi(x, y)$ a fost definită şi studiată în lucrarea amintită. S-a arătat că ea este pozitivă în interiorul dreptunghiului D, se anulează pe laturile lui şi avem

$$\iint_D \Phi(x, y)dxdy = \frac{h^3k^3}{9},$$

de unde rezultă pentru R, evaluarea

$$|R| \leqslant \frac{h^3k^3}{9} M_{22}, \tag{3}$$

unde

$$M_{22} = \sup_{(D)} \left|\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}\right|.$$

În această lucrare vom face aplicaţii ale formulei de cubatură (1), care ne vor conduce la cîteva formule practice de cubatură. În prealabil vom da cîteva formule de cuadratură, de care ne vom servi, fără să mai dăm demonstraţiile necesare. Stabilirea acestor formule s-a făcut urmînd metoda de lucru arătată în lucrarea [2].

§ 1. Formule de cuadratură

1. Să considerăm o funcţie $f(x)$ de clasa C^4 pe intervalul $[x_0 - h, x_0 + h]$. Se arată că avem formula de cuadratură a lui Milne

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)dx = \frac{2h}{3}[2f(x_1) - f(x_2) + 2f(x_3)] + R, \tag{4}$$

unde nodurile x_1, x_2, x_3 sînt date de formulele

$$x_1 = x_0 - \frac{h}{2}, \quad x_2 = x_0, \quad x_3 = x_0 + \frac{h}{2}, \tag{5}$$

iar restul R este dat de formula

$$R = \int_{x_0-h}^{x_0+h} \varphi(x) f^{IV}(x)dx, \tag{6}$$

funcţia $\varphi(x)$ coincizînd pe intervalele $\left[x_0 - h, x_0 - \frac{h}{2}\right]$, $\left[x_0 - \frac{h}{2}, x_0\right]$, $\left[x_0, x_0 + \frac{h}{2}\right]$, $\left[x_0 + \frac{h}{2}, x_0 + h\right]$ cu funcţiile

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \frac{(x - x_0 + h)^4}{4!}, \\ \varphi_2(x) &= \frac{(x - x_0 + h)^4}{4!} - \frac{4h}{3}\frac{\left(x - x_0 + \frac{h}{2}\right)^3}{3!}, \\ \varphi_3(x) &= \frac{(x - x_0 - h)^4}{4!} + \frac{4h}{3}\frac{\left(x - x_0 - \frac{h}{2}\right)^3}{3!}, \\ \varphi_4(x) &= \frac{(x - x_0 - h)^4}{4!}. \end{aligned} \tag{7}$$

Se arată că funcţia $\varphi(x)$ este pozitivă pe intervalul $(x_0 - h, x_0 + h)$ şi că avem

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} \varphi(x)dx = \frac{7h^5}{720}, \tag{8}$$

de unde rezultă următoarea evaluare a valorii absolute a restului

$$|R| \leqslant \frac{7h^5}{720} M_4, \tag{9}$$

unde

$$M_4 = \sup_{(x_0-h,\, x_0+h)} |f^{IV}(x)|$$

2. În aceleaşi condiţii avem formula de cuadratură

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)dx = \frac{h}{4}[3f(x_1) + 2f(x_2) + 3f(x_3)] + R, \tag{10}$$

unde nodurile x_1, x_2, x_3 sînt date de formulele

$$x_1 = x_0 - \frac{2h}{3}, \quad x_2 = x_0, \quad x_3 = x_0 + \frac{2h}{3}. \tag{11}$$

Restul se poate scrie sub forma

$$R = \int_{x_0-h}^{x_0+h} \psi(x) f^{IV}(x)dx. \tag{12}$$

funcţia $\psi(x)$ coincizînd pe intervalele $\left[x_0 - h, x_0 - \frac{2h}{3}\right]$, $\left[x_0 - \frac{2h}{3}, x_0\right]$, $\left[x_0, x_0 + \frac{2h}{3}\right]$, $\left[x_0 + \frac{2h}{3}, x_0 + h\right]$, cu funcţiile

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= \frac{(x - x_0 + h)^4}{4!}, \\ \psi_2(x) &= \frac{(x - x_0 + h)^4}{4!} - \frac{3h}{4}\frac{\left(x - x_0 + \frac{2h}{3}\right)^3}{3!}, \\ \psi_3(x) &= \frac{(x - x_0 - h)^4}{4!} + \frac{3h}{4}\frac{\left(x - x_0 - \frac{2h}{3}\right)^3}{3!}, \\ \psi_4(x) &= \frac{(x - x_0 - h)^4}{4!}. \end{aligned} \tag{13}$$

Funcţia $\psi(x)$ este pozitivă pe intervalul $(x_0 - h,\ x_0 + h)$ şi avem

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} \varphi(x)dx = \frac{7h^5}{1620}, \tag{14}$$

de unde rezultă că

$$|R| \leqslant \frac{7h^5}{1620} M_4. \tag{15}$$

3. De asemenea, în aceleaşi condiţii avem formula de cuadratură

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)dx = \frac{h}{24}[13f(x_1) + 11f(x_2) + 11f(x_3) + 13f(x_4)] + R, \tag{16}$$

cu nodurile

$$x_1 = x_0 - \frac{3h}{4},\quad x_2 = x_0 - \frac{h}{4},\quad x_3 = x_0 + \frac{h}{4},\quad x_4 = x_0 + \frac{3h}{4}. \tag{17}$$

Restul este dat de formula

$$R = \int_{x_0-h}^{x_0+h} \theta(x) f^{\mathrm{IV}}(x)dx, \tag{18}$$

unde funcţia $\theta(x)$ coincide pe intervalele $[x_0 - h,\ x_1]$, $[x_1,\ x_2]$, $[x_2,\ x_3]$, $[x_3,\ x_4]$, $[x_4,\ x_0 + h]$ cu funcţiile

$$\begin{aligned}
\theta_1(x) &= \frac{(x - x_0 + h)^4}{4!},\\
\theta_2(x) &= \frac{(x - x_0 + h)^4}{4!} - \frac{13h}{24}\frac{\left(x - x_0 + \frac{3h}{4}\right)^3}{3!},\\
\theta_3(x) &= \frac{(x - x_0 + h)^4}{4!} - \frac{13h}{24}\frac{\left(x - x_0 + \frac{3h}{4}\right)^3}{3!} - \frac{11h}{24}\frac{\left(x - x_0 + \frac{h}{4}\right)^3}{3!},\\
\theta_4(x) &= \frac{(x - x_0 - h)^4}{4!} + \frac{13h}{24}\frac{\left(x - x_0 - \frac{3h}{4}\right)^3}{3!},\\
\theta_5(x) &= \frac{(x - x_0 - h)^4}{4!}.
\end{aligned} \tag{19}$$

Funcţia $\theta(x)$ este pozitivă pe intervalul $(x_0 - h,\ x_0 + h)$ şi avem

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} \theta(x)dx = \frac{103h^5}{46\,080} M_4, \tag{20}$$

de unde rezultă următoarea evaluare

$$|R| \leqslant \frac{103\ h^5}{46080} M_4. \tag{21}$$

Formulele (4) şi (10) fac parte dintr-o clasă de formule de cuadratură care au fost studiate în lucrarea [2]*.

§ 2. Aplicaţii ale formulei de cubatură (1)

4. Să notăm cu A, B, A', B' vîrfurile dreptunghiului D de coordonate $(x_0 - h, y_0 - k)$, $(x_0 + h,\ y_0 - k)$, $(x_0 - h,\ y_0 + k)$, $(x_0 + h, y_0 + k)$, să împărţim latura AB în n părţi egale, latura AA' în m părţi egale şi prin punctele de diviziune să ducem paralele la axele coordonate. În acest mod dreptunghiul D este împărţit în mn dreptunghiuri D_{ij}, unde centrul G_{ij} al dreptunghiului D_{ij} are coordonatele

$$x_i = x_0 - h + \frac{2i-1}{n}h,\quad y = y_0 - k + \frac{2j-1}{m}k. \tag{22}$$

Aplicînd la dreptunghiul D_{ij} formula de cuadratură (1) avem

$$\iint_{D_{ij}} f dxdy = -4\frac{hk}{mn} f(G_{ij}) + 2\frac{h}{n}\int_{y_j-\frac{k}{m}}^{y_j+\frac{k}{m}} f(x, y)dy + 2\frac{k}{m}\int_{x_i-\frac{h}{n}}^{x_i+\frac{h}{n}} f(x, y)dx + R_{ij},$$

unde avem

$$|R\ | \leqslant \frac{h^3k^3}{9m^3n^3} M_{22}.$$

Dacă adunăm integralele duble relative la toate dreptunghiurile D_{ij}, vom obţine formula de cubatură

$$\begin{aligned}
\iint_D f dxdy = &-4\frac{hk}{mn}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(G_{ij}) + \frac{2h}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{y_0-k}^{y_0+k} f(x, y)dy +\\
&+ \frac{2k}{m}\sum_{j=1}^{m}\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x, y)dx + R^*,
\end{aligned} \tag{23}$$

unde

$$|R^*| \leqslant \frac{h^3k^3}{9m^2n^2} M_{22}. \tag{24}$$

*) Cap. II, § 5.

În această lucrare vom lua $m, n = 1, 2, 3, 4$ şi vom căuta să vedem ce devine formula de cubatură (23), cînd la integralele din membrul al doilea aplicăm formula lui Simpson (în cazul $n = 1$, sau $m = 1$), sau una din formulele de cuadratură stabilite în §1.

Vom nota cu $R_{m,n}$ restul formulei de cubaturi pe care o vom deduce din formula (23), aplicînd formule de cuadratură la integralele care figurează în membrul al doilea.

În altă lucrare vom examina şi cazul cînd unul sau ambele numere m, n sînt mai mari ca 4.

5. Pentru $m = 1$ şi $n = 2$, formula (23) este

$$\iint_D f dxdy = -2hk[f(G_{11}) + f(G_{21})] + 2k \int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x, y_1)dx + \\ + h\left[\int_{y_0-k}^{y_0+k} f(x_1, y)dy + \int_{y_0-k}^{y_0+k} f(x_2, y)dy\right] + |R^*| \tag{25}$$

unde

$$|R^*| \leqslant \frac{h^3k^3}{36} M_{22}. \tag{26}$$

Aplicînd formula de cuadratură a lui Simpson, avem

$$h\int_{y_0-k}^{y_0+k} f(x_1, y)dy + h\int_{y_0-k}^{y_0+k} f(x_2, y)dy = \frac{hk}{3}[f(P_1) + f(P'_1) + f(P_2) + \\ + f(P'_2) + 4f(G_{11}) + 4f(G_{21})] + R_1, \tag{27}$$

unde P_1, P'_1, P_2, P'_2 sînt punctele de coordonate $(x_1, y_0 - k), (x_1, y_0 + k)$, $(x_2, y_0 - k), (x_2, y_0 + k)$ (fig. 1).

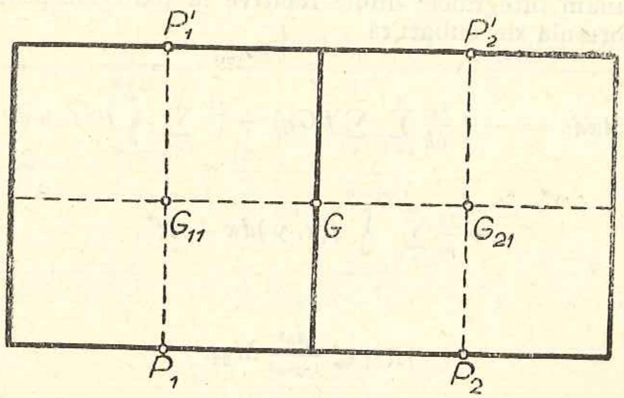

Fig. 1

Pentru a da evaluarea valorii absolute a lui R_1, să introducem în general următoarele notaţii

$$M_{40}[m, y_j] = \sup_{[x_0-h,\, x_0+h]} \left|\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(x, y_j)\right|, \tag{29}$$

$$M_{04}[x_i, n] = \sup_{[y_0-k,\, y_0+k]} \left|\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(x_i, y)\right|. \tag{30}$$

Cu aceste notaţii avem

$$|R_1| \leqslant \frac{hk^5}{45} \cdot \frac{M_{04}[x_1, 2] + M_{04}[x_2, 2]}{2}. \tag{31}$$

La prima integrală din membrul al doilea al formulei (25) să aplicăm formula de cuadratură (4). Vom avea

$$2k\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x, y_0)dx = \frac{4hk}{3}[2f(G_{11}) - f(G) + 2f(G_{21})] + R_2, \tag{32}$$

unde

$$|R_2| \leqslant \frac{7h^5k}{360} M_{40}[1, y_1]. \tag{33}$$

Ţinînd seamă de formulele (27) şi (32), din formula (25) se obţine formula de cubatură

$$\boxed{\iint_D f dxdy = \frac{hk}{3}[f(P_1) + f(P_2) + f(P'_1) + f(P'_2) + \\ + 6f(G_{11}) - 4f(G) + 6f(G_{21})] + R_{12}} \tag{34}$$

unde

$$R_{12}| \leqslant \frac{hk}{45}\left[\frac{5h^2k^2}{4} M_{22} + \frac{7}{8}h^4M_{40}[1, y_1] + k^4\,\frac{M_{04}[x_{1,2}] + M_{04}[x_2, 2]}{2}\right]. \tag{35}$$

În mod analog, dacă în formula (23) alegem $m = 2$, $n = 1$, sîntem conduşi la formula de cubatură, cu nodurile $Q_1, Q_2, Q'_1, Q'_2, G_{11}, G, G_{12}$ marcate în fig. 2,

$$\boxed{\iint_D f dxdy = \frac{hk}{3}[f(Q_1) + f(Q_2) + f(Q'_1) + f(Q'_2) + \\ + 6f(G_{11}) - 4f(G) + 6f(G_{12})] + R_{21}} \tag{36}$$

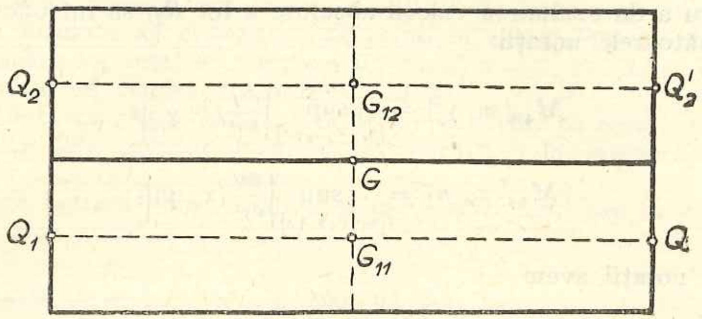

Fig. 2

unde

$$|R'_{21}| \leqslant \frac{hk}{45}\left[\frac{5h^2k^2}{4} M_{22} + h^4 \frac{M_{40}[2, y_1] + M_{40}[2, y_2]}{2} + \frac{7}{8} k^4 M_{04}]x_1, 1]\right]. \tag{37}$$

6. Pentru $m = 1$ și $n = 3$, formula (23) este

$$\begin{aligned}\iint\limits_D f dx dy = &-\frac{4hk}{3}[f(G_{11}) + f(G_{21}) + f(G_{31})] + 2k \int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x, y_1) dx + \\ &+ \frac{2h}{3}\left[\int_{y_0-k}^{y_0+k} f(x_1, y) dy + \int_{y_0-k}^{y_0+k} f(x_2, y) dy + \int_{y_0-k}^{y_0+k} f(x_3, y) dy\right] + R^*,\end{aligned} \tag{38}$$

unde

$$|R^*| \leqslant \frac{h^3k^3}{81} M_{22}. \tag{39}$$

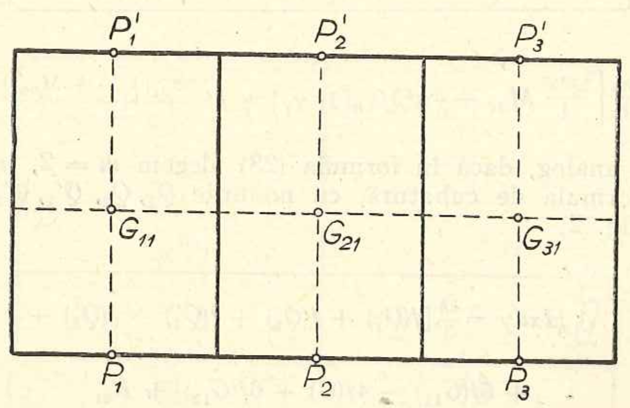

Fig. 3

Ținînd seama de formula lui Simpson, avem

$$\begin{aligned}\frac{2h}{3}\sum_{i=1}^{3}\int_{y_0-k}^{y_0+k} f(x_i, y) dy = \frac{2hk}{9}[&f(P_1) + f(P_2) + f(P_3) + \\ &+ f(P_1') + f(P_2') + f(P_3') + \\ &+ 4 f(G_{11}) + 4f(G_{21}) + 4 f(G_{31})] + R_1.\end{aligned} \tag{40}$$

unde nodurile sînt marcate pe fig. 3, și

$$|R_1| \leqslant \frac{hk^5}{45} \frac{M_{04}[x_1, 3] + M_{04}[x_2, 3] + M_{04}[x_3, 3]}{3}. \tag{41}$$

La prima integrală din formula (38), să aplicăm formula de cubatură (10). Vom avea

$$2k \int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x, y_1) dx = \frac{hk}{2}[3 f(G_{11}) + 2f(G_{21}) + 3f(G_{31})] + R_2, \tag{42}$$

unde

$$|R_2| \leqslant \frac{7h^5k}{810} M_{40}[1, y_1]. \tag{43}$$

Cu ajutorul formulelor (40), (42), obținem din formula (38) formula de cubatură

$$\boxed{\begin{aligned}\iint\limits_D f dx dy = \frac{hk}{18}[&4 f(P_1) + 4 f(P_2) + 4 f(P_3) + \\ &+ 4 f(P_1') + 4 f(P_2') + 4 f(P_3') + \\ &+ 19 f(G_{11}) + 10 f(G_{21}) + 19 f(G_{31})] + R_{13}\end{aligned}} \tag{44}$$

unde

$$|R_{13}| \leqslant \frac{hk}{45}\left[\frac{5h^2k^2}{9} M_{22} + \frac{7h^4}{18} M_{40}[1, y_1] + k^4 \frac{M_{04}[x_1, 3] + M_{04}[x_2, 3] + M_{04}[x_3, 3]}{3}\right]. \tag{45}$$

În mod analog, dacă în formula (23) alegem $m = 3$, $n = 1$, obținem formula de cubatură

$$\boxed{\begin{aligned}\iint\limits_D f dx dy = \frac{hk}{18}[&4 f(Q_1) + 4 f(Q_2) + 4 f(Q_3) + \\ &+ 4f(Q_1') + 4 f(Q_2') + 4 f(Q_3') + \\ &+ 19 f(G_{11}) + 10 f(G_{12}) + 19 f(G_{13})] + R_{31}\end{aligned}}$$

unde nodurile sînt marcate ca în fig. 4 şi unde

$$|R_{31}| \leqslant \frac{hk}{45}\left[\frac{5h^2k^2}{9}M_{22} + h^4\,\frac{M_{40}[1, y_1] + M_{40}[1, y_2] + M_{40}[1, y_3]}{3} + \right.$$
$$\left. + \frac{7}{18}k^4 M_{04}[x_1, 1]\right]. \tag{47}$$

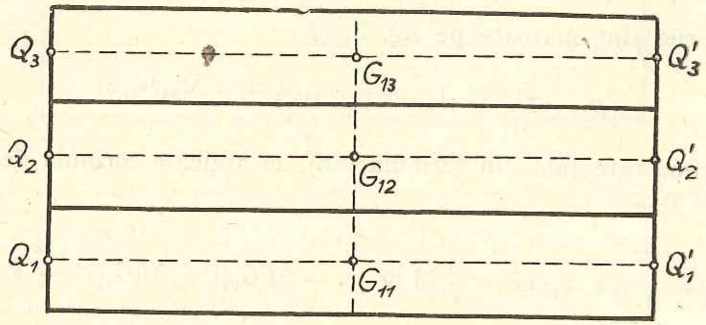

Fig. 4

7. În formula generală (23) să alegem $m = 1$, $n = 4$. Vom avea

$$\iint\limits_D f dx dy = -\, hk\,[f(G_{11}) + f(G_{21}) + f(G_{31}) + f(G_{41})] +$$
$$+ 2k\int\limits_{x_0-h}^{x_0+h} f(x, y_1)dx + \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{4}\int\limits_{y_0-k}^{y_0+k} f(x_i, y)dy + R^*, \tag{48}$$

unde

$$|R^*| \leqslant \frac{h^3k^3}{144}M_{22}. \tag{49}$$

Aplicînd formula lui Simpson avem

$$\frac{h}{2}\sum_{i=1}^{4}\int\limits_{y_0-k}^{y_0+k} f(x_i, y)dy = \frac{hk}{6}[f(P_1) + f(P_2) + f(P_3) + f(P_4) +$$
$$+ f(P_1') + f(P_2') + f(P_3') + f(P_4') +$$
$$+ 4\,f(G_{11}) + 4\,f(G_{21}) + 4\,f(G_{31}) + 4\,f(G_{41})] + R_1, \tag{50}$$

unde nodurile sînt marcate ca în fig. 5, iar

$$|R_1| \leqslant \frac{hk^5}{45}\,\frac{M_{04}[x_1, 4] + M_{04}[x_2, 4] + M_{04}[x_3, 4] + M_{04}[x_4, 4]}{4}. \tag{51}$$

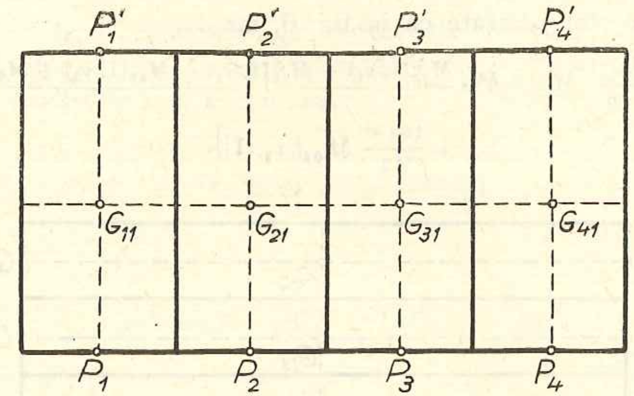

Fig. 5

Aplicînd şi formula de cuadratură (16), avem

$$2k\int\limits_{x_0-h}^{x_0+h} f(x, y_1)dx = \frac{hk}{12}[13f(G_{11}) + 11\,f(G_{12}) + 11\,f(G_{13}) + 13\,f(G_{14})] + R_2,$$

unde (52)

$$|R_2| \leqslant \frac{103\,h^5k}{23040}\,M_{40}[1, y_1]. \tag{53}$$

Ţinînd seama de formulele (50) şi (52), formula (48) conduce la următoarea formulă de cubatură

$$\boxed{\begin{aligned}\iint\limits_D f dx dy = \frac{hk}{12}[&2f(P_1) + 2f(P_2) + 2f(P_3) + 2f(P_4) +\\ &+ 2f(P_1') + 2f(P_2') + 2f(P_3') + 2f(P_4') +\\ &+ 9f(G_{11}) + 7f(G_{21}) + 7f(G_{31}) + 9f(G_{41})] + R_{14}\end{aligned}} \tag{54}$$

unde

$$|R_{14}| \leqslant \frac{hk}{45}\left[\frac{5h^2k^2}{16}M_{22} + \frac{103h^4}{512}M_{40}[1, y_1] + k^4\frac{M_{04}[x_1, 4] + M_{04}[x_2, 4] + M_{04}[x_3, 4] + M_{04}[x_4, 4]}{4}\right] \tag{55}$$

În mod analog, dacă în formula (23) se face $m = 4$, $n = 1$, se ajunge la formula de cubatură :

$$\boxed{\begin{aligned}\iint\limits_D f dx dy = \frac{hk}{12}[&2f(Q_1) + 2f(Q_2) + 2f(Q_3) + 2f(Q_4) +\\ &+ 2f(Q_1') + 2f(Q_2') + 2f(Q_3') + 2f(Q_4') +\\ &+ 9f(G_{11}) + 7f(G_{12}) + 7f(G_{13}) + 9f(G_{14})] + R_{41}\end{aligned}} \tag{56}$$

unde nodurile sînt marcate ca în fig. 6, iar

$$R_{41} \leqslant \frac{hk}{45}\left[\frac{5h^2k^2}{16} M_{22} + h^4 \cdot \frac{M_{40}[1, y_1] + M_{40}[1, y_2] + M_{40}[1, y_3] + M_{40}[1, y_4]}{4} + \right.$$
$$\left. + \frac{103\, k^4}{512} M_{04}[x_1, 1]\right]. \tag{56'}$$

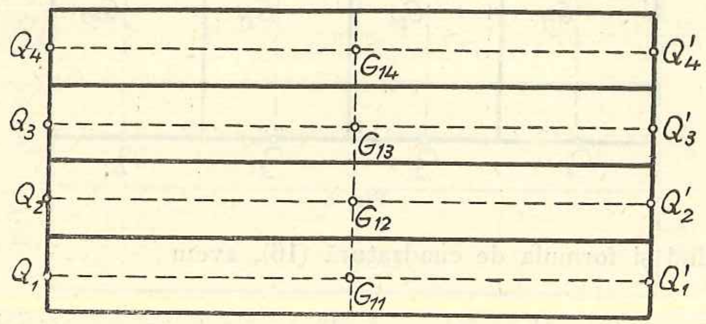

Fig. 6

8. În formula generală (23), să alegem $m = 2$, $n = 2$ (fig. 7). Vom obține

$$\iint_D f dx dy = -hk\,[f(G_{11}) + f(G_{21}) + f(G_{12}) + f(G_{22})] + h\left[\int_{y_0-k}^{y_0+k} f(x_1, y) dy + \right.$$
$$\left. + \int_{y_0-k}^{y_0+k} f(x_2, y) dy\right] + k\left[\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x, y_1) dx + \int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x, y_2) dx\right] + R^*, \tag{57}$$

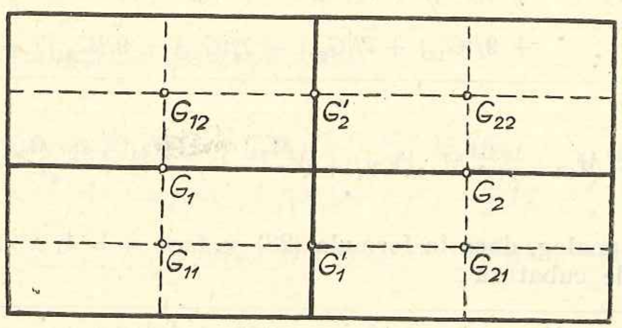

Fig. 7

unde

$$|R^*| \leqslant \frac{h^3k^3}{144} M_{22}. \tag{58}$$

Fie G_1, G_2, G'_1, G'_2 punctele de coordonate (x_1, y_0), (x_2, y_0), (x_0, y_1), (x_0, y_2). La integralele din membrul al doilea al formulei (77) să aplicăm formula de cuadratură (4). Vom avea

$$h\left[\int_{y_0-k}^{y_0+k} f(x_1, y) dy + \int_{y_0-k}^{y_0+k} f(x_2, y) dy\right] = \frac{2hk}{3}[2f(G_{11}) - f(G_1) + 2f(G_{12}) + $$
$$+ 2f(G_{21}) - f(G_2) + 2f(G_{22})] + R_1 \tag{59}$$

și

$$k\left[\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x, y_1) dx + \int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x, y_2) dx\right] = \frac{2hk}{3}[2\, f(G_{11}) - f(G'_1) + 2f(G_{21}) + $$
$$+ 2f(G_{12}) - f(G'_2) + 2f(G_{22})] + R_2, \tag{60}$$

unde

$$|R_1| \leqslant \frac{7hk^5}{360} \cdot \frac{M_{04}[x_1, 2] + M_{04}[x_2, 2]}{2} \tag{61}$$

și

$$|R_2| \leqslant \frac{7h^5k}{360} \cdot \frac{M_{40}[2, y_1] + M_{40}[2, y_2]}{2}. \tag{62}$$

Ținînd seamă de formulele (59) și (60), formula (57) conduce la formula de cubatură

$$\boxed{\begin{aligned}\iint_D f dx dy = \frac{hk}{3}[&5f(G_{11}) + 5f(G_{21}) - 2f(G_1) - 2f(G_2) + \\ &+ 5f(G_{12}) + 5f(G_{22}) - 2f(G'_1) - 2f(G'_2)] + R_{22}\end{aligned}} \tag{63}$$

unde

$$|R_{22}| \leqslant \frac{hk}{45}\left[\frac{5h^2k^2}{16} M_{22} + \frac{7}{8} h^4 \frac{M_{40}[2, y_1] + M_{40}[2, y_2]}{2} + \right.$$
$$\left. + \frac{7}{8} k^4 \frac{M_{04}[x_1, 2] + M_{04}[x_2, 2]}{2}\right]. \tag{64}$$

9. Să facem acum în formula generală (23), $m = 2$, $n = 3$ (fig. 8). Vom avea

$$\iint\limits_D f dx dy = -\frac{2hk}{3}[f(G_{11}) + f(G_{21}) + f(G_{31}) +$$

$$+ f(G_{12}) + f(G_{22}) + f(G_{32})] + \frac{2h}{3}\sum_{i=1}^{3}\int\limits_{y_0-k}^{y_0+k} f(x_i, y)dy +$$

$$+ k\sum_{j=1}^{2}\int\limits_{x_0-h}^{x_0+h} f(x, y)dx + R^* \tag{65}$$

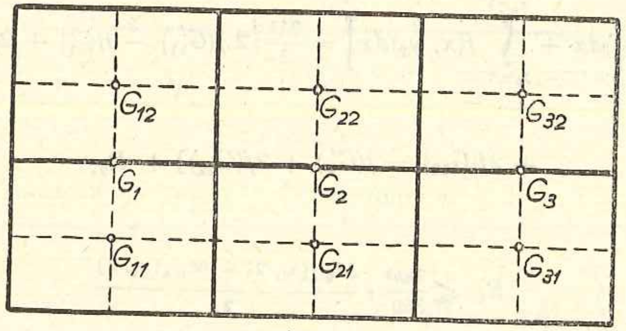

Fig. 8

unde

$$|R^*| \leqslant \frac{h^3k^3}{324} M_{22}.$$

La primele trei integrale din membrul al doilea să aplicăm formula de cuadratură (4), iar la următoarele să aplicăm formula de cuadratură (10). Vom avea

$$\frac{2h}{3}\sum_{i=1}^{3}\int\limits_{y_0-k}^{y_0+k} f(x_i, y)dy = \frac{4hk}{9}[2f(G_{11}) + 2f(G_{21}) + 2f(G_{31}) +$$

$$+ 2f(G_{12}) + 2f(G_{22}) + 2f(G_{32}) -$$

$$- f(G_1) - f(G_2) - f(G_3)] + R_1, \tag{66}$$

unde G_1, G_2, G_3 sînt punctele de coordonate $(x_1, y_0), (x_2, y_0), (x_3, y_0)$, iar

$$|R_1| \leqslant \frac{7hk^5}{360}\cdot\frac{M_{04}[x_1, 3] + M_{04}[x_2, 3] + M_{04}[x_3, 3]}{3}. \tag{67}$$

De asemenea avem

$$k\sum_{j=1}^{2}\int\limits_{x_0-h}^{x_0+h} f(x, y_j)dx = \frac{hk}{4}[3f(G_{11}) + 2f(G_{21}) + 3f(G_{31}) +$$

$$+ 3f(G_{12}) + 2f(G_{22}) + 3f(G_{32})] + R_2, \tag{68}$$

unde

$$|R_2| \leqslant \frac{7h^5k}{810}\cdot\frac{M_{40}[2, y_1] + M_{40}[2, y_2]}{2}. \tag{69}$$

Ţinînd seamă de formulele (66) şi (68), obţinem formula de cubatură

$$\boxed{\begin{aligned}\iint\limits_D f dx dy = \frac{hk}{36}[&35f(G_{11}) + 26f(G_{21}) + 35f(G_{31}) +\\ &+ 35f(G_{12}) + 26f(G_{22}) + 35f(G_{32}) -\\ &- 16f(G_1) - 16f(G_2) - 16f(G_3)] + I_{.3}\end{aligned}} \tag{70}$$

unde

$$|R_{23}| \leqslant \frac{hk}{45}\Big[\frac{5h^2k^2}{36}M_{22} + \frac{7}{18}h^4\cdot\frac{M_{40}[2, y_1] + M_{40}[2, y_2]}{2} +$$

$$+ \frac{7}{8}k^4\frac{M_{04}[x_1, 3] + M_{04}[x_2, 3] + M_{04}[x_3, 3]}{3}\Big]. \tag{71}$$

În mod analog, dacă în formula generală (23) se face $m = 3$, $n = 2$ (fig. 9), se obţine formula de cubatură

$$\boxed{\begin{aligned}\iint\limits_D f dx dy = \frac{hk}{36}[&35f(G_{11}) + 35f(G_{21}) +\\ &+ 26f(G_{12}) + 26f(G_{22}) +\\ &+ 35f(G_{13}) + 35f(G_{23}) -\\ &- 16f(G'_1) - 16f(G'_2) - 16f(G'_3)] + R_{32}\end{aligned}} \tag{72}$$

unde G'_1, G'_2, G'_3 sînt punctele de coordonate (x_0, y_1), (x_0, y_2), (x_0, y_3), iar

$$|R_{32}| \leqslant \frac{hk}{45}\Big[\frac{5h^2k^2}{36}M_{22} + \frac{7}{8}h^4\cdot\frac{M_{40}[3, y_1] + M_{40}[3, y_2] + M_{40}[3, y_3]}{4} +$$

$$+ \frac{7}{18}\cdot k^4\cdot\frac{M_{04}[x_1, 2] + M_{04}[x_2, 2]}{2}\Big]. \tag{73}$$

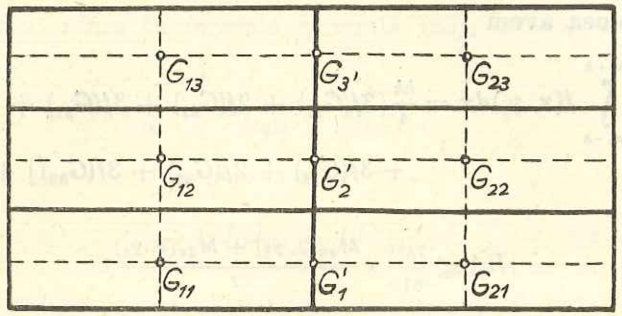

Fig. 9

10. Să aplicăm formula generală (23) la cazul $m = 2$, $n = 4$ (fig. 10). Vom avea

$$\iint_D f dxdy = -\frac{hk}{2}[f(G_{11}) + f(G_{21}) + f(G_{31}) + f(G_{41}) + $$
$$+ f(G_{12}) + f(G_{22}) + f(G_{32}) + f(G_{42})] +$$
$$+ \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{4}\int_{y_0-k}^{y_0+k} f(x_i, y)dy + k\sum_{j=1}^{2}\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x, y_j)dx + R^*, \tag{74}$$

unde

$$|R^*| \leqslant \frac{h^3k^3}{576} M_{22}. \tag{75}$$

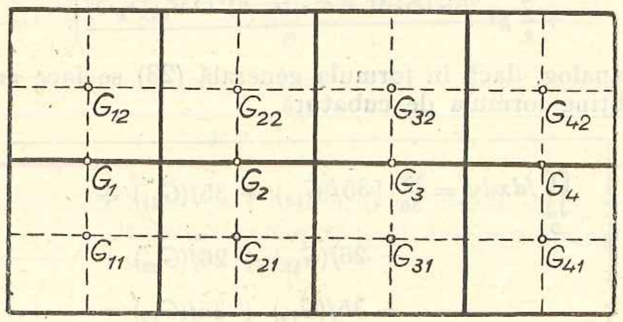

Fig. 10

La primele patru integrale din membrul al doilea să aplicăm formula de cuadratură (4), iar la celelalte să aplicăm formula de cuadratură (16). Vom avea

$$\frac{h}{2}\sum_{i=1}^{4}\int_{y_0-k}^{y_0+k} f(x_i, y)dy = \frac{hk}{3}[2f(G_{11}) + 2f(G_{21}) + 2f(G_{31}) + 2f(G_{41}) +$$
$$+ 2f(G_{12}) + 2f(G_{22}) + 2f(G_{32}) + 2f(G_{42}) -$$
$$- f(G_1) - f(G_2) - f(G_3) - f(G_4)] + R_1, \tag{76}$$

unde

$$|R_1| \leqslant \frac{7hk^5}{360} \cdot \frac{M_{04}[x_1, 4] + M_{04}[x_2, 4] + M_{04}[x_3, 4] + M_{04}[x_4, 4]}{4} \tag{77}$$

și G_1, G_2, G_3, G_4 sînt punctele de coordonate (x_1, y_0), (x_2, y_0), (x_3, y_0), (x_4, y_0).

De asemenea avem

$$k\sum_{j=1}^{2}\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x, y_j)dx = \frac{hk}{24}[13f(G_{11}) + 11f(G_{21}) + 11f(G_{31}) + 13f(_{41}) +$$
$$+ 13f(G_{12}) + 11f(G_{22}) + 11f(G_{32}) + 13f(G_{42})] + R_2, \tag{78}$$

unde

$$|R_2| \leqslant \frac{103h^5k}{23040} \cdot \frac{M_{40}[2, y_1] + M_{40}[2, y_2]}{3}. \tag{79}$$

Cu formulele (76) și (78), din formula (74) se deduce formula de cubatură

$$\boxed{\begin{aligned}\iint_D f dxdy = \frac{hk}{24}[&17f(G_{11}) + 15f(G_{21}) + 15f(G_{31}) + 17f(G_{41}) +\\ &+ 17f(G_{12}) + 15f(G_{22}) + 15f(G_{32}) + 17f(G_{42}) -\\ &- 8f(G_1) - 8f(G_2) - 8f(G_3) - 8f(G_4)] + R_{2,4}\end{aligned}} \tag{80}$$

unde

$$|R_{2\,4}| \leqslant \frac{hk}{45}\left[\frac{5h^2k^2}{64}M_{22} + \frac{103}{512}h^4\frac{M_{40}[2, y_1] + M_{40}[2, y_2]}{2} + \right.$$
$$\left. + \frac{7}{18}k^4 \cdot \frac{M_{04}[x_1, 4] + M_{04}[x_2, 4] + M_{04}[x_3, 4] + M_{04}[x_4, 4]}{4}\right]. \tag{81}$$

În mod analog, dacă în formula (23) se face $m = 4$, $n = 2$ (fig. 11), se găsește formula de cubatură

$$\boxed{\begin{aligned}\iint_D f dxdy = \frac{hk}{24}[&17f(G_{11}) + 17f(G_{21}) +\\ &+ 15f(G_{12}) + 15f(G_{22}) +\\ &+ 15f(G_{13}) + 15f(G_{23}) +\\ &+ 17f(G_{14}) + 17f(G_{24}) -\\ &- 8f(G_1') - 8f(G_2') - 8f(G_3') - 8f(G_4')] + R_{4,2}\end{aligned}} \tag{82}$$

unde G_1' G_2', G_3', G_4' sînt punctele de coordonate (x_0, y_1), $x_0, y_2)$, (x_0, y_3), (x_0, y_4), iar

$$|R_{42}| \leqslant \frac{hk}{45}\left[\frac{5h^2k^2}{64} M_{22} + \frac{7}{18} h^4 \frac{M_{40}[4, y_1] + M_{40}[4, y_2] + M_{40}[4, y_3] + M_{40}[4, y_4]}{4} + \frac{103}{512} k^4 \frac{M_{04}[x_1, 2] + M_{04}[x_2, 2]}{2}\right] \tag{83}$$

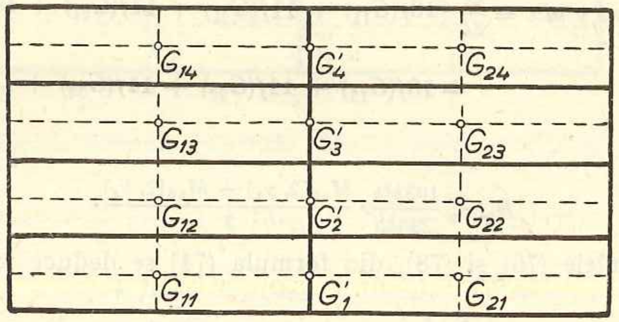

Fig. 11

11. Să aplicăm formula generală (23) în cazul $m = 3$, $n = 3$ (fig. 12) Vom avea

$$\iint\limits_D f dx dy = -\frac{4hk}{9}[f(G_{11}) + f(G_{21}) + f(G_{31}) + f(G_{12}) + f(G_{22}) + f(G_{32}) + f(G_{13}) + f(G_{23}) + f(G_{33})] + \frac{2h}{3}\sum_{i=1}^{3}\int_{y_0-k}^{y_0+k} f(x_i, y)dy + \frac{2k}{3}\sum_{j=1}^{3}\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x, y_j)dx + R^*, \tag{84}$$

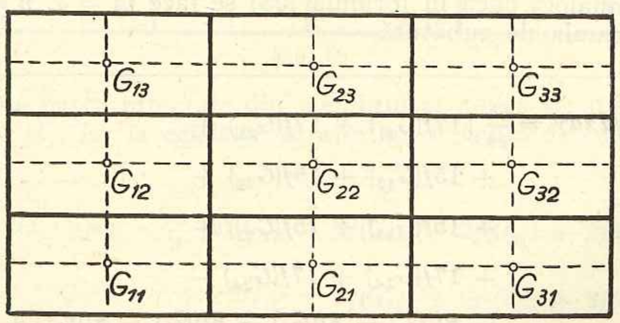

Fig. 12

unde

$$|R^*| \leqslant \frac{h^2k^3}{729} M_{22}. \tag{85}$$

La integralele din membrul al doilea al formulei (84) să aplicăm formula de cuadratură (10). Vom avea

$$\frac{2h}{3}\sum_{i=1}^{3}\int_{y_0-k}^{y_0+k} f(x_i, y)dy = \frac{hk}{6}[3f(G_{11}) + 3f(G_{21}) + 3f(G_{31}) + 2f(G_{12}) + 2f(G_{22}) + 2f(G_{32}) + 3f(G_{13}) + 3f(G_{23}) + 3f(G_{33})] + R_1 \tag{86}$$

și

$$\frac{2k}{3}\sum_{j=1}^{3}\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x, y_j)dx = \frac{hk}{6}[3f(G_{11}) + 2f(G_{21}) + 3f(G_{31}) + 3f(G_{12}) + 2f(G_{22}) + 3f(G_{32}) + 3f(G_{13}) + 2f(G_{23}) + 3f(G_{33})] + R_2, \tag{87}$$

unde

$$|R_1| \leqslant \frac{7hk^5}{810} \cdot \frac{M_{04}[x_1, 3] + M_{04}[x_2, 3] + M_{04}[x_3, 3]}{3} \tag{88}$$

și

$$|R_2| \leqslant \frac{7h^5k}{810} \cdot \frac{M_{40}[3, y_1] + M_{40}[3, y_2] + M_{40}[3, y_3]}{3}. \tag{89}$$

Ținînd seama de formulele (86) și (87), formula (84) conduce la formula de cubatură

$$\boxed{\iint\limits_D f dx dy = \frac{hk}{18}[10f(G_{11}) + 7f(G_{21}) + 10f(G_{31}) + 7f(G_{12}) + 4f(G_{22}) + 7f(G_{32}) + 10f(G_{13}) + 7f(G_{23}) + 10f(G_{33})] + R_{33}} \tag{90}$$

unde

$$|R_{33}| \leqslant \frac{hk}{45} \cdot \left[\frac{5h^2k^2}{81} M_{22} + \frac{7}{18} h^4 \cdot \frac{M_{40}[3, y_1] + M_{40}[3, y_2] + M_{40}[3, y_3]}{3} + \frac{7}{18} k^4 \frac{M_{04}[x_1, 3] + M_{04}[x_2, 3] + M_{04}[x_3, 3]}{3}\right]. \tag{91}$$

12. În formula de cubatură (23) să facem $m = 3$, $n = 4$ (fig. 13).

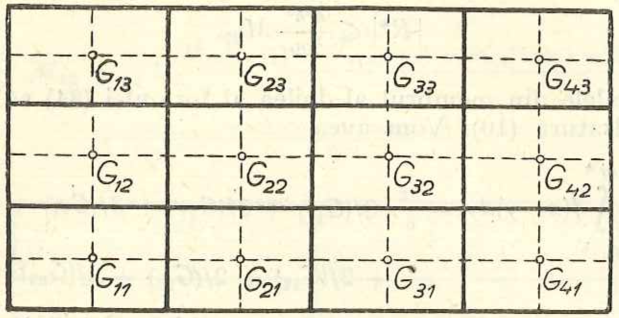

Fig. 13

Vom obține

$$\begin{aligned}\iint\limits_D f dxdy = &-\frac{hk}{3}[f(G_{11}) + f(G_{21}) + f(G_{31}) + f(G_{41}) + \\ &+ f(G_{12}) + f(G_{22}) + f(G_{32}) + f(G_{42}) + \\ &+ f(G_{13}) + f(G_{23}) + f(G_{33}) + f(G_{43})] + \\ &+ \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{4}\int_{y_0-k}^{y_0+k} f(x_i, y)dy + \frac{2k}{3}\sum_{j=1}^{3}\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x, y_j)dx + R^*\end{aligned} \tag{92}$$

unde

$$|R^*| \leqslant \frac{h^3k^3}{1296} M_{22}.$$

La integralele din membrul al doilea al formulei (92) să aplicăm formulele de cuadratură (10) și (16). Vom avea

$$\begin{aligned}\frac{h}{2}\sum_{i=1}^{4}\int_{y_0-k}^{y_0+k} f(x_i, y)dy = &\frac{hk}{8}[3f(G_{11}) + 3f(G_{21}) + 3f(G_{31}) + 3f(G_{41}) + \\ &+ 2f(G_{12}) + 2f(G_{22}) + 2f(G_{32}) + 2f(G_{42}) + \\ &+ 3f(G_{13}) + 3f(G_{23}) + 3f(G_{33}) + 3f(G_{43})] + R_1\end{aligned} \tag{94}$$

și

$$\begin{aligned}\frac{2k}{3}\sum_{j=1}^{3}\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x, y_j)dx = &\frac{hk}{36}[13f(G_{11}) + 11f(G_{21}) + 11f(G_{31}) + 13f(G_{41}) + \\ &+ 13f(G_{12}) + 11f(G_{22}) + 11f(G_{32}) + 13f(G_{42}) + \\ &+ 13f(G_{13}) + 11f(G_{23}) + 11f(G_{33}) + 13f(G_{43})] + R_2\end{aligned} \tag{95}$$

unde

$$|R_1| \leqslant \frac{7hk^5}{810}\,\frac{M_{04}[x_1, 4] + M_{04}[x_2, 4] + M_{04}[x_3, 4] + M_{04}[x_4, 4]}{4}. \tag{96}$$

și

$$|R_2| \leqslant \frac{103h^5k}{23040}\,\frac{M_{40}[3, y_1] + M_{40}[3, y_2] + M_{40}[3, y_3]}{3}. \tag{97}$$

Ținînd seama de formulele (94) și (95), formula (92) devine

$$\boxed{\begin{aligned}\iint\limits_D f dxdy = &\frac{hk}{72}[29f(G_{11}) + 25f(G_{21}) + 25f(G_{31}) + 29f(G_{41}) + \\ &+ 20f(G_{12}) + 16f(G_{22}) + 16f(G_{32}) + 20f(G_{42}) + \\ &+ 29f(G_{13}) + 25f(G_{23}) + 25f(G_{33}) + 29f(G_{43})] + R_{34}\end{aligned}} \tag{98}$$

unde

$$\begin{aligned}|R_{34}| \leqslant \frac{hk}{45}\Big[&\frac{5h^2k^2}{144}M_{22} + \frac{103}{512}h^4\cdot\frac{M_{40}[3, y_1] + M_{40}[3, y_2] + M_{40}[3, y_3]}{3} + \\ &+ \frac{7}{18}k^4\cdot\frac{M_{04}[x_1, 4] + M_{04}[x_2, 4] + M_{04}[x_3, 4] + M_{04}[x_4, 4]}{4}\Big].\end{aligned} \tag{99}$$

În mod analog, dacă în formula (23) se face $m = 4$, $n = 3$ (fig. 14),

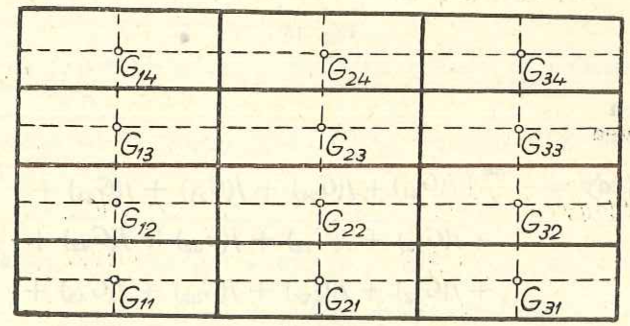

Fig. 14

se obține

$$\boxed{\begin{aligned}\iint\limits_D f dxdy = &\frac{hk}{72}[29f(G_{11}) + 20f(G_{21}) + 29f(G_{31}) + \\ &+ 25f(G_{12}) + 16f(G_{22}) + 25f(G_{32}) + \\ &+ 25f(G_{13}) + 16f(G_{23}) + 25f(G_{33}) + \\ &+ 29f(G_{14}) + 20f(G_{24}) + 29f(G_{34})] + R_{43}\end{aligned}} \tag{100}$$

unde

$$|R_{43}| \leqslant \frac{hk}{45}\left[\frac{5h^2k^2}{144} M_{22} + \frac{7}{18} h^4 \frac{M_{40}[4, y_1] + M_{40}[4, y_2] + M_{40}[4, y_3] + M_{40}[4, y_4]}{4} + \right.$$
$$\left. + \frac{103}{512} k^4 \frac{M_{04}[x_1, 3] + M_{04}[x_2, 3] + M_{04}[x_3, 3]}{3}\right]. \tag{101}$$

13. În fine, în formula de cubatură (23) să facem $m = 4$, $n = 4$ (fig. 15).

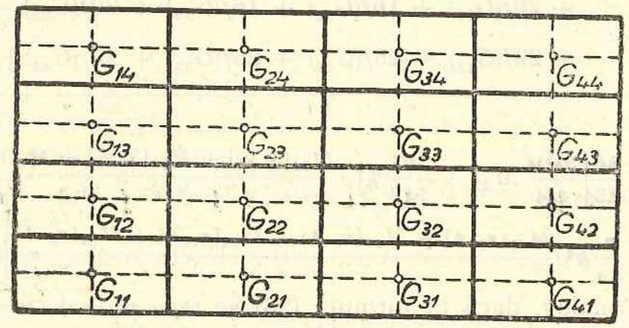

Fig. 15

Vom avea

$$\iint_D f dxdy = -\frac{hk}{4}[f(G_{11}) + f(G_{21}) + f(G_{31}) + f(G_{41}) + $$
$$+ f(G_{12}) + f(G_{22}) + f(G_{32}) + f(G_{42}) +$$
$$+ f(G_{13}) + f(G_{23}) + f(G_{33}) + f(G_{43}) + \tag{102}$$
$$+ f(G_{14}) + f(G_{24}) + f(G_{34}) + f(G_{44})] +$$
$$+ \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{4}\int_{y_0-k}^{y_0+k} f(x_i, y)dy + \frac{k}{2}\sum_{j=1}^{4}\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x, y_j)dx + R^*,$$

unde

$$|R^*| \leqslant \frac{h^3k^3}{2304} M_{22}. \tag{103}$$

Aplicînd la fiecare integrală din membrul al doilea formula de cuadratură (16), avem

$$\frac{h}{2}\sum_{i=1}^{4}\int_{y_0-k}^{y_0+k} f(x_i, y)dx = \frac{hk}{48}[13f(G_{11}) + 13f(G_{21}) + 13f(G_{31}) + 13f(G_{41}) +$$
$$+ 11f(G_{12}) + 11f(G_{22}) + 11f(G_{32}) + 11f(G_{42}) + \tag{104}$$
$$+ 11f(G_{13}) + 11f(G_{23}) + 11f(G_{33}) + 11f(G_{43}) +$$
$$+ 13f(G_{14}) + 13f(G_{24}) + 13f(G_{34}) + 13f(G_{44})] + R_1$$

şi

$$\frac{k}{2}\sum_{j=1}^{4}\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x, y_j)dx = \frac{hk}{48}[13f(G_{11}) + 11f(G_{21}) + 11f(G_{31}) + 13f(G_{41}) +$$
$$+ 13f(G_{12}) + 11f(G_{22}) + 11f(G_{32}) + 13f(G_{42}) + \tag{105}$$
$$+ 13f(G_{13}) + 11f(G_{23}) + 11f(G_{33}) + 13f(G_{43}) +$$
$$+ 13f(G_{14}) + 11f(G_{24}) + 11f(G_{34}) + 13f(G_{44})] + R_2,$$

unde

$$|R_1| \leqslant \frac{103hk^5}{23040} \cdot \frac{M_{04}[x_1, 4] + M_{04}[x_2, 4] + M_{04}[x_3, 4] + M_{04}[x_4, 4]}{4} \tag{106}$$

$$|R_2| \leqslant \frac{103h^5k}{23040} \cdot \frac{M_{40}[4, y_1] + M_{04}[4, y_2] + M_{40}[4, y_3] + M_{40}[4, y_4]}{4}. \tag{107}$$

Ţinînd seama de formulele (104), (105), formula (102) devine formula de cubatură

$$\boxed{\begin{aligned}\iint_D f dxdy = \frac{hk}{24}[&7f(G_{11}) + 6f(G_{21}) + 6f(G_{31}) + 7f(G_{41}) +\\ &+ 6f(G_{12}) + 5f(G_{22}) + 5f(G_{32}) + 6f(G_{42}) +\\ &+ 6f(G_{13}) + 5f(G_{23}) + 5f(G_{33}) + 6f(G_{43}) +\\ &+ 7f(G_{14}) + 6f(G_{24}) + 6f(G_{34}) + 7f(G_{44})] + R\end{aligned}} \tag{108}$$

în care

$$|R| \leqslant \frac{hk}{45}\left[\frac{5h^2k^2}{256} M_{22} + \frac{103}{512} h^4 \frac{M_{40}[4, y_1] + M_{40}[4, y_2] + M_{40}[4, y_3] + M_{40}[4, y_4]}{4} + \right.$$
$$\left. + \frac{103}{512} k^4 \frac{M_{04}[x_1, 4] + M_{04}[x_2, 4] + M_{04}[x_3, 4] + M_{04}[x_4, 4]}{4}\right]. \tag{109}$$

14. În rezumat, am obţinut formulele de cubatură (34), (36), (44), (46), (54), (56), (63), (70), (72), (80), (82), (90), (98), (100), (108). În general nodurile acestor formule sînt centrele G_{ij} ale celor mn dreptunghiuri egale în care a fost împărţit dreptunghiul D, cu excepţia primelor formule care folosesc şi noduri situate pe laturile dreptunghiului D sau de dreptele $x = x_0$, $y = y_0$.

Formulele sînt exacte pentru funcţii de forma

$$f(x, y) = A(x)y + B(y)x + A_1(x) + B_1(y),$$

unde $A(x)$, $B(y)$, $A_1(x)$, $B_1(y)$ sînt polinoame de gradul al treilea.

La fiecare formulă s-a dat şi evaluarea restului. Dacă notăm

$$M_{40} = \sup_{(D)} \left|\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right|, \quad M_{04} = \sup_{(D)} \left|\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\right|$$

avem

$$M_{40}[m, y_j] \leqslant M_{40}, \qquad M_{04}[x_i, n] \leqslant M_{04}$$

şi restul oricărei formule de cubatură dată mai sus, este evaluat în modul următor:

$$|R| \leqslant \frac{hk}{44}[a\, h^2k^2 M_{22} + bh^4 M_{40} + ck^4 M_{04}],$$

unde a, b, c sînt coeficienţi numerici care depind de procedeul de obţinere a formulei de cubatură.

Cînd s-a împărţit dreptunghiul D în 4, 9, 16 dreptunghiuri egale, s-au obţinut formulele (63), (90), (108), pentru care coeficienţii a, b, c sînt daţi în tabloul următor.

Formula	a	$b = c$
(63)	$\frac{5}{16} = 0{,}3125$	$\frac{7}{8} = 0{,}875$
(90)	$\frac{5}{81} < 0{,}0618$	$\frac{7}{18} < 0{,}395$
(108)	$\frac{5}{256} < 0{,}0196$	$\frac{103}{512} < 0{,}202$

Din acest tablou se vede că formulele devin din ce în ce mai practice, coeficienţii a, b, c descrescînd.

НЕСКОЛЬКО ПРАКТИЧНЫХ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В одной из недавних работ, автор вывел формулу кубатуры (1). Применяя квадратурную формулу Симпсона и формулы квадратуры (4), (10), (16), автор вывел в этой работе практические кубатурные формулы, которыми являются формулы (63), (90), (108) и дал их остатки.

QUELQUES FORMULES PRATIQUES DE CUBATURE

RÉSUMÉ

Dans un recent travail [1], nous avons établi la formule de cubature (1). En appliquant la formule de quadrature de Simpson ainsi que les formules de quadrature (4), (10) et (16), nous avons déduit dans ce travail des formules pratiques de cubature, comme les formules (63), (90), (108), et nous avons donné leurs restes.

BIBLIOGRAFIE

1. Ionescu D. V., *Despre o formulă de cubatură.* Studia Universitatis Babeş-Bolyai (sub tipar).
2. — *Cuadraturi numerice.* Editura Tehnică, Bucureşti, 1957.

Primit la 1. VI. 1962.