UN PROCEDEU DE ÎMBUNĂTĂŢIRE A CONVERGENŢEI SERIILOR ŞI A CONVERGENŢEI INTEGRALELOR IMPROPRII

DE

ANDREI NEY

(Cluj)

Transformarea lui Kummer (vezi [1], §35, p, 269—271) ce se utilizează în scopul îmbunătăţirii convergenţei unei serii (seria de însumat), se poate aplica iterat ([3], cap. I, §5). Aplicarea succesivă, de p ori, a transformării lui Kummer presupune cunoaşterea a p serii convergente (serii aproximante), cu sumele lor respective exact calculabile sau cel puţin foarte bine aproximabile cu ajutorul unui procedeu simplu. Procedeul de îmbunătăţire a convergenţei ce se prezintă în lucrarea de faţă, se bazează pe o singură serie aproximantă şi pe un număr convenabil de parametri ale căror valori se determină astfel, ca o singură aplicare a transformării lui Kummer să înlocuiască iterarea ei.

1.

Fie seria de însumat

$$\sum_1^\infty u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{1}$$

o serie convergentă, cu termeni pozitivi. Fie seria aproximantă

$$\sum_1^\infty v_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots = s, \tag{2}$$

unde s este cunoscut, iar $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n} = 1$. În conformitate cu [1] avem

$$\sum_1^\infty u_n = s + \sum_1^\infty (u_n - v_n) = s + \sum_1^\infty \left(1 - \frac{v_n}{u_n}\right) u_n \tag{3}$$

unde $u_n - v_n$ tinde evident mai repede către zero, decît u_n; totodată seria $\sum_1^\infty (u_n - v_n)$ converge mai repede decît seria $\sum_1^\infty u_n$ [1]).

Pentru a se putea aplica procedeul ce urmează a fi expus, se presupune — pentru moment — că are loc relația la limită $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ (ulterior această restricție se va înlocui cu alta mai generală), deci şi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = 1$ [2]), de unde rezultă că au loc şi relațiile la limită

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_{n+i}}{u_n} = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Într-adevăr

$$\frac{v_{n+i}}{u_n} = \frac{v_{n+i}}{v_{n+i-1}} \cdots \frac{v_{n+1}}{v_n} \cdot \frac{v_n}{u_n},$$

de unde

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_{n+i}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{v_{n+i}}{v_{n+i-1}} \cdots \lim_{n\to\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} \cdot \lim \frac{v_n}{u_n} = 1.$$

Considerăm parametrii reali $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_p$ şi construim seria cu termenul general

$$w_n = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i v_{n+i} \text{ [3])}.$$

---

1) Fie R_n restul seriei (1), R_n' restul seriei $\sum_1^\infty (u_n - v_n)$, iar R_n'' restul seriei $\sum_1^\infty |u_n - v_n|$. Această din urmă serie este evident convergentă, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|u_n - v_n|}{u_n} = 0$. Atunci în baza unui rezultat stabilit în lucrarea [5], § 8, p. 277, au loc relațiile $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{R_n''}{R_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|u_n - v_n|}{u_n} = 0$. Dar $\left|\frac{R_n'}{R_n}\right| \leqslant \frac{R_n''}{R_n}$, deci şi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{R_n'}{R_n} = 0$.

2) Condiția $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = 1$ este echivalentă cu condiția $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n} = 1$; într-adevăr $= \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1}}{u_n} \cdot \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} \cdot \frac{u_n}{v_n}$, de unde, pentru $n \to \infty$, rezultă afirmația de mai sus.

3) Se presupune, că termenii succesivi $v_n, v_{n+1}, \ldots, v_{n+p}$ nu sînt legați prin vreo relație de recurență liniară, cel puțin începînd de la un indice n suficient de mare; astfel fiecare parametu $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_p$ va figura efectiv în expresia lui w_n.

Pentru ca această serie să fie o serie aproximantă relativ la seria $\sum_1^\infty u_n$, este suficient să determinăm parametrii $\{\lambda_i\}$ astfel, ca să aibă loc relația $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{w_n}{u_n} = 1$, deci $\sum\limits_{i=0}^{p} \lambda_i \lim\limits_{n\to\infty} \frac{v_{n+i}}{u_n} = 1$, de unde rezultă

$$\sum_{i=0}^{p} \lambda_i = 1. \tag{4}$$

Suma S a seriei cu termenul general w_n se poate exprima în formă finită,

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} w_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{p} \lambda_i v_{n+i} = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i \sum_{n=1}^{\infty} v_{n+i} = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i (s - s_i),$$

unde $s_i = \sum\limits_{k=1}^{i} v_k$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$, iar $s_0 = 0$. În aceste condiții transformarea lui Kummer ne conduce la

$$\sum_1^\infty u_n = S + \sum_1^\infty (u_n - w_n) = S + \sum_1^\infty \left(u_n - \sum_{i=0}^{p} \lambda_i v_{n+i}\right). \tag{5}$$

Vom căuta să determinăm parametrii $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_p$ astfel ca diferința $u_n - w_n$ să tindă din ce în ce mai repede către zero, pe măsură ce creşte numărul de parametri utilizați. Din (4) rezultă $\lambda_0 = 1 - \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i$, astfel încît

$$u_n - w_n = u_n - \left(1 - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\right) v_n - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_{n+i} = u_n - v_n + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_n - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_{n+i},$$

adică

$$u_n - w_n = (u_n - v_n)\left[1 + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \frac{v_n - v_{n+i}}{u_n - v_n}\right]$$

deci

$$u_n - w_n = (u_n - v_n)\left[1 + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \sum_{k=1}^{i} \frac{v_{n+k-1} - v_{n+k}}{u_n - v_n}\right]. \tag{6}$$

Presupunem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_{n+k-1} - v_{n+k}}{u_n - v_n} = c_k^{(1)} \quad (k = 1, 2, \ldots, p), \tag{7}$$

unde $c_k^{(1)}$ $(k = 1, 2, \ldots, p)$ sînt numere reale, iar $c_1^{(1)} \neq 0$, astfel

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \sum_{k=1}^{i} \frac{v_{n+k-1} - v_{n+k}}{u_n - v_n} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \sum_{k=1}^{i} c_k^{(1)}$$

Pentru parametrii $\lambda_1, \lambda_2,\dots,\lambda_p$ se pune condiţia

$$\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\sum_{k=1}^{i}c_k^{(1)}=-1 \tag{8}$$

şi transformarea (5) a lui Kummer ia forma

$$\sum_1^{\infty} u_n = S+\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-v_n)\left[1+\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\sum_{k=1}^{i}\frac{v_{n+k-1}-v_{n+k}}{u_n-v_n}\right]. \tag{9}$$

Din cauza condiţiei (8), termenul general al seriei din membrul al doilea al egalităţii (9) tinde mai repede către zero decît termenul general $u_n - v_n$ din transformarea originală (3), deoarece şi expresia din paranteza dreaptă din relaţia (9) tinde către zero cînd $n\to\infty$. Din (8) rezultă

$$\lambda_1=\frac{1}{c_1^{(1)}}\left(-1-\sum_{i=2}^{p}\lambda_i\sum_{k=1}^{i} c_k^{(1)}\right).$$

Introducînd această valoare în (6), adică în expresia termenului general al seriei care figurează în membrul drept al egalităţii (9), se obţine

$$u_n-w_n=(u_n-v_n)\left[1+\frac{1}{c_1^{(1)}}\left(-1-\sum_{i=2}^{p}\lambda_i\sum_{k=1}^{i} c_k^{(1)}\right)\frac{v_n-v_{n+1}}{u_n-v_n}+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=2}^{p}\lambda_i\sum_{k=1}^{i}\frac{v_{n+k-1}-v_{n+k}}{u_n-v_n}\right],$$

adică

$$u_n-w_n=\left[u_n-v_n-\frac{1}{c_1^{(1)}}(v_n-v_{n+1})\right]\left[1+\sum_{i=2}^{p}\lambda_i\sum_{k=2}^{i}\frac{v_{n-k-1}-v_{n+k}-\dfrac{c_k^{(1)}}{c_1^{(1)}}(v_n-v_{n+1})}{u_n-v_n-\dfrac{1}{c_1^{(1)}}(v_n-v_{n+1})}\right] \tag{10}$$

iar după o aranjare convenabilă

$$u_n-w_n=(u_n-v_n)\left(1-\frac{1}{c_1^{(1)}}\frac{v_n-v_{n+1}}{u_n-v_n}\right)\left[1+\sum_{i=2}^{p}\lambda_i\sum_{k=2}^{i}\frac{v_{n+k-1}-v_{n+k}-\dfrac{c_k^{(1)}}{c_1^{(1)}}(v_n-v_{n+1})}{u_n-v_n-\dfrac{1}{c_1^{(1)}}(v_n-v_{n+1})}\right]. \tag{11}$$

Dacă se presupune acum că

$$\lim_{n\to\infty}\frac{v_{n+k-1}-v_{n+k}-\dfrac{c_k^{(1)}}{c_1^{(1)}}(v_n-v_{n+1})}{u_n-v_n-\dfrac{1}{c_1^{(1)}}(v_n-v_{n+1})}=c_k^{(2)}\quad (k=2,3,\dots,p), \tag{12}$$

unde $c_k^{(2)}$ $(k=2,3,\dots,p)$ sînt numere reale, iar $c_2^{(2)}\neq 0$, atunci suma dublă din (11) va avea limita

$$\sum_{i=2}^{p}\lambda_i\sum_{k=2}^{i}c_k^{(2)}.$$

Pentru parametrii $\lambda_2, \lambda_3,\dots,\lambda_p$ se pune condiţia

$$\sum_{i=2}^{p}\lambda_i\sum_{k=2}^{i}c_k^{(2)}=-1 \tag{13}$$

şi în consecinţă al treilea factor, cel din paranteza dreaptă a membrului drept al egalităţii (11) tinde către zero, cînd $n\to\infty$. Transformarea (5) a lui Kummer ia în consecinţă forma

$$\sum_1^{\infty}u_n=S+\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-v_n)\left(1-\frac{1}{c_1^{(1)}}\frac{v_n-v_{n+1}}{u_n-v_n}\right)\left[1+\sum_{i=2}^{p}\lambda_i\sum_{k=2}^{i}\frac{v_{n+k-1}-v_{n+k}-\dfrac{c_k^{(1)}}{c_1^{(1)}}(v_n-v_{n+1})}{u_n-v_n-\dfrac{1}{c_1^{(1)}}(v_n-v_{n+1})}\right] \tag{14}$$

Dacă se compară termenul general al seriei din membru drept al transformării (9) — acesta fiind chiar expresia din membrul drept al egalităţii (11) — cu termenul general al seriei din membrul drept al transformării (14), se constată că acesta din urmă tinde mai repede către zero decît primul, din cauza condiţiei (13).

Observînd structura expresiilor din membrul drept al egalităţilor (6) şi (10), raţionamentul se continuă prin inducţie, considerîndu-se termenul general u_n-w_n al seriei obţinute în urma unei singure aplicări a transformării lui Kummer şi după impunerea condiţiei (4) şi a $j-1$ condiţii de tipul (8) şi (13), ca fiind de forma

$$u_n-w_n=h_n\left[1+\sum_{i=j}^{p}\lambda_i\sum_{k=j}^{i}\frac{\psi_{n,k}}{\varphi_n}\right], \tag{15}$$

unde

$$\lim_{n\to\infty}h_n=0,\quad \lim_{n\to\infty}\varphi_n=0,\quad \lim_{n\to\infty}\psi_{n,k}=0.$$

Presupunem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\psi_{n,k}}{\varphi_n}=c_k^{(j)}\quad (k=j,\ j+1,\ \dots,\ p), \tag{16}$$

unde $c_k^{(j)}$ $(k=j,\ j+1,\dots,p)$ sînt numere reale, iar $c_j^{(j)}\neq 0$, şi impunem condiţia

$$\sum_{i=j}^{p}\lambda_i\sum_{k=j}^{i}c_k^{(j)}=-1. \tag{17}$$

În aceste condiţii

$$\lim_{n\to\infty}\left[1+\sum_{i=j}^{p}\lambda_i\sum_{k=j}^{i}\frac{\psi_{n,k}}{\varphi_n}\right]=0,$$

deci se ajunge la accelerarea tinderii către zero a diferenţei $u_n - w_n$, pentru $n\to\infty$. În continuare, din (17) se obţine

$$\lambda_j=\frac{1}{c_j^{(j)}}\left(-1-\sum_{i=j+1}^{p}\lambda_i\sum_{k=j}^{i}c_k^{(j)}\right)$$

şi înlocuind această valoare în (15), se obţine

$$u_n - w_n = h_n\left[1-\frac{1}{c_j^{(j)}}\frac{\psi_{n,j}}{\varphi_n}+\sum_{i=j+1}^{p}\lambda_i\sum_{k=j}^{i}\left(\frac{\psi_{n,k}}{\varphi_n}-\frac{c_k^{(j)}}{c_j^{(j)}}\frac{\psi_{n,j}}{\varphi_n}\right)\right],$$

adică

$$u_n - w_n = h_n\left[1-\frac{1}{c_j^{(j)}}\frac{\psi_{n,j}}{\varphi_n}+\sum_{i=j+1}^{p}\lambda_i\sum_{k=j+1}^{i}\left(\frac{\psi_{n,k}}{\varphi_n}-\frac{c_k^{(j)}}{c_j^{(j)}}\frac{\psi_{n,j}}{\varphi_n}\right)\right].$$

Această din urmă egalitate se pune sub forma

$$u_n - w_n = h_n\left(1-\frac{1}{c_j^{(j)}}\frac{\psi_{n,j}}{\varphi_n}\right)\left[1+\sum_{i=j+1}^{p}\lambda_i\sum_{k=j+1}^{i}\frac{\psi_{n,k}-\frac{c_k^{(j)}}{c_j^{(j)}}\psi_{n,j}}{\varphi_n-\frac{1}{c_j^{(j)}}\psi_{n,j}}\right]$$

şi se continuă ca mai sus, presupunînd condiţiile

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\psi_{n,k}-\frac{c_k^{(j)}}{c_j^{(j)}}\psi_{n,j}}{\varphi-\frac{1}{c_j^{(j)}}\psi_{n,j}}=c_k^{(j+1)}\qquad(k=j+1,\ j+2,\ \ldots,\ p)$$

şi $c_{j+1}^{(j+1)}\neq 0$, pînă cînd se ajunge la ultima condiţie de tipul (16), care se presupune îndeplinită — şi anume existenţa numărului real $c_p^{(p)}\neq 0$, urmînd să se impună parametrului λ_p o condiţie de tipul (17) şi anume

$$\lambda_p\, c_p^{(p)} = -1.$$

Dacă toate condiţiile de tipul (16) respectiv (17), care figurează mai sus, sînt îndeplinite, atunci parametrii $\lambda_0,\ \lambda_1,\ldots,\lambda_p$ pot fi supuşi condiţiilor exprimate de sistemul linear

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{p}\lambda_i = 1\\
&\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\sum_{k=1}^{i}c_k^{(1)} = -1\\
&\sum_{i=2}^{p}\lambda_i\sum_{k=2}^{i}c_k^{(2)} = -1\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\sum_{i=p}^{p}\lambda_i\sum_{k=p}^{i}c_k^{(p)} = -1
\end{aligned}\right\}\qquad(18)$$

Condiţia necesară şi suficientă pentru ca sistemul (18) să aibă o soluţie unic determinată, este ca determinantul sistemului să fie nenul, adică

$$\Delta=\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1\\
0 & \sum_1^1 c_k^{(1)} & \sum_1^2 c_k^{(1)} & \sum_1^3 c_k^{(1)} & \ldots & \sum_1^p c_k^{(1)}\\
0 & 0 & \sum_2^2 c_k^{(2)} & \sum_2^3 c_k^{(2)} & \ldots & \sum_2^p c_k^{(2)}\\
0 & 0 & 0 & \sum_3^3 c_k^{(3)} & \ldots & \sum_3^p c_k^{(3)}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
0 & 0 & 0 & 0 & & \sum_{k=p}^{p} c_k^{(p)}
\end{vmatrix} = c_1^{(1)}c_2^{(2)}\,..\,c_p^{(p)}\neq 0.$$

Pentru aceasta este necesar şi suficient ca nici unul din numerele $c_j^{(j)}$ $(j = 1,\ 2,\ldots,p)$ să nu fie nul.

În baza celor de mai sus, se formulează următorul

PROCEDEU DE ÎMBUNĂTĂŢIRE A CONVERGENŢEI SERIILOR. *În vederea calculului sumei seriei convergente şi cu termeni pozitivi,* $\sum_1^\infty u_n$, *se caută o serie,* $\sum_1^\infty v_n$, *cu suma cunoscută şi care îndeplineşte condiţia* $\lim_{n\to\infty}\frac{v_n}{u_n}=1$. *Presupunînd că seria* $\sum_1^\infty u_n$ *are proprietatea* $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$ (a se vedea nota[2]), *se construieşte seria cu termenul general* $w_n=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_i v_{n+i}$; *termenii* $v_n, \ldots, v_{n+p}$, *conform precizării făcute în nota* [3]), *nefiind linear dependenţi iar* $\lambda_0,\ \lambda_1,\ldots,\lambda_p$

fiind parametri reali, care satisfac condiția $\sum_{i=0}^{p} \lambda_i = 1$, *va avea loc și relația la limită* $\lim_{n\to\infty} \frac{w_n}{u_n} = 1$. *Dacă seria* $\sum_{1}^{\infty} v_n$ *satisface condiții de tipul* (16) (pentru $j = 1, 2, \ldots, p$), *atunci parametrilor* $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_p$ *li se pot impune condițiile* (18), *care îi determină în mod unic, dacă toate numerele* $c_j^{(i)}$ $(j = 1, 2, \ldots, p)$ *care figurează în condițiile de tipul* (16) *sînt nenule. În condițiile mai sus enumerate i se aplică seriei* $\sum_{1}^{\infty} u_n$ *o singură dată transformarea lui Kummer și anume*

$$\sum_{1}^{\infty} u_n = \sum_{1}^{\infty} w_n + \sum_{1}^{\infty} (u_n - w_n),$$

unde $\sum_{1}^{\infty} w_n$ *se calculează cu formula* $\sum_{1}^{\infty} w_n = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i \sum_{n=1}^{\infty} v_{n+i}$, *iar rapiditatea de convergență a seriei* $\sum_{1}^{\infty} (u_n - w_n)$ *crește odată cu creșterea numărului* $p + 1$ *al parametrilor* $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_p$, *utilizați la construirea seriei* $\sum_{1}^{\infty} w_n$. *Menționăm că* $p = 0$ *coincide cu cazul simplu* (3) *al aplicării transformării lui Kummer.*

Observația 1. Restricția $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ se poate înlocui cu $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ $(0 < l \leqslant 1)$; atunci în baza relației $\lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n} = 1$ vom avea și $\lim_{n\to\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = l$. În acest caz, condiția $\sum_{i=0}^{p} \lambda_i = 1$, care s-a obținut din trecere la limită pentru $n \to \infty$ în relația $\frac{w_n}{u_n} = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i \frac{v_{n+i}}{u_n}$, se înlocuiește prin $\sum_{i=0}^{p} \lambda_i \; l^i = 1$, deoarece $\frac{w_n}{u_n} = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i \frac{v_{n+i}}{u_{n+i}} \cdot \frac{u_{n+i}}{u_{n+i-1}} \cdots \frac{u_{n+1}}{u_n}$. În relațiile din sistemul (18) vor figura de asemenea puteri calculabile ale lui l.

2.

Aplicarea în practică a ideii fundamentale dezvoltate în § 1 este deosebit de simplă în cazul în care termenul general al seriei de însumat, (1), este o fracție rațională de n, deci $u_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$, $P(n)$ și $Q(n)$ fiind polinoame definite pe valorile întregi și pozitive ale lui n, începînd cu valoarea pentru care numitorul $Q(n)$ nu se mai anulează. Considerînd astfel seria convergentă

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} u_n = \frac{P(n_0+1)}{Q(n_0+1)} + \frac{P(n_0+2)}{Q(n_0+2)} + \ldots + \frac{P(n)}{Q(n)} + \ldots, \tag{19}$$

aceasta va avea, începînd de la un indice suficient de mare, toți termenii definiți și de același semn, deci prin scoaterea convenabilă în factor comun a semnului termenilor seriei, seria în cauză poate fi considerată cu toți termenii pozitivi pentru $n > n_0$. Pentru seria (19) are loc, evident, relația la limită $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$. Seriei (19) i se atașează seria

$$\sum_{n_0+1}^{\infty} v_n = \sum_{n_0+1}^{\infty} \frac{a}{n(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)}, \tag{20}$$

unde k este egal cu diferența între gradul polinomului $Q(n)$ și cel al polinomului $P(n)$, iar a se alege astfel, ca să aibă loc relația la limită $\lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n} = 1$. Suma seriei (20) se calculează cu ajutorul formulei bine cunoscute

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)\ldots(n+k-1)} = \frac{1}{k-1} \cdot \frac{1}{(k-1)!}. \tag{21}$$

Se construiește seria aproximantă, cu termenul general

$$w_n = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_{n+i} \tag{22}$$

și se pune condiția

$$\lim_{n\to\infty} \frac{w_n}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \frac{v_{n+i}}{u_n} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1.$$

Se aplică transformarea lui Kummer

$$\sum_{n_0+1}^{\infty} u_n = \sum_{n_0+1}^{\infty} w_n + \sum_{n_0+1}^{\infty} (u_n - w_n)$$

și se determină parametrii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ astfel, ca diferența $u_n - w_n$ să tindă către zero cît mai repede posibil. Notînd gradul polinomului $P(n)$ cu α și cel al polinomului $Q(n)$ cu β, relația dintre ele se exprimă prin $\beta - \alpha = k \geqslant 2$ (deoarece seria (19) este convergentă). Aducem la același numitor fracțiile care formează diferența $u_n - w_n$, adică

$$\frac{P(n)}{Q(n)} - a \sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i}{(n+i)(n+i+1)\ldots(n+i+k-1)}.$$

Considerînd drept numitor comun, produsul

$$Q(n) \cdot (n+1)(n+2)\ldots(n+p+k-1),$$

acesta va fi de gradul $\beta + p + k - 1$. În expresia numărătorului, coeficientul lui $n^{\beta+p-1}$ este nul, deoarece $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$. Astfel parametrilor $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$

li se pot impune încă $p-1$ condiţii (acestea vor fi toate ecuaţii liniare în $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$), pentru a suprima termenii de gradele $\beta+p-2$, $\beta+p-3, \ldots, \beta$ şi astfel la numărător vom avea un polinom de gradul $\beta-1$. Diferenţa dintre gradul numitorului şi gradul numărătorului fracţiei astfel obţinută va fi $(\beta+p+k-1)-(\beta-1)=p+k$. În consecinţă : dacă se pune problema ca seria cu termenul general $u_n=\frac{P(n)}{Q(n)}$, avînd ordinul infinitezimal k, pentru $n\to\infty$ să fie înlocuită în procesul însumării cu o serie al cărui termen general să aibă ordinul infinitezimal egal cu $k+p$, atunci în loc de p iterări ale transformării lui Kummer este suficient să se determine cei p parametri, care figurează în (22) — prin rezolvarea unui sistem linear de p ecuaţii cu p necunoscute — şi să se aplice o singură dată transformarea lui Kummer. Se constată uşor că parametrii astfel determinaţi formează soluţia problemei de cea mai bună aproximaţie a lui u_n prin w_n, în sensul notei 4.

Observaţia 2. În [8] p. 66–69, se expune metoda elaborată de G. S. Salehov şi A. N. Hovanski, privind îmbunătăţirea convergenţei unei serii cu termenul general a_n tinzînd descrescător către zero, dacă a_n poate fi obţinut dintr-o funcţie monotonă şi continuă $a(x)$, în baza egalităţii $a_n=a(n)$. Referitor la funcţia $a(x)$, se presupune convergenţa integralei $\int_\alpha^\infty a(x)dx$ şi în plus cunoaşterea integralei $\int_n^{n+1} a(x)dx$ ca o funcţie efectiv dată de n. Metoda lui Salehov-Hovanski presupune de asemenea şi un număr finit de parametri, care figurează linear în transformarea dată de autorii citaţi şi care se determină recurgîndu-se la formulele de cuadratură numerică ale analizei. Aplicaţiile pe care autorii le prezintă în cartea citată se referă la serii avînd drept termeni generali, fracţii raţionale de n. Astfel îmbunătăţirea convergenţei este legată de precizia metodei de cuadratură. Procedeul expus în lucrarea noastră permite o mărire sistematică a rapidităţii de convergenţă, prin mărirea numărului de parametri utilizaţi, iar în cazul seriilor ce se înglobează în condiţiile din § 2 al prezentei lucrări, se poate atinge rapiditatea de convergenţă dinainte fixată.

Exemplu 1. Fie de calculat $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$. Să se aplice o transformare astfel ca seria rezultată să aibă termenul general de ordinul lui $\frac{1}{n^5}$.

Se vor utiliza 3 parametri, cu ajutorul cărora se formează seria aproximantă cu termenul general

$$w_n=\frac{\lambda_1}{n(n+1)}+\frac{\lambda_2}{(n+1)(n+2)}+\frac{\lambda_3}{(n+2)(n+3)}.$$

[4]) Problema pusă are şi un aspect de problemă de cea mai bună aproximaţie, căutîndu-se parametrii $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_p$, astfel, ca diferenţa u_n-w_n să tindă cel mai repede posibil către zero, cînd $n\to\infty$.

Aducînd fracţiile la acelaşi numitor, se obţine

$$w_n=\frac{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)n^2+(5\lambda_1+3\lambda_2+\lambda_3)n+6\lambda_1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Punînd $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$ şi calculînd diferenţa $\frac{1}{n^2}-w_n$, se obţine

$$\frac{1}{n^2}-w_n=\frac{-(5\lambda_1+3\lambda_2+\lambda_3-6)n^2-(6\lambda_1-11)+6}{n^2(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Se pun condiţiile

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3&=1\\ 5\lambda_1+3\lambda_2+\lambda_3&=6\\ 6\lambda_1\qquad\quad&=11\end{aligned}\right\}$$

de unde se obţine $\lambda_1=\frac{11}{6}$; $\lambda_2=-\frac{7}{6}$; $\lambda_3=\frac{1}{3}$. Ca urmare,

$$\sum_1^\infty\frac{1}{n^2}=\frac{11}{6}\underbrace{\sum_1^\infty\frac{1}{n(n+1)}}_{=1}-\frac{7}{6}\underbrace{\sum_1^\infty\frac{1}{(n+1)(n+2)}}_{=\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}\underbrace{\sum_1^\infty\frac{1}{(n+2)(n+3)}}_{=\frac{1}{3}}+$$
$$+6\sum_1^\infty\frac{1}{n^2(n+1)(n+2)(n+3)},$$

adică

$$\sum_1^\infty\frac{1}{n^2}=\frac{49}{36}+6\sum_1^\infty\frac{1}{n^2(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

3.

Noţiunile : „rapiditatea convergenţei" şi „îmbunătăţirea convergenţei" cunoscute din teoria seriilor, se pot extinde şi asupra integralelor improprii. În acest paragraf se va trata cazul integralei convergente, cu limita superioară infinită (la care se reduce şi cazul integralei unei funcţii nemărginite în vecinătatea uneia din limitele finite ale integralei).

Fie

$$\int_a^\infty f(x)dx<+\infty \quad (0<f(x)<K). \tag{23}$$

DEFINIȚIA 1. [5] *Restul $R(x)$ al integralei* (23) *se definește prin egalitatea*

$$R(x)=\int_x^{\infty} f(x)dx \quad (x \geqslant a). \tag{24}$$

Restul astfel definit are proprietățile [6]

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to\infty} R(x)=0 \\ &\frac{R'(x)}{f(x)}=-1 \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

DEFINIȚIA 2. *Rapiditatea de convergență a integralei* (23) *este ordinul infinitezimal al restului $R(x)$, cînd $x \to \infty$* [7].

DEFINIȚIA 3. *Integrala*

$$\int_a^{\infty} g(x)dx < +\infty \quad (0 < g(x) < K) \tag{26}$$

converge la fel de repede (sau de încet) *ca și integrala* (23), *dacă au loc inegalitățile*

$$A < \frac{\int_x^{\infty} f(u)du}{\int_x^{\infty} g(u)du} < B \quad (x \geqslant a), \tag{27}$$

unde A și B sînt numere pozitive.

DEFINIȚIA 4. *Integrala* (23) *converge mai repede decît integrala* (26) *dacă*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int_x^{\infty} f(u)du}{\int_x^{\infty} g(u)du} = 0, \tag{28}$$

Funcțiile $f(x)$ și $g(x)$ fiind pozitive, se demonstrează cu ușurință două teoreme analoage cu cele cunoscute pentru serii, [5], și anume :

[5]) A se vedea nota 9.
[6]) A se vedea lucrarea [3] și nota 9 din prezenta lucrare.
[7]) O definiție mai cuprinzătoare se poate enunța în analogie cu definiția 4 dată în lucrarea [3].

TEOREMA 1. *Dacă pentru funcțiile pozitive $f(x)$ și $g(x)$ au loc inegalitățile*

$$\alpha < \frac{f(x)}{g(x)} < \beta \quad (x \geqslant a), \ (\alpha, \beta \text{ . numere pozitive}), \tag{29}$$

iar integralele (23) *și* (26) *sînt convergente, atunci au loc și inegalitățile*

$$\alpha \leqslant \frac{\int_x^{\infty} f(u)du}{\int_x^{\infty} g(u)du} \leqslant \beta \quad (x \geqslant a), \tag{30}$$

adică integralele în cauză converg la fel de repede.

Demonstrație. Din (29) rezultă $\alpha \cdot g(x) < f(x) < \beta \cdot g(x)$, de unde

$$\alpha \int_x^{\infty} g(u)du \leqslant \int_x^{\infty} f(u)du \leqslant \beta \int_x^{\infty} g(u)du$$

și prin urmare inegalitățile (30) sînt valabile.

TEOREMA 2. *Dacă pentru funcțiile pozitive $f(x)$ și $g(x)$ are loc relația la limită*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0, \tag{31}$$

iar integralele (23) *și* (26) *sînt convergente, atunci are loc și relația la limită*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int_x^{\infty} f(u)du}{\int_x^{\infty} g(u)du} = 0 \tag{32}$$

adică integrala (23) *converge mai repede decît integrala* (26).

Demonstrație. Relația (31) se mai scrie

$$0 < \frac{f(x)}{g(x)} < \varepsilon \quad (x > X_{\varepsilon} \geqslant a)$$

ε fiind un număr arbitrar de mic, de unde $f(x) < \varepsilon \cdot g(x)$, iar prin integrare

$$\int_x^{\infty} f(u)du \leqslant \varepsilon \int_x^{\infty} g(u)du,$$

adică

$$\frac{\int_x^\infty f(u)du}{\int_x^\infty g(u)du} \leqslant \varepsilon \quad (x > X_\varepsilon),$$

ceea ce este o altă formă de exprimare pentru relația (32).

Transformarea lui Kummer aplicată la integrale. Fie integralele convergente (23) și (26). Presupunem că cele două funcții $f(x)$ și $g(x)$ sînt asimptotic egale, adică

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)} = 1. \tag{33}$$

Din egalitatea evidentă

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx + \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

rezultă, pentru $b \to \infty$, în baza convergenței integralelor (23) și (26), egalitatea

$$\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^\infty g(x)dx + \int_a^\infty [f(x) - g(x)]dx.$$

Dacă valoarea integralei (26) se cunoaște și se notează cu s, se va putea scrie

$$\int_a^\infty f(x)dx = s + \int_a^\infty [f(x) - g(x)]dx = s + \int_a^\infty \left[1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right] f(x)dx. \tag{34}$$

În baza lui (33) are loc relația

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left[1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right] f(x)}{f(x)} = 0,$$

iar conform unui raționament întru totul analog celui din nota [1]) pag. 112 a lucrării de față, putem enunța că $\int_a^\infty [f(x) - g(x)]dx$ converge mai repede decît integrala $\int_a^\infty f(x)dx$.

Transformarea lui Kummer se poate aplica integralei (23), pornind și de la o expresie asimptotică [8]), $\mathcal{R}(x)$, a restului acestei integrale. $\mathcal{R}(x)$ se bucură de proprietățile

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to\infty}\mathcal{R}(x) = 0 \\ &\frac{\mathcal{R}'(x)}{f(x)} = -1 + \omega(x); \ \lim_{x\to\infty}\omega(x) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

De aici $\mathcal{R}'(x) = -f(x) + \omega(x)f(x)$, iar prin integrare

$$\int_x^\infty \mathcal{R}'(u)du = -\int_x^\infty f(u)du + \int_x^\infty \omega(u)f(u)du. \tag{36}$$

Efectuîndu-se integrarea în membrul stîng al egalității (36) și înlocuind în (36) prima integrală din membrul drept cu notația echivalentă $R(x)$, iar în locul lui $\omega(u)$ scriind $1 + \frac{\mathcal{R}'(u)}{f(u)}$, în baza relației (35), se obține

$$R(x) = \mathcal{R}(x) + \int_x^\infty \left[1 + \frac{\mathcal{R}'(u)}{f(u)}\right] f(u)du. \tag{37}$$

Dacă în (37) se pune $x = a$, va rezulta

$$R(a) = \int_a^\infty f(x)dx = \mathcal{R}(a) + \int_a^\infty \left[1 + \frac{\mathcal{R}'(x)}{f(x)}\right] f(x)dx. \tag{38}$$

Utilizînd o formulă asimptotică pentru rest, provenită din extinderea aplicabilității criteriului lui Kummer la integrale improprii [9]), și anume

$$\mathcal{R}(x) = \frac{\varphi(x)f(x) - \lim_{x\to\infty}\varphi(x)f(x)}{\eta}, \tag{39}$$

unde despre $f(x)$ se mai presupune și derivabilitatea pentru $x \geqslant a$ iar $\varphi(x)$ este o funcție pozitivă și derivabilă pentru $x \geqslant a$, astfel încît să fie satisfăcută relația la limită

$$\lim_{x\to\infty}\left[\varphi'(x) + \frac{\varphi(x)f'(x)}{f(x)}\right] = -\mu < 0, \tag{40}$$

---

[8]) $\mathcal{R}(x)$ este o expresie asimptotică a lui $R(x)$, dacă are loc relația $\lim_{x\to\infty}\frac{\mathcal{R}(x)}{R(x)} = 1$.

[9]) J. Krámli a arătat (1962), pornind de la definirea restului $R(x)$ și a celui asimptotic $\mathcal{R}(x)$, că criteriul lui Kummer pus sub o formă convenabilă, se poate extinde și la integrale improprii. Același autor a demonstrat și valabilitatea formulei (39) amintită în textul lucrării de față.

atunci egalitatea (38) ia forma

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \frac{\varphi(a)f(a) - \lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)f(x)}{\mu} + \int_a^{\infty}\left\{1 + \frac{1}{\mu}\frac{[\varphi(x)f(x)]'}{f(x)}\right\}f(x)dx \tag{41}$$

ceea ce constituie o transformare pentru integrala (23), corespunzătoare transformării lui Kummer pentru serii, în forma preconizată în [6].

Exemplul 2. Vom aplica formula (38) integralei euleriene de speța a doua

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1}e^{-x}\,dx \quad (s > 0). \tag{42}$$

Integrala în cauză se descompune într-o sumă de două integrale improprii:

$$\Gamma(s) = \Gamma_1(s) + \Gamma_2(s), \text{ unde } \Gamma_1(s) = \int_0^1 x^{s-1}e^{-x}dx \text{ iar } \Gamma_2(s) = \int_1^{\infty} x^{s-1}e^{-x}dx$$

Se aplică integralei $\Gamma_1(s)$ schimbarea de variabilă $x = \frac{1}{y}$ şi se obţine

$$\Gamma_1(s) = \int_1^{\infty}\frac{dy}{y^{1+s}e^{\frac{1}{y}}},$$

sau

$$\Gamma_1(s) = \int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{1+s}e^{\frac{1}{x}}}. \tag{43}$$

Totodată putem scrie

$$\Gamma_2(s) = \int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{1-s}e^{x}}. \tag{44}$$

În cele ce urmează, putem presupune că $0 < s \leqslant 1$, întrucît calculul funcţiei $\Gamma(s)$, pentru orice valoare a parametrului, mai mare ca unitatea, se reduce la calculul lui $\Gamma(s)$ pentru $0 < s \leqslant 1$.

Funcţiei $\frac{1}{x^{1+s}e^{\frac{1}{x}}}$ din (41) i se ataşează seria $u'_n = \frac{1}{n^{1+s}e^{\frac{1}{n}}}$, pentru care — în sensul lucrării [2] — se stabileşte restul asimptotic $\mathcal{R}'_n = \frac{1}{s\cdot n^s e^{\frac{1}{n}}}$; integralei (43) i se ataşează restul asimptotic

$$\mathcal{R}_1(x) = \frac{1}{s\cdot x^s e^{\frac{1}{x}}}, \tag{45}$$

care verifică condiţiile (35).

Funcţiei $\frac{1}{x^{1-s}e^{x}}$ din (44), i se ataşează seria $u''_n = \frac{1}{n^{1-s}e^{n}}$, căreia îi corespunde restul asimptotic $\mathcal{R}''_n = \frac{1}{(e-1)n^{1-s}e^{n}}$, de la care se ajunge la restul asimptotic

$$\mathcal{R}_2(x) = \frac{1}{x^{1-s}e^{x}}, \tag{46}$$

pentru integrala (44).

Aplicînd formula (38) integralei (43), se obţine

$$\Gamma_1(s) = \int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{1+s}e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{s\cdot e} + \frac{1}{s}\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{2+s}e^{\frac{1}{x}}}, \tag{47}$$

iar în cazul integralei (44), transformarea (38) ne conduce la

$$\Gamma_2(s) = \int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{1-s}e^{x}} = \frac{1}{e} - (1-s)\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{2-s}e^{x}}.\text{[10]} \tag{48}$$

---

[10]) Egalitatea (48) se poate obţine, de altfel, şi printr-o integrare prin părţi, aplicată expresiei $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{1-s}e^{x}}$. Această coincidenţă are următoarea explicaţie:

Dacă în formula (41) avem $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)f(x) = 0$ şi $\mu = 1$, ea va avea forma

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \varphi(a)f(a) + \int_a^{\infty}\left\{1 + \frac{[\varphi(x)f(x)]'}{f(x)}\right\}f(x)dx. \tag{41'}$$

Această din urmă relaţie se obţine şi din formula integrării prin părţi de tipul Stieltjes, şi anume

$$\int_a^b B(x)dA(x) = B(b)A(b) - B(a)A(a) - \int_a^b A(x)dB(x),$$

unde facem ca b să tindă către infinit. Într-adevăr, punînd $B(x) = f(x)$ şi $A(x) = -\varphi(x)$, rezultă

$$-\int_a^b f(x)\,\varphi'(x)\,dx = -\varphi(b)\,f(b) + \varphi(a)\,f(a) + \int_a^b \varphi(x)f'(x)dx,$$

respectiv

$$0 = -\varphi(b)f(b) + \varphi(a)f(a) + \int_a^b [\varphi(x)f'(x) + f'(x)\varphi'(x)]dx.$$

Transformările (47) și (48) au dus la îmbunătățirea convergenței integralelor (43) și (44). Integrala

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^{2-s}e^x} \quad (0 < s \leqslant 1)$$

poate fi considerată ca o integrală care converge suficient de repede, numitorul funcției de sub semnul integrală crescînd „repede" către $+\infty$ cînd $x \to \infty$. Funcția $\frac{1}{x^{2-s}e^x}$ fiind continuă și descrescătoare cînd $x \to \infty$, evaluarea restului integralei se face cu totul satisfăcător prin seria $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^{2-s}e^n}$ chiar pentru un n_0 relativ mic, de exemplu pentru $n_0 = 10$; evaluarea restului — asupra căruia nu insistăm aici — se face cu ajutorul criteriului integral al lui Cauchy.

Funcția $\Gamma_1(s)$ poate fi dezvoltată într-o serie de factoriali, care converge mai repede decît seria lui e. Într-adevăr, relația (47) se poate pune sub forma

$$\Gamma_1(s) = \frac{1}{s \cdot e} + \frac{1}{s}\Gamma_1(s+1),$$

ceea ce prin aplicare succesivă ne va da

$$\begin{aligned}\Gamma_1(s) = \frac{1}{es} + \frac{1}{es(s+1)} + \ldots + \frac{1}{es(s+1)\ldots(s+p-1)} + \\ + \frac{1}{s(s+1)\ldots(s+p-1)}\Gamma_1(s+p)\,,\end{aligned} \tag{49}$$

p fiind un număr natural. Dacă $p \to \infty$, se obține $\lim_{p\to\infty} \Gamma_1(x+p) = 0$, deoarece

$$\Gamma_1(s+p) = \int_1^\infty \frac{1}{x^{1+s+p}e^{\frac{1}{x}}} \leqslant \int_1^\infty \frac{dx}{x^{1+s+p}} = \frac{1}{s+p} \to 0 \quad (p \to \infty).$$

Astfel $\Gamma_1(s)$ admite dezvoltarea în serie

$$\Gamma_1(s) = \frac{1}{es}\left[1 + \frac{1}{1+s} + \frac{1}{(1+s)(2+s)} + \frac{1}{(1+s)(2+s)(3+s)} + \cdots\right] \tag{50}$$

Adunînd la fiecare membru al acestei din urmă egalități integrala $\int_a^b f(x)dx$, rezultă

$$\int_a^b f(x)dx = -\varphi(b)f(b) + \varphi(a)f(a) + \int_a^b \{f(x) + [\varphi(x)f(x)]'\}dx.$$

Dacă $b \to \infty$, se obține relația

$$\int_a^\infty f(x)dx = \varphi(a)f(a) + \int_a^b\left\{1 + \frac{[\varphi(x)f(x)]'}{f(x)}\right\}f(x)dx,$$

care coincide cu relația (41'). A se vedea o legătură analoagă pusă în evidență în lucrarea [4].

Comparînd termenul general al seriei din paranteza dreaptă a egalității (50) cu termenul general al seriei lui e, se obține, conform unei relații la limită bine cunoscute,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(1+s)(2+s)\ldots(n+s)}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n!\,n^s}{s(1+s)(2+s)\ldots(n+s)} \cdot \frac{s}{n^s}\right) =$$

$$= \Gamma(s) \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{s}{n^s} = 0$$

și prin urmare seria (50) converge mai repede decît seria lui e [11]).

4.

Îmbunătățirea rapidității convergenței integralei $\int_a^\infty f(x)dx$ rezolvă într-un anumit sens problema *cuadraturii numerice* a integralei considerate. Într-adevăr, ajungînd la o rapiditate de convergență practic satisfăcătoare pentru integrala (23), restul $R(x) = \int_x^\infty f(u)du$ va fi suficient de mic, chiar pentru un $x = x_0$ nu prea mare și atunci integrala (23) se poate aproxima efectuînd o cuadratură numerică pe intervalul finit $[a, x_0]$. Acest fapt justifică construirea unor procedee de îmbunătățire „considerabilă" a rapidității convergenței integralelor improprii.

În cele ce urmează, se va căuta să se adapteze ideea de bază din § 1 al prezentei lucrări, la problema îmbunătățirii convergenței integralelor de tipul (23).

Fie integralele (23) și (26) precum și relația $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Fie totodată [12])

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x+h)}{f(x)} = 1, \tag{51}$$

---

[11]) Se menționează că atît integrala, cît și seria care figurează în egalitatea

$$\Gamma(s) = \Gamma_1(s) + \Gamma_2(s) = \frac{1}{e \cdot s}\left[1 + \frac{1}{1+s} + \frac{1}{(1+s)(2+s)} + \ldots\right] +$$

$$+ \frac{1}{e} - (1-s)\int_1^\infty \frac{dx}{x^{2-s}e^x}$$

converg mai repede decît cele prezentate prin egalitatea nr. 6.314 din tabelele [7] p. 331.

[12]) A se vedea și nota 2.

cel puţin pentru o anumită valoare pozitivă a lui h. Astfel au loc şi relaţiile

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x+\nu h)}{f(x)} = 1 \quad (\nu \text{ număr natural arbitrar}) \tag{52}$$

şi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(x+\nu h)}{f(x)} = 1 \quad (\nu \text{ număr natural arbitrar}). \tag{53}$$

Valabilitatea relaţiilor (52) şi (53) rezultă din condiţia (51) şi din relaţiile ce se obţin în urma trecerii la limită pentru $x \to \infty$ în egalităţile

$$\frac{f(x+\nu h)}{f(x)} = \frac{f(x+\nu h)}{f[x+(\nu-1)h]} \cdot \frac{f[x+(\nu-1)h]}{f[x+(\nu-2)h]} \cdots \frac{f(x+h)}{f(x)}$$

şi

$$\frac{g(x+\nu h)}{f(x)} = \frac{g(x+\nu h)}{f(x+\nu h)} \cdot \frac{f(x+\nu h)}{f[x+(\nu-1)h]} \cdots \frac{f(x+h)}{f(x)}.$$

Utilizînd proprietăţile puse în evidenţă mai sus, formăm funcţia aproximantă

$$\gamma(x) = \sum_{\nu=0}^{p} \lambda_\nu \cdot g(x+\nu h), \tag{54}$$

unde $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sînt parametri cărora li se impune în primul rînd condiţia ca $\gamma(x)$ să fie asimptotic egală cu $f(x)$. Astfel $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\gamma(x)}{f(x)} = 1$ are loc dacă

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{\nu=0}^{p} \lambda_\nu \frac{g(x+\nu h)}{f(x)} = \sum_{\nu=0}^{p} \lambda_\nu = 1. \tag{55}$$

Din (55) se exprimă $\lambda_0 = 1 - \sum\limits_{\nu=1}^{p} \lambda_\nu$ şi ca urmare vom avea

$$f(x) - \gamma(x) = [f(x) - g(x)]\left\{1 + \sum_{\nu=1}^{p} \lambda \frac{g(x) - g(x+\nu h)}{f(x) - g(x)}\right\}.$$

Raţionamentul se poate continua întocmai ca şi în cazul seriilor (a se vedea § 1).

Exemplul 3. Vom aplica procedeul de mai sus integralei $\int\limits_1^\infty \frac{\cos^2 \frac{1}{x}}{(x+1)^2}\, dx$, în analogie cu cele constatate cu ocazia prezentării exemplului 1.

Se scrie

$$\int_1^\infty \frac{\cos^2 \frac{1}{x}}{(x+1)^2}\, dx = \int_1^{10} \frac{\cos^2 \frac{1}{x}}{(x+1)^2}\, dx + \int_{10}^\infty \frac{\cos^2 \frac{1}{x}}{(x+1)^2}\, dx; \tag{56}$$

prima integrală din membrul drept al egalităţii (56) se poate calcula cu o metodă de cuadratură numerică, iar integralei

$$\int_{10}^\infty \frac{\cos^2 \frac{1}{x}}{(x+1)^2}\, dx$$

i se aplică procedeul de îmbunătăţire a convergenţei, considerînd ca funcţie aproximantă, funcţia

$$\gamma(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{(x+2)^2}.$$

Cu ajutorul formulei lui Maclaurin se arată uşor că

$$\cos^2 \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{x^2} - \frac{\varphi(x)}{x^4}\,;\ \frac{1}{4} < \varphi(x) < \frac{1}{3}\ (x \geqslant 1).$$

Diferenţa

$$\frac{1 - \frac{1}{x^2} - \frac{\varphi(x)}{x^4}}{(x+1)^2} - \frac{a}{x^2} - \frac{b}{(x+1)^2} - \frac{c}{(x+2)^2}$$

se scrie sub forma

$$\frac{(1-a-b-c)x^4 - 2(3a+2b+c-2)x^3 - (13a+4b+c-3)x^2 - 4(3a+1)x}{x^2(x+1)^2(x+2)^2} +$$

$$+ \frac{-[4a+4+\varphi(x)] - \frac{4\varphi(x)}{x} - \frac{4\varphi(x)}{x^2}}{x^2(x+1)^2(x+2)^2}$$

Se impun condiţiile

$$\left.\begin{aligned} a + b + c &= 1 \\ 3a + 2b + c &= 2 \\ 13a + 4b + c + 3 & \end{aligned}\right\},$$

de unde $a = -\frac{1}{6}$, $b = \frac{4}{3}$, $c = -\frac{1}{6}$, astfel că

$$\int_{10}^\infty \frac{\cos^2 \frac{1}{x}}{(x+1)^2}\, dx = -\frac{1}{6}\int_{10}^\infty \frac{dx}{x^2} + \frac{4}{3}\int_{10}^\infty \frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{1}{6}\int_{10}^\infty \frac{dx}{(x+2)^2} - 2\int_{10}^\infty \frac{dx}{x(x+1)^2(x+2)^2} -$$

$$-\int_{10}^\infty \frac{\frac{10}{3} + \varphi(x)}{x^2(x+1)^2(x+2)^2}\, dx - 4\int_{10}^\infty \frac{\varphi(x)}{x^3(x+1)^2(x+2)^2}\, dx - 4\int_{10}^\infty \frac{\varphi(x)}{x^4(x+1)^2(x+2)^2}\, dx.$$

Primele patru integrale din membrul al doilea al egalității (57) se exprimă ușor în formă finită cu ajutorul funcțiilor elementare, iar ultimele trei se evaluează ca mai jos:

$$0 < \int_{10}^{\infty} \frac{\frac{10}{3} + \varphi(x)}{x^2(x+1)^2(x+2)^2}\, dx < \frac{11}{3}\int_{10}^{\infty}\frac{dx}{x^6} = \frac{11}{3}\,\frac{1}{5\cdot 10^5} < \frac{1}{100.000}.$$

Pe de altă parte

$$\int_{1}^{\infty} \frac{\cos^2 \frac{1}{x}}{(x+1)^2}\, dx > \cos^2 1 \int_{1}^{\infty}\frac{dx}{(x+1)^2} > \frac{1}{4}\;\frac{1}{2} = \frac{1}{8},$$

deci eroarea relativă ce se comite neglijînd integrala $\int_{10}^{\infty} \frac{\frac{10}{3} + \varphi(x)}{x^2(x+1)^2(x+2)^2} dx$ este mai mică decît $\frac{8}{100.000}$. Erorile relative provenite din neglijarea celorlalte două integrale, sînt esențial mai mici decît cea evaluată mai sus. Dacă metoda s-ar fi aplicat cu un număr mai mare de parametri, atunci integrarea numerică s-ar fi putut efectua pe un interval mult mai mic, iar eroarea relativă datorită integralelor ce se neglijează ca în exemplul de mai sus, ar fi fost extrem de mică.

СПОСОБ УЛУЧШЕНИЯ СХОДИМОСТИ РЯДОВ И СХОДИМОСТИ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

С целью получения преобразованного ряда с большей быстротой сходимости чем сходимость первоначального ряда — как известно — применяется преобразование Куммера, итерированное p раз. Это предполагает в каждом случае, знание p сходящихся рядов, со соответствующими исчисляемыми суммами.

Способ автора настоящей статьи сводится к использованию только одного соответствующего ряда, с известной суммой и использованию p параметров, которое определяется так, чтобы итерация метода Куммера заменилась однократным его применением, достигая при этом желаемой скорости сходимости.

Автор распространяет свой способ и на увеличение скорости сходимости интегралов с бесконечным пределом. Таким образом открывается новая возможность замены численной квадратуры относительно бесконечного промежутка $[a, +\infty)$, численной квадратурой на ограниченном промежутке $[a, b]$ малой длины значительно уменьшая погрешность, которая совершается принебрегая вычислением на промежутке $[b, +\infty)$.

UN PROCÉDÉ D'AMÉLIORATION DE LA CONVERGENCE DES SÉRIES ET DE LA CONVERGENCE DES INTÉGRALES IMPROPRES

RÉSUMÉ

Pour obtenir une transformée, qui ait une rapidité de convergence beaucoup plus grande que celle de la série originelle, on peut appliquer la transformation de Kummer, itérée p fois. Cette opération suppose la connaissance de p séries convergentes, dont les sommes sont calculables (séries approximantes).

Au lieu d'itérer p fois la transformation bien connue qui améliore la convergence, l'auteur du présent travail l'applique une seule fois, en utilisant une seule série approximante, à somme connue, et p paramètres qu'on les détermine à l'aide d'un système de p équations linéaires. On arrive ainsi à la rapidité de convergence souhaitée.

L'auteur étend son procédé aussi à l'amélioration de la convergence des intégrales ayant l'infini pour l'une de ses limites. Ainsi apparaît une nouvelle possibilité de remplacer une quadrature numérique sur un intervalle infini, $[a, +\infty)$, par une quadrature numérique sur un intervalle fini, $[a, b]$, de petite longueur, en réduisant — tout-à-coup — considérablement l'erreur que l'on commet en négligeant le calcul de l'intégrale sur l'intervalle $[b, +\infty)$.

BIBLIOGRAFIE

1. Knopp K., *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*, Berlin, Verlag J. Springer, 1931.
2. Ney A., *O formulă asimptotică generală pentru evaluarea restului seriilor convergente cu termeni pozitivi*. Studii și cercet. de matem. (Cluj), XII, *2*, (1961).
3. — *Contribuție la studiul rapidității de convergență a seriilor cu termeni pozitivi*. Studii și cercet. de matem. (Cluj), XIII, *1* (1962).
4. — *Legătura între transformarea lui Abel și transformarea lui Kummer*. Studia Universitatis Babeș-Bolyai Cluj (sub tipar).
5. Nicolescu M., *Analiză matematică*, vol. I, Edit. Tehnică, București, 1957.
6. Романовский В. И., *Введение в анализ. Избранные труды I.* Издательство Академии Наук Узбекской СС, Ташкент, 1959.
7. Рыжик И. И., Градштейн И. С., *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*. Гостехтеориздат, Москва, 1951.
8. Салехов, Г. С., *Вычисление рядов*. Гостехиздат, Москва, 1955.

Primit la 1. VI. 1962.