METODE DE TIP CIAPLÎGHIN PENTRU ECUAŢII HIPERBOLICE

DE

E. SCHECHTER

(Cluj)

Scopul prezentei lucrări este de a extinde o metodă generală dată de W. M l a k [6] pentru ecuaţii de tip parabolic, la cazul ecuaţiilor cu derivate parţiale de ordinul al doilea de tip hiperbolic. Ca şi cazuri particulare se dau procedee care furnizează aproximaţii bilaterale în condiţii mai puţin restrictive, valabile şi în ipoteze diferite de cele date în [1], [2], avînd acelaşi ordin de convergenţă.

1. Pentru a trata concomitent problema lui Darboux şi a lui Cauchy referitoare la ecuaţia

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y), \tag{1}$$

vom folosi modul de tratare al acestor probleme din [4]. Pentru a nu încărca expunerea, vom presupune că ecuaţiile care vor interveni au o soluţie şi numai una. Teoreme de unicitate şi existenţă se pot vedea de exemplu în [4].

Fie curba C_1 de ecuaţie $y = \bar{y}(x)$, $\bar{y}(x)$ fiind o funcţie continuă descrescătoare pe intervalul $[0, a_0]$. Să notăm cu $x = \bar{x}(y)$ inversa ei, y variind pe intervalul $[0, b_0]$. Să considerăm acum două numere a şi b astfel $a \geqq a_0$; $b \geqq b_0$ şi să prelungim cele două funcţii de mai sus punînd $\bar{y}(x) = 0$ pe $[a_0, a]$, respectiv $\bar{x}(y) = 0$ pe $[b_0, b]$. Ca şi în [8], să notăm cu R următorul domeniu :

$$R = \{(x, y) \mid 0 \leqq x \leqq a,\ \bar{y}(x) \leqq y \leqq b\} = \{(x, y) \mid 0 \leqq y \leqq b,\ \bar{x}(y) \leqq x \leqq a\},$$

şi cu $r(x_0, y_0)$ intersecţia lui R cu dreptunghiul $0 \leqq x \leqq x_0$; $0 \leqq y \leqq y_0$. La fel cu C să notăm mulţimea punctelor din R situate pe C_1 sau pe axele de coordonate, iar cu C_{xy} intersecţia lui $r(x, y)$ cu C. Vom zice că o funcţie $g(x, y)$ aparţine clasei $C^*(R)$, dacă are derivatele g_x, g_y, g_{xy} continue pe R.

Enunţăm în continuare sub forma de leme următoarele rezultate fundamentale din [8].

LEMA 1. *Fie $f(x, y, z, p, q)$ o funcţie continuă şi nedescrescătoare z, p, q pe domeniul*

$$R \times \{-\infty < z, p, q < +\infty\}.$$

Fie de asemenea u, v, w trei funcţii de clasă $C^*(R)$, astfel ca :

$$u_{uy} = f(x, y, u, u_x, u_y) \tag{1}$$

$$v_{xy} \leqq f(x, y, v, v_x, v_y)\,;\quad w_{xy} \geqq f(x, y, w, w_x, w_y) \tag{2}$$

şi

$$\begin{aligned} v < u < w \quad &\text{pentru} \quad \{(x, \bar{y}(x))\ \ 0 \leqq x \leqq a_0\}, \\ v_x < u_x < w_x \quad &\text{pentru} \quad \{(x, \bar{y}(x))\ \ 0 \leqq x \leqq a\}, \\ v_y < u_y < w_y \quad &\text{pentru} \quad \{(\bar{x}(y), y)\ \ 0 \leqq y \leqq b\}. \end{aligned} \tag{3}$$

În aceste condiţii, pe tot domeniul R

$$v < u < w; \quad v_x < u_x < w_x; \quad v_y < u_y < w_y.$$

Observaţia 1. În condiţii de existenţă şi unicitate, peste tot în aceste inegalităţi pe lîngă semnul $<$ se poate admite şi semnul egal. Faptul că ultimele trei variabile au un domeniu de variaţie infinit nu este esenţial în raţionamente.

LEMA 2. *Să presupunem că funcţia f continuă pe domeniul din lema 1, satisface şi o condiţie Lipschitz de forma :*

$$\begin{aligned} &| f(x, y, z_1, p_1, q_1) - f(x, y, z_2, p_2, q_2) | \leqq \\ &\leqq k(x, y)\, | z_1 - z_2 | + k_1(x, y)\, | p_1 - p_2 | + k_2(x, y)\, | q_1 - q_2 |, \end{aligned} \tag{4}$$

iar $v \in C^*(R)$ este o funcţie astfel ca :

$$| v_{xy} - f(x, y, v, v_x, v_y) | \leqq \delta(x, y)$$

şi *$\rho(x, y) \in C^*(R)$ satisface inegalităţile :*

$$\begin{aligned} | u - v | < \rho \quad &pe \quad \{(x, \bar{y}(x))\ |\ 0 \leqq x \leqq a_0\}, \\ | u_x - v_x | < \rho_x \quad &pe \quad \{(x, \bar{y}(x))\ |\ 0 \leqq x \leqq a\}, \\ | u_y - v_y | < \rho_y \quad &pe \quad \{(\bar{x}(y), y)\ |\ 0 \leqq y \leqq b\}, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\rho_{xy} \leqq k\rho + k_1\rho_x + k_2\rho_y + \delta.$$

În aceste ipoteze :

$$| u - v | < \rho, \quad | u_x - v_x | < \rho_x, \quad | u_y - v_y | < \rho_y. \tag{6}$$

Observaţia 2. Dacă în (5) se admite şi semnul egal, atunci el trebuie pus şi în (6).

CONSECINŢA 1. *Dacă în cazul problemei lui Darboux se pot găsi nişte constante k, k_1, k_2, δ, ε, astfel ca să avem satisfăcută condiţia lui Lipschitz din lemă şi*

$$\begin{aligned} | v_{xy} - f(x, y, v, v, v) | &\leqq \delta e^{k_1 y + k_2 x} \quad pe \quad R, \\ | u(0, 0) - v(0, 0) | &\leqq \varepsilon \\ | u_x - v_x | &\leqq \varepsilon k_2 e^{k_1 x} \quad pentru \quad y = 0, \\ | u_y - v_y | &\leqq \varepsilon k_1 e^{k_2 y} \quad pentru \quad x = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

atunci are loc inegalitatea :

$$| u - v | \leqq e^{k_1 y + k_2 x}\left[E(mxy)\left(\varepsilon + \frac{\delta}{m}\right) - \frac{\delta}{m}\right], \qquad m = k + k_1 k_2$$

precum şi inegaţităţile corespunzătoare pe tot domeniul R.

Prin $E(t)$ s-a notat funcţia modificată a lui Bessel de ordinul zero :

$$E(t) = I_0(2\sqrt{t}).$$

CONSECINŢA 2. *Să considerăm problema lui Cauchy pentru dreapta* $x + y = 0$ (faptul că aceasta curbă nu traversează cadranul întîi nu are importanţă) *şi să presupunem că există nişte constante k, k_1, k_2, δ, ε, ε_1 astfel ca să fie satisfăcută condiţia lui Lipschitz precum şi*

$$| v_{xy} - f(x, y, v, v_x, v_y) | \leqq \delta \quad pe \quad R, \tag{8}$$

$$| u - v | \leqq \varepsilon, \quad | u_x - v_x | \leqq \varepsilon \quad \text{şi} \quad | u_y - v_y | \leqq \varepsilon \quad pe \quad x + y = 0. \tag{9}$$

În acest caz pe tot domeniul R :

$$| u - v | \leqq A_1 e^{\lambda_1 (x+y)} + A_2 e^{\lambda_2 (x+y)} - \frac{\delta}{k}. \tag{10}$$

Aici

$$2\lambda_1 = k_1 + k_2 + \sqrt{(k_1 + k_2)^2 + 4k}\,;\quad 2\lambda_2 = k_1 + k_2 + \sqrt{(k_1 + k_2)^2 + 4k}$$

$$\sqrt{(k_1 + k_2)^2 + 4k}\, A_1 = \varepsilon_1 - \lambda_2\left(\varepsilon + \frac{\delta}{k}\right) \quad \sqrt{(k_1 + k_2)^2 + 4k}\, A_2 = \lambda_1\left(\varepsilon + \frac{\delta}{k}\right) - \varepsilon_1.$$

De asemenea au loc delimitările corespunzătoare pentru derivate.

În fine, să mai introducem o funcție care o definim cu ajutorul condițiilor inițiale. Dacă z este o funcție de clasă $C^*(R)$, vom nota printr-un indice superior 0, funcția :

$$z^0(x, y) = z(x, \bar{y}(x)) - \int_{C_{xy}} z_y(x, t)dt = z(\bar{x}(y), y) + \int_{C_{xy}} z(s, y)ds. \tag{11}$$

Atunci, după cum se arată în [8], în locul inegalităților (3) se pot considera :

$$v^0 < u^0 < w^0, \quad v^0_x < u^0_x < w^0_x, \quad v^0_y < u^0_y < w^0_y,$$

pe tot domeniul R.

Din acest motiv în cele ce urmează vom folosi în locul condițiilor inițiale funcția (11), adică vom scrie condiția inițială sub forma :

$$u^0(x, y) = \xi(x, y), \qquad (x, y) \in R. \tag{12}$$

2. Trecem în acest punct la construirea unei scheme generale de aproximare uniformă și bilaterală a soluției ecuației (1) cu condiția (12).

Pentru a simplifica scrierea vom nota :

$$z_x = z^{(1)}; \quad z_y = z^{(2)}; \quad z_{xy} = z^{(12)} \text{ și uneori } z = z^{(0)}.$$

La fel vom pune

$$f(x, y, z, z^{(1)}, z^{(2)}) = f[z],$$

iar pentru un vector oarecare $\xi(\xi_0, \xi_1, \xi_2)$

$$f(x, y, \xi_0, \xi_1, \xi_2) = f(x, y, \xi).$$

Următoarele două ipoteze sînt necesare pentru teorema 1 :

(H). *Funcțiile v și w sînt de clasă $C^*(R)$ și satisfac inegalităților* :

$$v^{(12)} \leqq f[v] \quad : \quad w^{(12)} \leqq f[w]. \tag{13}$$

$$v^0 < \varphi(x, y) < w^0 \text{ pe } R. \tag{14}$$

(C_1). *Condiția* **(H)** *este verificată iar fiecărei funcții $z \in C^*(R)$ astfel ca* :

$$z^{(12)} \leqq f[z], \tag{15}$$

$$v^0(x, y) \leqq z^0(x, y) \leqq w^0(x, y), \tag{16}$$

îi corespunde o funcție de opt variabile $\omega(x, y, \xi, \eta; z)$ continuă în $\xi(\xi_0, \xi_1, \xi_2)$ și $\eta(\eta_0, \eta_1, \eta_2)$, nedescrescătoare în variabilele ξ și posedînd următoarele proprietăți :

(α) $\omega(x, y, \xi, \xi; z) = 0$ *pentru orice* ξ.

(β) $f(x, y, \xi) - f(x, y, \eta) \geqq \omega(x, y, \xi, \eta; z)$

pentru $z^{(i)}(x, y) \leqq \eta_i < \xi_i \leqq w^{(i)}(x, y)$, *iar* $(x, y) \in R$, $i = 0, 1, 2$.

(γ) *Există o constantă K astfel ca* $|\omega(x, y, \xi, \eta, ; z)| \leqq K$ *pentru* $v^{(i)}(x, y) \leqq z^{(i)}(x, y) \leqq \eta_i < \xi_i \leqq w^{(i)}(x, y)$ *și* $(x, y) \in R$.

(δ) $\quad [z_{n+1}, z_n] \to 0$

dacă $z^{(i)}_n$ converge uniform pe R. Aici $\omega[r, s; z] = \omega(x, y, \xi, \eta; z)$, *pentru* $\xi_i = r^{(i)}$ *și* $\eta_i = s^{(i)}$.

Putem acum demonstra :

TEOREMA 1. *Să presupunem satisfăcută condiția* **(C_1)** *și că* :

$$\varphi_n(x, y) \rightrightarrows \varphi(x, y) \text{ și } \varphi_n(x, y) < \varphi_{n+1}(x, y) \text{ pe } R \tag{17}$$

$$v^0(x, y) < \varphi_1(x, y) < \varphi(x, y) < w^0(x, y). \tag{18}$$

În aceste ipoteze există un șir $U_n(x, y)$ de funcții de clasă $C^*(R)$ avînd următoarele proprietăți :

1°. *$u_n(x, y)$ este o soluție a ecuației* :

$$z^{(12)} = \omega[z, u_{n-1}; u_{n-1}] + f[u_{n-1}] \tag{19}$$

cu condiția inițială : $u^0_n(x, y) = \varphi_n(x, y)$, $\hfill (20)$

$$2°. \; v^{(i)}(x, y) < u^{(i)}_{n-1}(x, y) < u^{(i)}_n(x, y) < w^{(i)}(x, y) \quad \text{pe } R, \tag{21}$$

$$u^{(12)}_n \leqq f[u_n] \tag{22}$$

iar șirurile $u^{(i)}_n(x, y)$ fiind uniform spre soluția respectiv derivatele soluției problemei (1), (12).

Demonstrație. Funcția $v(x, y)$ satisface condițiile (15), (16) și prin urmare îi corespunde o funcție $\omega(x, y, \xi, \eta; v)$. Vom considera problema:

$$z^{(2)} = \omega[z, v; v] + f[v] \tag{23}$$

$$z^0(x, y) = \xi_1(x, y). \tag{24}$$

Din condiția (α), conform (13) primim :

$$v^{(12)} \leqq \omega[v, v(x, y); v] + f[v]. \tag{25}$$

Deoarece $v < w$, din (13) și (β) primim

$$w^{(12)} \geqq \omega[w, v; v] + f[v]. \tag{26}$$

Să notăm cu $u_1(x, y)$ soluția problemei (23), (24). Atunci conform lemei 1 :

$$v^{(i)} < u^{(i)}_1 < w^{(i)}.$$

În acest caz din (β) și (23) rezultă că

$$u^{(12)}_1 \leqq f[u_1]. \tag{27}$$

Cu acestea afirmațiile (19)—(22) sînt demonstrate pentru $n = 1$.

În continuare să le presupunem adevărate pentru $n = k$ şi să le demonstrăm pentru $n = k + 1$. Din (C_1), (21) şi (22), rezultă existenţa unei funcţii $\omega(x, y, \xi, \eta; u_k)$, deoarece condiţia (H) rămîne valabilă dacă înlocuim pe v cu u_k, w fiind neschimbat. Notînd cu $u_{k+1}(x, y)$ soluţia problemei (19), (20) pentru $n = k + 1$, rezultă conform aceleiaşi leme 1 :

$$v^{(i)}(x, y) < u_k^{(i)}(x, y) < u_{k+1}^{(i)}(x, y) < w^{(i)}(x, y), \text{ pe } R, \tag{28}$$

iar din (β) se deduce :

$$u_{k+1}^{(12)} \leqq f[u_{k+1}].$$

Mai rămîne de demonstrat uniform convergenţa şirurilor. Pentru aceasta vom trece la ecuaţiile integrale corespunzătoare problemei noastre :

$$u_{n+1}(x, y) = \varphi_{n+1}(x, y) + \iint\limits_{r(x,y)} \{f[u_n(s, t)] + \omega[u_{n+1}, u_n; u_n]\}\, ds\, dt$$

$$u_{n+1}^{(1)}(x, y) = \varphi_{n+1}^{(1)}(x, y) + \int_{y(x)}^{y} \{f[u_n(x, t)] + \omega\} dt \tag{29}$$

$$u_{n+1}^{(2)}(x, y) = \varphi_{n+1}^{(2)}(x, y) + \int_{x(y)}^{x} \{f[u_n(s, y)] + \omega\}\, ds$$

Din aceste ecuaţii rezultă că şirurile sînt egal mărginite, dacă ţinem seama de inegalităţile şi de faptul că funcţia de sub integrala din membrul doi este mărginită pe R. Pe de altă parte şirurile sînt şi egal continue, ceea ce se poate vedea formînd expresiile :

$$| u_{n+1}^{(i)}(x + h, y + l) - u_{k+1}(x, y) |$$

cu ajutorul identităţilor (29) şi ţinînd seama de uniform continuitatea lui ω şi a lui $f[u_n]$ pe R. Se pot deci extrage şiruri uniform convergente. Deoarece însă şirurile $u_n^{(i)}(x, y)$ sînt monotone, rezultă că ele însele sînt uniform convergente şi tind spre soluţia problemei, după cum se vede din (δ).

Observaţia 3. În teoremă, în locul funcţiilor $u_n^0(x, y)$ s-ar fi putut lua tocmai condiţiile iniţiale.

În vederea construirii unor şiruri de funcţii care să aproximeze soluţia de sus, să trecem la ipoteza :

(C_2). *Să presupunem condiţia* (H) *satisfăcută şi că fiecărei funcţii* $z \in C^*[R]$ *astfel că*

$$z^{(i)} \geqq f[z] \quad şi \quad v^0(x, y) \geqq z^0(x, y) \geqq w^0(x, y),$$

îi corespunde o funcţie $\Omega(x, y, \xi, \eta; z)$ *nedescrescătoare în variabilele* η *şi*

(α′) $\Omega(x, y, \xi, \xi; z) = 0$ *pentru orice* ξ,

(β′) $f(x, y, \eta) - f(x, y, \xi) \leqq \Omega(x, y, \xi\, \eta; z)$,

pentru $v^{(i)}(x, y) \leqq \eta_1 < \xi_1 \leqq w^{(i)}(x, y)$ *şi* $(x, y) \in R$,

(γ′) *există o constantă* K, *astfel ca*

$$|\Omega(x, y, \xi, \eta; z)| \leqq K$$

dacă $v^{(i)}(x, y) \leqq z^{(i)}(x, y) \leqq \eta_i < \xi_i \leqq w^{(i)}(x, y)$ *şi* $(x, y) \in R$,

(δ′) $\Omega[z_n, z_{n+1}; z_n] \to 0$, *dacă şirurile* $z_n^{(i)}$ *converg uniform pe* R.

Duala teoremei 1 se poate enunţa astfel :

TEOREMA 2. *Să presupunem satisfăcută condiţia* (C_2) *şi că*

$$\psi_n(x, y) \rightrightarrows \xi(x, y) \quad şi \quad \psi_n(x, y) > \psi_{n+1}(x, y); \quad \psi_1(x, y) < w^0(x, y).$$

În aceste condiţii există un şir $v_n(x, y)$ *de funcţii de clasă* $C^*[R]$ *astfel ca* v_n *să fie o soluţie a ecuaţiei :*

$$z^{(12)} = \Omega[v_{n-1}(x, y), z; v_{n-1}] + f[v_{n-1}],$$

cu condiţia

$$v_n^0(x, y) = \psi_n(x, y).$$

În plus

$$v^{(i)}(x, y) < v_n^{(i)}(x, y) < v_{n-1}^{(i)}(x, y) < w^{(i)}(x, y),$$

$$v_n^{(12)} \geqq f[v_n],$$

iar şirurile $v_n^{(i)}(x, y)$ *converg uniform pe* R *către soluţia, respectiv către derivatele soluţiei problemei* (1), (12).

Observaţia 4. Dacă în teorema 1 în condiţiile (17), (18) se admite şi semnul egal, atunci el trebuie admis şi în relaţiile (21). Acelaşi lucru se referă şi la teorema 2.

Să enunţăm în fine ipoteza :

(C). *Fie satisfăcută condiţia* (H). *Să presupunem că fiecărei perechi de funcţii* z, Z *de clasă* $C^*[R]$ *şi astfel ca :*

$$z^{(12)} \leqq f[z], \qquad Z^{(12)} \geqq f[Z]$$

şi $v^0(x, y) \leqq z^0(x, y) \leqq Z^0(x, y) \leqq w^0(x, y)$ *îi corespund două funcţii* $\omega(x, y, \xi, \eta; z, Z)$ *şi* $\Omega(x, y, \xi, \eta; z, Z)$, *prima nedescrescătoare în* ξ *iar a doua în* η, *avînd următoarele proprietăţi :*

(α″) $\omega(x, y, \xi, \xi; z, Z) = \Omega(x, y, \xi, \xi; z, Z) = 0$ *pentru orice* ξ;

(β'') $\Omega(x, y' \xi, \eta; z, Z) \geqq f(x, y, \eta) - f(x, y, \xi)$; $\omega(x, y, \xi, \eta; z, Z)$
$f(x, y, \xi) - f(x, y, \eta)$, *dacă* $z^{(i)} \leqq \eta_i < \xi_i \leqq Z^{(i)}$;

(γ'') ω *și* Ω *sînt egal mărginite pe domeniul de la condiția* (γ);

(δ'') $\omega[z_n, z_{n-1}; z_{u-1}, Z_{n-1}]$ și $\Omega[Z_{n-1}, Z_n; z_{n-1}, Z_{n-1}]$ *tind uniform la* 0 *dacă șirurile* $z_n^{(i)}$ *și* $Z_n^{(i)}$ *converg uniform*;

În baza primelor două teoreme și a observației 1 se poate demonstra :

Teorema 3. *Să presupunem satisfăcută condiția* (C). *De asemenea să presupunem*

$$v^0(x, y) \leqq \varphi_n(x, y) \leqq \varphi_{n+1}(x, y) \leqq \varphi(x, y \leqq \varphi_{n+1}(x, y) \leqq \varphi_n(x, y) \leqq w^0(x, y)$$

și că $\varphi_n^{(i)}$ *și* $\psi_n^{(i)}$ *tind uniform către* 0.

În acest caz există două șiruri de funcții u_n *și* v_n *de clasă* $C^*[R]$, *care satisfac următoarele relații* :

$$u_n^{(12)} \leqq f[u_n], \qquad v_n^{(12)} \geqq f[v_n]$$

$$v^{(i)}(x, y) \leqq u_n^{(i)}(x, y) \leqq u_{n+1}^{(i)}(x, y) \leqq v_{n+1}^{(1)}(x, y) \leqq v_n^{(i)}(x, y) \leqq w^{(i)}(x, y),$$

$$u_n^{(12)} = \omega[u_n, u_{n-1}; u_{n-1}, v_{n-1}] + f[u_{n-1}]$$

$$v_n^{(12)} = \Omega[v_{n-1}, v_n; u_{n-1}, v_{n-1}] + f[v_{n-1}]$$

$$u_n^0(x, y) = \varphi_n(x, y), \qquad v_n(x, y) = \psi_n(x, y)$$

$$u_n^{(i)} \rightrightarrows u; \qquad v_n^{(i)} \rightrightarrows u$$

u fiind soluția problemei noastre.

Vom transpune acum cîteva exemple date în [6], pentru cazul hiperbolic.

a) Să presupunem că funcțiile $a_1(x, y)$, $a_2(x, y)$, $a_3(x, y)$ sînt astfel încît să avem :

$$\sum_{i=0}^{2} a_i(x, y)(\xi_i - \eta_i) \leqq f(x, y, \xi) - f(x, y, \eta)$$

pentru $\xi_i > \eta_i$. În acest caz în teorema 1 putem lua

$$\omega = \sum_{i=0}^{2} a_i(x, y)(\xi_i - \eta_i);$$

în particular este interesant cazul cînd două dintre funcțiile $a_i(x, y)$ sînt nule.

b) Dacă notăm cu D domeniul

$$R \times \{v^{(i)}(x, y) \leqq z^{(i)} \leqq w^{(i)}(x, y)\}$$

și

$$m_i = \inf_D f_{z^{(i)}}[z], \tag{30}$$

putem lua în teorema 1

$$\omega = \sum_{i=0}^{2} m_i(\xi_i - \eta_i).$$

Condiția care necesită o verificare este (β). Avem într-adevăr din formula mediei $(\xi_i > \eta_i)$

$$m_0 \leqq \frac{f(x, y, \xi_0, \eta_1, \eta_2) - f(x, y, \eta)}{\xi_0 - \eta_0}$$

$$m_1 \leqq \frac{f(x, y, \xi_0, \xi_1, \eta_2) - f(x, y, \xi_0, \eta_1, \eta_2)}{\xi_1 - \eta_1}$$

$$m_2 \leqq \frac{f(x, y, \xi) - f(x, y, \xi_0, \xi_1, \eta_2)}{\xi_2 - \eta_2}.$$

Dacă avem numai $|f_{z^{(i)}}| < M$, atunci în teorema 1 punem

$$\omega = -M \sum_{i=0}^{2} (\xi_i - \eta_i),$$

ar în teorema 2

$$\Omega = M \sum_{i=0}^{2} (\xi_i - \eta_i).$$

c) Să presupunem că f este nedescrescător în p și q și că f_z este nedescrescător în z. Să punem în teorema 3

$$\omega(x, y, \xi, \eta; z, Z) = f_z(x, y, \eta)(\xi_0 - \eta_0)$$

$$\Omega(x, y, \xi, \eta; z, Z) = \frac{f(x, y, z, \xi_1, \xi_2) - f(x, y, \xi)}{z - \xi_0}(\eta_0 - z) +$$
$$+ f(x, y, z, \xi_1, \xi_2) - f(x, y, \xi).$$

Condiția (β'') este într-adevăr verificată căci

$$f_z(x, y, \eta) \leqq \frac{f(x, y, \xi_0, \eta_1, \eta_2) - f(x, y, \eta)}{\xi_0 - \eta_0} \leqq \frac{f(x, y, \xi) - f(x, y, \eta)}{\xi_0 - \eta_0}$$

și

$$z^{(i)} \leqq \eta_i < \xi_i.$$

Pe de altă parte, din cauza convexității :

$$\Omega \geqq f(x, y, \eta_0, \xi_1, \xi_2) - f(x, y, \xi) \geqq f(x, y, \eta) - f(x, y, \xi).$$

Dacă f_z este necrescător în z

$$\omega = \frac{f(x, y, Z, \eta_1, \eta_2) - f(x, y, \eta)}{Z - \eta_0}(\xi_0 - Z) + f(x, y, Z, \eta_1, \eta_2) - f(x, y, \eta),$$

$$\Omega = f_z(x, y, \xi)(\eta_0 - \xi_0).$$

La fel se pot construi procedee cînd f_p sau f_q au proprietățile lui f_z.
Să mai observăm că, spre deosebire de [1], [2], aici poate fi considerat și cazul cînd f nu depinde de una sau două dintre ultimele trei variabile, monotonia nefiind strictă.

3. Exemplele anterioare, relativ simple, nu dau în general viteza de convergență a metodelor obișnuite de tip Ciaplîghin. Ca atare la acest punct vom prezenta procedee care să aibă o astfel de viteză de convergență, în condiții mult mai largi decît cele din [1], [2] și de aceeași formă analitică. Acestea vor îmbrățișa și cazurile care nu au fost considerate în notele susmenționate. Metoda de stabilire a ordinului de convergență urmează pe cea a lui L u z i n [5] pentru ecuații ordinare. Vom presupune în cele ce urmează că f are derivatele parțiale de ordinul al doilea în raport cu ultimele trei variabile, mărginite.

Vom distinge următoarele cazuri:

$$a_1\ f_{zz}, f_{pp}, f_{qq} \leqq 0. \quad \text{iar} \quad f_{zp}, f_{zq}, f_{pq} \geqq 0.$$

Vom lua atunci

$$\omega = \frac{f(x, y, Z, \eta_1, \eta_2) - f(x, y, \eta)}{Z - \eta_0}(\xi_0 - \eta_0) + \\ + \frac{f(x, y, \eta_0, Z^{(1)}, \eta_2) - f(x, y, \eta)}{Z^{(1)} - \eta_1}(\xi_1 - \eta_1) + \\ + \frac{f(x, y, \eta_0, \eta_1, Z^{(2)}) - f(x, y, \eta)}{Z^{(2)} - \eta_2}(\xi_2 - \eta_2).$$

Din ipoteze rezultă că funcțiile

$$F_1(\alpha) = f(x, y, Z, \alpha, \eta_2) - f(x, y, \eta_0, \alpha, \eta_2);$$

$$F_2(\alpha) = f(x, y, Z, \xi_1, \alpha) - f(x, y, \eta_0, \xi_1, \alpha)$$

$$F_3(\alpha) = f(x, y, \eta_0, Z^{(1)}, \alpha) - f(x, y, \eta_0, \eta_1, \alpha)$$

sînt nedescrescătoare în α, ceea ce se vede imediat cu ajutorul derivatelor. Prin urmare în virtutea acestei observații și a tipului de convexitate rezultă că:

$$\omega \leqq \frac{f(x, y, Z, \xi_1, \xi_2) - f(x, y, \eta_0, \xi_1, \xi_2)}{Z - \eta_0}(\xi_0 - \eta_0) + \\ + \frac{f(x, y, \eta_0, Z^{(1)}, \xi_2) - f(x, y, \eta_0, \eta_1, \xi_2)}{Z^{(1)} - \eta_1}(\xi_1 - \eta_1) + \\ + \frac{f(x, y, \eta_0, \eta_1, Z^{(2)}) - f(x, y, \eta)}{Z^{(2)} - \eta_2}(\xi_2 - \eta_2) \leqq$$

$$\leqq f(x, y, \xi) - f(x, y, \eta_0, \xi_1, \xi_2) + f(x, y, \eta_0, \xi_1, \xi_2) - f(x, y, \eta_0, \eta_1, \xi_2) + \\ + f(x, y, \eta_0, \eta_1, \xi_2) - f(x, y, \eta) = f(x, y, \xi) - f(x, y, \eta)$$

Pe de altă parte se ia

$$\Omega = f_z(x, y, \xi_0, z^{(1)}, z^{(2)})(\eta_0 - \xi_0) + f_p(x, y, z, \xi_1, z^{(2)})(\eta_1 - \xi_1) + \\ + f_q(x, y, z, z^{(1)}, \xi_2)(\eta_2 - \xi_2).$$

Avem:

$$\Omega \geqq f_z(x, y, \xi_0, \eta_1, \eta_2)(\eta_0 - \xi_0) + f_p(x, y, \xi_0, \xi_1, \eta_2)(\eta_1 - \xi_1) + \\ + f_q(x, y, \xi)(\eta_2 - \xi_2) = f(x, y, \eta) - f(x, y, \xi_0, \eta_1, \eta_2) + \\ + f(x, y, \xi_0, \eta_1, \eta_2) - f(x, y, \xi_0, \xi_1, \eta_2) + f(x, y, \xi_0, \xi_1, \eta_2) - \\ - f(x, y, \xi) = f(x, y, \eta) - f(x, y, \xi).$$

Din cele de mai sus se vede deci că ipoteza (C) este verificată.
Prin considerații similare se vede că aceasta ipoteză este satisfăcută și pentru cazurile:

$$a_2\ f_{zz}, f_{pp}, f_{qq}\ f_{zp}, f_{zq}, f_{pq} \leqq 0.$$

Aici

$$\omega = \frac{f[Z] - f(x, y, \eta_0, Z^{(1)}, Z^{(2)})}{Z - \eta_0}(\xi_0 - \eta_0) + \frac{f[Z] - f(x, y, Z, \eta_1, Z^{(2)})}{Z^{(1)} - \eta_1}(\xi_1 - \eta_1) + \\ + \frac{f[Z] - f(x, y, Z, Z^{(1)}, \eta_2)}{Z^{(2)} - \eta_2}(\xi_2 - \eta_2),$$

iar

$$\Omega = f_z(x, y, \xi)(\eta_0 - \xi_0) + f_p(x, y, \xi)(\eta_1 - \xi_1) + f_q(x, y, \xi)(\eta_2 - \xi_2)$$

$$b_1)\ f_{zz},\ f_{pp},\ f_{qq},\ f_{zp},\ f_{zq},\ f_{pq} \geqq 0.$$

Acest caz se obține din cazul a_2 schimbînd pe ω cu Ω, iar pe ξ_i cu η_i și invers

$$b_2)\ f_{zz},\ f_{pp},\ f_{qq} \geqq 0, \text{ iar } f_{zp},\ f_{zq},\ f_{pq} \leqq 0.$$

Formulele corespunzătoare se primesc din a_1, schimbînd ω cu Ω, $z^{(i)}$ cu $Z^{(i)}$, ξ_i cu η_i și invers.

Toate celelalte cazuri (în total sînt 64) se pot trata combinînd termenii care au intervenit în formulele de mai sus, raționînd la fel. De pildă:

$$c_1)\ f_{zz} \geqq 0, \text{ iar } f_{pp},\ f_{qq},\ f_{zp},\ f_{zq},\ f_{pq} \leqq 0.$$

Condițiile din teorema 3 se verifică pentru:

$$\omega = f_z(x, y, \eta_0, Z^{(1)}, Z^{(2)})(\xi_0 - \eta_0) + \frac{f[Z] - f(x, y, Z, \eta_1, Z^{(2)})}{Z^{(1)} - \eta_1}(\xi_1 - \eta_1) + $$
$$+ \frac{f[Z] - f(x, y, Z, Z^{(1)}, \eta_2)}{Z^{(2)} - \eta_2}$$
$$\Omega = \frac{f(x, y, z, \xi_1, \xi_2) - f(x, y, \xi)}{z - \xi_0}(\eta_0 - \xi_0) +$$
$$+ f_p(x, y, \xi)(\eta_1 - \xi_1) + f_q(x, y, \xi)(\eta_2 - \xi_2).$$

Să demonstrăm că în aceste cazuri ordinul de convergență al șirurilor $u_n^{(i)}$, $v_n^{(i)}$ este de $\frac{1}{2^{2^n}}$.

Ne vom limita la cazul a), pentru celelalte cazuri demonstrația se face la fel. Considerăm toate ecuațiile cu aceleași condiții inițiale, prin urmare:

$$\varphi_n(x,y) = \psi_n(x,y) = \varphi(x,y).$$

Conform teoremei 3, u_n satisface ecuația:

$$u_n^{(12)} = \frac{f(x, y, v_{n-1}, u_{n-1}^{(1)}, u_{n-1}^{(2)}) - f[u_{n-1}]}{v_{n-1} - u_{n-1}}(u_n - u_{n-1}) +$$
$$+ \frac{f(x, y, u_{n-1}, v_{n-1}^{(1)}, u_{n-1}^{(2)}) - f[u_{n-1}]}{v_{n-1}^{(1)} - u_{n-1}^{(1)}}(u_n^{(1)} - u_{n-1}^{(1)}) +$$
$$+ \frac{f(x, y, u_{n-1}, u_{n-1}^{(1)}, v_{n-1}^{(2)}) - f[u_{n-1}]}{v_{n-1}^{(2)} - u_{n-1}^{(2)}}(u_n^{(2)} - u_{n-1}^{(2)}) + f[u_{n-1}],$$

iar v_n:

$$v_n^{(12)} = f(x, y, v_{n-1}, u_{n-1}^{(1)}, u_{n-1}^{(2)})(v_n - v_{n-1}) +$$
$$+ f_p(x, y, u_{n-1}, v_{n-1}^{(1)}, u_{n-1}^{(2)})(v_n^{(1)} - v_{n-1}^{(1)}) +$$
$$+ f_q(x, y, u_{n-1}, u_{n-1}^{(1)}, v_{n-1}^{(2)})(v_n^{(2)} - v_{n-1}^{(2)}) + f[v_{n-1}].$$

Dacă punem $\delta_n = v_n - u_n$, putem scrie

$$u_n^{(12)} = f_z(x, y, u_{n-1} + \theta_1\delta_{n-1}; u_{n-1}^{(1)}, u_{n-1}^{(2)})(u_n - u_{n-1}) +$$
$$+ f_p(x, y, u_{n-1}, u_{n-1}^{(1)} + \theta_2\delta_{n-}^{(1)}, u_{n-1}^{(2)})(u_n^{(1)} - u_{n-1}^{(1)}) +$$
$$+ f_q(x, y, u_{n-1} u_{n-1}^{(1)}, u_{n-1}^{(2)} + \theta_3\delta_{n-1}^{(2)})(u_n^{(2)} - u_{n-1}^{(2)}) + f[u_{n-1}]$$

Prin urmare,

$$\delta^{(12)} = \Omega - \omega + f[v_{n-1}] - f[u_{n-1}] = \Omega - \omega +$$
$$+ f_z(x, y, u_{n-1} + \theta_4\delta_{n-1}, u_{n-1}^{(1)} + \theta_5\delta_{n-1}^{(1)}, u_{n-1}^{(2)} + \theta_6\delta_{n-1}^{(2)})\delta_{n-1} +$$
$$+ f_p(\ldots)\delta_{n-1}^{(1)} + f_q(\ldots)\delta_{n-1}^{(2)}. \tag{31}$$

Dezvoltînd derivatele f_z, f_p, f_q care figurează în (31) în jurul lui $u_n^{(i)}$ găsim:

$$\delta_n^{(12)} = f_z[u_n]\delta_n + f_p[u_n]\delta_n^{(1)} + f_q[u_n]\delta_n^{(2)} + R.$$

Ținînd seama de faptul că $v_{n-1}^{(i)} - v_n^{(i)}$, $u_n^{(i)} - u_{n-1}^{(i)}$ și $\delta_n^{(i)}$ sînt mai mici decît $\delta_{n-1}^{(i)}$ și notînd cu λ, o margine superioară pentru cele trei derivate de ordinul întîi pe domeniul (30):

$$\delta_n^{(1)} \leqq \lambda(\delta_n + \delta_n^{(1)} + \delta_n^{(2)}) + K(\delta_{n-1} + \delta_{n-1}^{(1)} + \delta_{n-1}^{(2)})^2, \tag{32}$$

$K > 0$ fiind o constantă care rezultă din delimitarea derivatelor de ordinul al doilea din R pe domeniul (30), iar

$$\delta_n^0(x,y) = 0. \tag{33}$$

Nu vom insista aici asupra delimitării care se poate face cu ajutorul consecințelor 1 și 2 de la punctul întîi. Amintim numai că problema lui Cauchy se poate reduce la cazul de la consecința 2 printr-o transformare simplă [7]. Aceste delimitări, deși de mare utilitate practică, nu ne dau însă precizia urmărită și de aceea vom urma o cale directă [5].

În lema 2 funcția $\rho(x, y)$ se ia ca și soluție a ecuației:

$$\delta_n^{(12)} = \lambda(\rho_n + \rho_n^{(1)} + \rho_n^{(2)}) + K(\rho_{n-1} + \rho_{n-1}^{(1)} + \rho_{n-1}^{(2)})^2,$$
$$\rho_n^0(x,y) = 0. \tag{43}$$

Să observăm că în aceeași lemă:

$$u = 0, \quad \delta = K(\rho_{n-1} + \rho_{n-1}^{(1)} + \rho_{n-1}^{(2)})^2 \quad \text{și deci} \quad \rho_n^{(i)} \geqq \delta_n^{(i)}.$$

Ținînd seama de condițiile inițiale nule, vom scrie soluția lui (34) cu ajutorul funcției lui Riemann [3].

În cazul problemei lui Darboux,

$$\rho_n(x,y) = K\int_0^x\int_0^y [\rho_{n-1}(s,t) + \rho_{n-1}^{(1)}(s,t) + \rho_{n-1}^{(2)}(s,t)]^2\, \chi(s,t;\, x,y)\, dsdt,$$

iar în cazul problemei lui Cauchy,

$$\rho_n(x, y) = K \iint_{r(x,y)} (\rho_{n+1} + \rho^{(1)}_{n+1} + \rho^{(2)}_{n+1})^2 \, \chi(s, t; x, y) ds dt.$$

Efectuînd derivările şi punînd în loc de $x(s, t; x, y)$ o margine a sa, obţinem în ambele cazuri după majorări evidente :

$$\Delta_n(x, y) < M \left[\int_0^x\!\!\int_0^y \Delta^{(2)}_{n-1}(s, t) ds dt + \int_0^x \Delta^{(2)}_{n-1}(s, y) ds + \int_0^y \Delta^{(2)}_{n-1}(x, t) dt. \right] \quad (31)$$

Aici $\Delta_n(x, y) = \rho_{n-1}(x, y) + \rho^{(1)}_{n-1}(x, y) + \rho^{(2)}_{n-1}(x, y)$.
În vederea găsirii vitezei de convergenţă, să notăm :

$$C = \frac{1}{6(a + b)M} \text{ şi } \varepsilon = \frac{1}{2(a + b)}.$$

Deoarece metoda uniform convergentă, de la un anumit rang k:

$$\Delta_{k+k'}(x, y) < C[\varepsilon(x + y)]^{2^k - 1} \text{ şi } \frac{x + y}{2^{k+1}} < 1, \quad (32)$$

k' fiind un întreg nenegativ fix.

Să presupunem delimitarea (32) adevărată pentru $k = n$ şi s-o demonstrăm pentru $k = n + 1$.

Înlocuind în (31) şi ţinînd seama de faptul că x şi y sînt pozitivi, că

$$\int_0^x (s + y)^i ds < \frac{(x + y)^{n+1}}{i + 1}$$

şi la fel pentru y, găsim :

$$\Delta_{k'+n+1} < MC^2 \left[\frac{[\varepsilon(x + y)]^{2^{n+1}} - 1}{\varepsilon(2^{n+1} - 1)} \left(\frac{x + y}{2^{n+1}} + 2 \right) \right].$$

Dar, $\frac{x+y}{2^{n+1}} < 1$; $MC < \frac{\varepsilon}{3}$ şi $2^{n+1} - 1 > 1$, şi deci :

$$\Delta_{n+k'+1} < C[\varepsilon(x + y)]^{2^{n+1} - 1} \quad \text{sau} \quad \rho^{(i)}_{n+k'+1} < C[\varepsilon(x + y)]^{2^{n+1}} - 1.$$

În sfîrşit, dacă ţinem seama de faptul că $\varepsilon(x + y) < \frac{1}{2}$, rezultă în baza lemei 2

$$\delta_{n+k'+1}(x, y) < \frac{2C}{2^{2^n}}, \text{ cctd.}$$

МЕТОДЫ ТИПА ЧАПЛЫГИНА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В труде, общий метод данный В. Млаком для уравнения параболического типа, распространяется к уравнению (1) и этим даются монотонные приближеия для решения задачи Коши и Дарбу (теоремы 1, 2, 3). Выявляется несколько частных случаев, среди которых отмечаем случаи пункта 3, исчерпывающие все типы выпуклости относительно последних трёх переменных функций f. Следовательно они содержат и случай, исследуемый в [1], [2]; но здесь условия являются более общими. Применяя метод, сходный в общих чертах с методом Лузина для обыкновенных уравнений [5], доказывается что все методы пункта 3 имеют порядок сходимости $\frac{1}{2^{2^n}}$.

MÉTHODES DU TYPE TCHAPLYGUINE POUR DES ÉQUATIONS HYPERBOLIQUES

RÉSUMÉ

On étend une méthode générale donnée par W. Mlak pour des équations de type parabolique, à l'équation (1), méthode qui fournit des approximations monotones pour la solution du problème de Cauchy et Darboux (théorèmes 1, 2, 3). On met en évidence plusieurs cas, particuliers parmi lesques nous remarquons ceux du point 3 qui épuisent tous les types de convexité par rapport aux trois dernières variables de la fonction f. En conséquence, ils contiennent aussi le cas étudié dans [1], [2], mais les conditions sont beaucoup plus larges. En utilisant une méthode qui suit pour l'essentiel la méthode de Louzine relative aux équations ordinaires [5], on démontre que toutes les méthodes du point 3 ont l'ordre de convergence $\frac{1}{2^{2^n}}$.

BIBLIOGRAFIE

1. Артемов Г. А., *Метод Чаплыгина и его упрощение для уравнения в частных производных второго порядка гиперболического типа двумя переменными.* Доклады Акад. Наук, **102**, *2*, 197—200 (1955).
2. — *Применения метода Чаплыгина и решению характеристической задачи Коши для уравнения в частных производных 2-го порядка гиперболического типа.* Доклады Акад. Наук, **112**, *5*, 791—792 (1957).
3. Kamke E., *Differentialgleichungen Reeller Funktionen.* Leipzig, 1956, 412—416.
4. Kisynski J., *Sur l'existence et l'unicite des solutions des problemes classiques relatifs a l'equation $s = F(x, y, z, p, q)$.* Ann. Univ. M. Curie-Sklodowska, Sectio A, XI, *3*, 72—108 (1957).
5. Лузин Н. Н., Собрание сочинений III. Москва, 1959, 145—208.
6. Mlak W., *Parabolic differential inequalities and Chaplighin's method.* Ann. Pol. Math., VIII, *2*, 139—153 (1960).
7. Toring R. D., *Zur numerischen behandlung von Anfangswertproblem hyperbolischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung in zwei unabhangigen Verandlichen II.* Das Cauchy Problem. Arch. Rational Mech. Anal., *4*, 446—466 (1960).
8. Walter W., *Fehlerabschatzungen bei hyperbolischen Differentialgeichungen.* Arch. Rational Mech. Anal., **3**, 249—272 (1961).

Primit la 15. VI. 1962.

Întreprinderea Poligrafică Cluj 9693.2/962