INTEGRAREA UNEI ECUAŢII DIFERENŢIALE

DE

D. V. IONESCU

În această lucrare ne vom ocupa cu integrarea ecuaţiei diferenţiale

$$\Delta_n[y] = \begin{vmatrix} y & y' & \dots & y^{(n)} \\ y' & y'' & \dots & y^{(n+1)} \\ . & . & . & . \\ y^{(n)} & y^{(n+1)} & \dots & y^{(2n)} \end{vmatrix} = 0 \tag{1}$$

Această problemă a fost pusă de prof. T. Popoviciu cu ocazia unui referat ţinut la Institutul de calcul din Cluj relativ la o lucrare a lui H. Löwner despre funcţiile monotone de matrici [1].

Vom integra de asemenea ecuaţia diferenţială

$$\Delta_n[y]=Ae^{\alpha x} \tag{2}$$

unde A şi α sînt constante.

Reamintim că

$$\Delta_1[y]=1 \tag{3}$$

este ecuaţia lănţişorului şi că ecuaţia

$$\Delta_2[y]=1 \tag{4}$$

a fost studiată de G. Darboux [2]. Indicaţii pentru integrarea ecuaţiei diferenţiale (2) au fost date de G. Darboux [3]. Noi nu vom urmări metoda dată de G. Darboux, ci vom da o metodă directă de integrare a ecuaţiilor (1) şi (2), pe care o vom aplica apoi la cazurile particulare (3) şi (4.)

1. Fie y o integrală a ecuaţiei diferenţiale $\Delta_n(y)$ continuă şi cu derivate succesive continue pînă la ordinul $2n$ inclusiv într-un interval (α, β), care poate fi $(-\infty, +\infty)$. Ea poate anula identic coeficientul lui $y^{(2n)}$ din ecuaţia $\Delta_n[y]=0$, adică pe $\Delta_{n-1}[y]$, sau nu. Ne vom ocupa mai departe de primul caz şi vom considera acum cazul cînd $\Delta_{n-1}[y]$ nu este identic nul în intervalul (α,β). Atunci pentru un punct x_0 din acest interval, avem $\Delta_{n-1}[y(x_0)]\neq 0$ şi $\Delta_{n-1}[y]$ fiind o funcţie continuă de x în intervalul (α,β), se poate determina un interval (a, b) inclus în intervalul (α, β) şi care conţine punctul x_0, pentru care $\Delta_{n-1}[y]\neq 0$. Ne vom plasa prin urmare în intervalul (a, b) şi vom determina integralele y ale ecuaţiei diferenţiale $\Delta_n[y]=0$, care sînt astfel încît $\Delta_{n-1}[y]\neq 0$. O dată ce aceste integrale vor fi determinate, vom arăta că intervalele (α, β) şi (a, b) se pot extinde la intervalul $(-\infty, +\infty)$.

Să determinăm pentru o astfel de integrală y, funcţiile $\lambda_0(x)$, $\lambda_1(x)$ $\ldots, \lambda_{n-1}(x)$ prin ecuaţiile liniare

$$
\begin{aligned}
&\lambda_0(x)y + \lambda_1(x)y' + \ldots + \lambda_{n-1}(x)y^{(n-1)} + y^{(n)} = 0\\
&\lambda_0(x)y' + \lambda_1(x)y'' + \ldots + \lambda_{n-1}(x)y^{(n)} + y^{(n+1)} = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\lambda_0(x)y^{(n-1)} + \lambda_1(x)y^{(n)} + \ldots + \lambda_{n-1}(x)y^{(2n-2)} + y^{(2n-1)} = 0.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Aceasta este posibil deoarece determinantul sistemului este $\Delta_{n-1}[y]\neq 0$. Funcţiile $\lambda_0(x), \lambda_1(x), \ldots, \lambda_{n-1}(x)$ sînt şi derivabile. Din cauza ecuaţiei diferenţiale (1), putem adăuga la ecuaţiile precedente şi ecuaţia

$$\lambda_0(x)\, y^{(n)} + \lambda_1(x)y^{(n+1)} + \ldots + \lambda_{n-1}(x)y^{(2n-1)} + y^{(2n)} = 0. \tag{5'}$$

Derivînd pe rînd fiecare ecuaţie (5) şi ţinînd seama de ecuaţia următoare, ultima fiind (5′), se deduc ecuaţiile

$$
\begin{aligned}
&\lambda_0'(x)y + \lambda_1'(x)y' + \ldots + \lambda_{n-1}'(x)y^{(n-1)} = 0\\
&\lambda_0'(x)y' + \lambda_1'(x)y'' + \ldots + \lambda_{n-1}'(x)y^{(n)} = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\lambda_0'(x)y^{(n-1)} + \lambda_1'(x)y^{(n)} + \ldots + \lambda_{n-1}'(x)y^{(2n-2)} = 0
\end{aligned}
$$

liniare şi omogene în $\lambda_0'(x), \lambda_1'(x), \ldots, \lambda_{n-1}'(x)$ cu determinantul $\Delta_{n-1}[y]\neq 0$. Rezultă că

$$\lambda_0'(x)=0, \quad \lambda_1'(x)=0, \ldots, \quad \lambda_{n-1}'(x)=0$$

adică

$$\lambda_0(x)=A_n, \quad \lambda_1(x)=A_{n-1}, \ldots, \quad \lambda_{n-1}(x)=A_1.$$

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ fiind constante ataşate funcţiei $y(x)$; făcînd în sistemul de ecuaţii (5) $x=x_0$, observăm că $A_1, A_2, \ldots, A_n$, sînt date de ecuaţiile

$$
\begin{aligned}
&A_n y_0 + A_{n-1} y_0' + \ldots + A_1 y_0^{(n-1)} + y_0^{(n)} = 0\\
&A_n y_0' + A_{n-1} y_0'' + \ldots + A_1 y_0^{(n)} + y_0^{(n+1)} = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&A_n y_0^{(n-1)} + A_{n-1} y_0^{(n)} + \ldots + A_1 y_0^{(2n-2)} + y_0^{(2n-1)} = 0
\end{aligned}
\tag{6}
$$

unde

$$y^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)} \qquad (k=0, 1, 2, \ldots, 2n-1) \tag{7}$$

sînt *condiţiile lui Cauchy*.

Rezultă că *orice integrală a ecuaţiei diferenţiale* (1) *pentru care* $\Delta_{n-1}[y]\neq 0$, *este integrala ecuaţiei diferenţiale*

$$y^{(n)} + A_1 y^{(n-1)} + \ldots + A_n y = 0 \tag{8}$$

cu coeficienţi constanţi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *determinaţi prin sistemul de ecuaţii liniare* (6) *de condiţiile lui Cauchy.*

Invers, orice integrală a ecuaţiei cu coeficienţi constanţi (8), *pentru care* $\Delta_{n-1}[y]\neq 0$, *este integrală a ecuaţiei diferenţiale* (1), *ceea ce se dovedeşte imediat.*

2. Ecuaţia caracteristică a ecuaţiei diferenţiale (8) se obţine eliminînd pe $A_1, A_2, \ldots, A_n$, între ecuaţiile (6) şi ecuaţia

$$r^n + A_1 r^{n-1} + \ldots + A_n = 0. \tag{9}$$

Aceasta este posibil deoarece s-a presupus $\Delta_{n-1}[y(x_0)]\neq 0$. Ecuaţia caracteristică este deci

$$\varphi(r) = \begin{vmatrix} 1 & r & r^2 & \ldots r^n \\ y_0 & y_0' & y_0'' & \ldots y_0^{(n)} \\ y_0' & y_0'' & y_0''' & \ldots y_0^{(n+1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_0^{(n-1)} & y_0^{(n)} & y_0^{(n+1)} & \ldots y_0^{(2n-1)} \end{vmatrix} = 0 \tag{9'}$$

Să presupunem că condiţiile iniţiale (7) sînt astfel alese ca *ecuaţia caracteristică* (9′) *să aibă toate rădăcinile* $r_1, r_2, \ldots, r_n$ *distincte.* În acest caz

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \ldots + C_n e^{r_n x} \tag{10}$$

este integrală a ecuaţiei diferenţiale (8) şi va fi integrală a ecuaţiei diferenţiale (1), dacă arătăm că $\Delta_{n-1}[y]\neq 0$, ceea ce se întîmplă cînd

$$C_1 C_2 \ldots C_n \neq 0. \tag{11}$$

Într-adevăr

$$\Delta_{n-1}[y] = \begin{vmatrix} C_1 e^{r_1 x} & C_2 e^{r_2 x} & \ldots C_n e^{r_n x} \\ C_1 r_1 e^{r_1 x} & C_2 r_2 e^{r_2 x} & \ldots C_n r_n e^{r_n x} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ C_1 r_1^{n-1} e^{r_1 x} & C_2 r_2^{n-1} e^{r_2 x} & \ldots C_n r_n^{n-1} e^{r_n x} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & r_1 & \ldots r_1^{n-1} \\ 1 & r_2 & \ldots r_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & r_n & \ldots r_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

adică

$$\Delta_{n-1}[y] = C_1 C_2 \ldots C_n V^2(r_1, r_2, \ldots, r_n) e^{(r_1+r_2+\ldots+r_n)x} \tag{12}$$

unde $V(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ este determinantul lui Vandermonde al numerelor distincte $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Cînd condiţia (11) este indeplinită, formula (10) este o integrală a ecuaţiei diferenţiale (1). Această integrală este definită în intervalul $(-\infty, +\infty)$ şi condiţia $\Delta_{n-1}[y]\neq 0$ este valabilă în intervalul $(-\infty, +\infty)$.

Integrala care corespunde la condiţiile lui Cauchy (7) se obţine determinînd pe $A_1, A_2, \ldots, A_n$ din ecuaţiile (6) şi apoi punînd

$$C_1 e^{r_1 x_0} = C_1', \quad C_1 e^{r_2 x_0} = C_2', \ldots, C_n e^{r_n x_0} = C_n' \tag{13}$$

rămîne să determinăm pe $C'_1, C'_2, \ldots, C'_n$ din sistemul de ecuații

$$\begin{array}{l} C'_1 + C'_2 + \ldots + C'_n = y_0 \\ C'_1 r_1 + C'_2 r_2 + \ldots + C'_n r_n = y'_0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ C'_1 r_1^{n-1} + C'_2 r_2^{n-1} + \ldots + C'_n r_n^{n-1} = y_0^{(n-1)} \end{array} \tag{14}$$

Observăm că nu se poate ca toate numerele $C'_1, \ldots, C'_n$ să fie nule. Ar urma că $y_0 = y'_0 = \ldots = y_0^{(n-1)} = 0$ și deci ca $\Delta_{n-1}[y(x_0)] = 0$, ceea ce este contrar ipotezei. Să demonstrăm că nu se poate nici ca măcar unul dintre $C'_1, \ldots, C'_n$ să fie nuli.

Într-adevăr, să presupunem că am avea $C'_1 = 0$. Atunci numerele $r_2, \ldots, r_n$ fiind distincte, între ecuațiile

$$\begin{array}{l} C'_2 + C'_3 + \ldots + C'_n = y_0 \\ C'_2 r_2 + C'_3 r_3 + \ldots + C'_n r_n = y'_0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ C'_2 r_2^{n-1} + C'_3 r_3^{n-1} + \ldots + C'_n r_n^{n-1} = y_0^{(n-1)} \end{array}$$

se poate elimina $C'_2, \ldots, C'_n$. Se obține o relație de forma

$$y_0^{(n-1)} + p_1 y_0^{(n-2)} + p_2 y_0^{(n-3)} + \ldots + p_{n-1} y_0 = 0 \tag{15}$$

unde

$$p_1 = -(r_2 + r_3 + \ldots + r_n), \quad p_2 = r_2 r_3 + \ldots + r_{n-1} r_n, \ldots p_{n-1} = (-1)^{n-1} r_2 r_3 \ldots r_n$$

În ecuațiile (6) să înlocuim

$$A_1 = p_1 - r_1, \quad A_2 = p_2 - p_1 r_1, \quad A_3 = p_3 - p_2 r_1, \ldots, A_{n-1} = p_{n-1} - p_{n-2} r_1 A_n = -p_{n-1} r_1.$$

Prima ecuație (6) se scrie

$$y_0^{(n)} + (p_1 - r_1) y_0^{(n-1)} + (p_2 - p_1 r_1) y_0^{(n-2)} + \ldots + (p_{n-1} - p_{n-2} r_1) y'_0 - p_{n-1} r_1 y_0 = 0$$

și ținînd seama de ecuația (15) coeficientul lui r_1 este nul, și ecuația se reduce la

$$y_0^{(n)} + p_1 y_0^{(n-1)} + p_2 y_0^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1} y'_0 = 0. \tag{15'}$$

Mai departe, ținînd seama de aceasta, a doua ecuație (6) se reduce la

$$y_0^{(n+1)} + p_1 y_0^{(n)} + p_2 y_0^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y''_0 = 0 \tag{15''}$$

și așa mai departe, pînă se obține penultima ecuație

$$y_0^{(2n-2)} + p_1 y_0^{(2n-3)} + p_2 y_1^{(2n-4)} + \ldots + p_{n-1} y_1^{(n-1)} = 0. \tag{15'''}$$

Dar în acest caz determinantul

$$\Delta_{n-1}[y(x_0)] = \begin{vmatrix} y_0 & y'_0 \ldots y_0^{(n-1)} \\ y'_0 & y''_0 \ldots y_0^{(n)} \\ \cdots & \cdots \\ y_0^{(n-1)} & y_0^{(n)} \ldots y_0^{(2n-2)} \end{vmatrix}$$

este nul deoarece între elementele liniilor există o aceeași combinație lineară exprimată prin formulele (15), (15'), (15''), (15'''). Aceasta însă contrazice ipoteza că

$$\Delta_{n-1}[y(x)] \neq 0.$$

Deci sub singura condiție că ecuația caracteristică (9') să aibă rădăcinile distincte, formula (10) în care $C_1 C_2 \ldots C_n \neq 0$ este integrală a ecuației diferențiale (1).

Observare. Determinarea constantelor $C_1, C_2, \ldots, C_n$; $r_1, r_2, \ldots, r_n$ din formula (10), astfel ca $y(x)$ să verifice condițiile lui Cauchy (7), se face punînd

$$C_1 e^{r_1 x_0} = C'_1, \quad C_2 e^{r_2 x_0} = C'_2, \ldots, C_n e^{r_n x_0} = C'_n$$

și rezolvînd sistemul de ecuații

$$\begin{array}{l} C'_1 + C'_2 + \ldots + C'_n = y_0 \\ C'_1 r_1 + C'_2 r_2 + \ldots + C'_n r_n = y'_0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ C'_1 r_1^{2n-1} + C'_2 r_2^{2n-2} + \ldots + C'_n r_n^{2n-1} = y_0^{(2n-1)} \end{array} \tag{16}$$

în raport cu $C'_1, C'_2, \ldots, C'_n$ și $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

Eliminarea lui $C'_1, C'_2, \ldots, C'_n$ între aceste ecuații duce la ecuațiile (6), unde

$$A_1 = -\Sigma r_1, \quad A_2 = \Sigma r_1 r_2 \ldots, \quad A_n = (-1)^n r_1 r_2 \ldots r_n.$$

Ecuația care determină pe $r_1, r_2, \ldots, r_n$ este ecuația (9').

Exemplu. Fiind dată funcția

$$Y(x) = \int_\alpha^\beta p(s) e^{sx} \, ds$$

unde $p(s)$ este o funcție pozitivă în intervalul (α, β), putîndu-se anula în α și β, *se poate determina o integrală a ecuației diferențiale* (1) *care să satisfacă la condițiile lui Cauchy*.

$$y(x_0) = Y(x_0), \quad y'(x_0) = Y'(x_0), \ldots, y^{(2n-1)}(x_0) = Y^{(2n-1)}(x_0)$$

Într-adevăr, sistemul de ecuații (16) corespunzător acestui caz este

$$\begin{array}{l} C'_1 + C'_2 + \ldots + C'_n = \int_\alpha^\beta p(s) e^{sx_0} \, ds \\ C'_1 r_1 + C'_2 r_2 + \ldots + C'_n r_n = \int_\alpha^\beta s p(s) e^{sx_0} \, ds \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ C'_1 r_1^{2n-1} + C'_2 r_2^{2n-1} + \ldots + C'_n r_n^{2n-1} = \int_\alpha^\beta s^{2n-1} p(s) e^{sx_0} \, ds. \end{array}$$

Acest sistem este clasic; el se întîlnește în teoria formulelor de cuadratură. Se demonstrează [5] că numerele $r_1, r_2, \ldots, r_n$ sînt toate reale, distincte și cuprinse între α și β, iar numerele $C'_1, C'_2, \ldots, C'_n$, adică $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sînt toate pozitive.

3. Integralele ecuaţiei diferenţiale (1) depind de condiţiile iniţiale (7). Ele pot fi astfel ca ecuaţia caracteristică (9′) a ecuaţiei diferenţiala (8) să aibă toate rădăcinile distincte, şi acest caz a fost studiat la punctul precedent. Se poate însă ca condiţiile iniţiale (9) să fie astfel încît ecuaţia caracteristică (9′) să aibă rădăcini multiple.

Să presupunem că condiţiile iniţiale (7) *sînt astfel încît ecuaţia caracteristică* (9′) *are rădăcina* r_1 *multiplă de ordinul* p_1, r_2, *multiplă de ordinul* $p_2, \ldots, r_k$ *multiplă de ordinul* p_k *unde*

$$p_1+p_2+\ldots+p_k=n.$$

În acest caz ecuaţia diferenţială (8) *are integrala*

$$\begin{aligned} y = &\left(\frac{C_1}{(p_1-1)\,!}x^{p_1-1}+\frac{C_{11}}{(p_1-2)\,!}x^{p_1-2}+\ldots+C_{1,p_1-1}\right)e^{r_1x}\\ &+\left(\frac{C_2}{(p_2-1)\,!}x^{p_2-2}+\frac{C_{21}}{(p_2-2)\,!}x^{p_2-2}+\ldots+C_{2,p_2-1}\right)e^{r_2x}\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+\left(\frac{C_k}{(p_k-1)\,!}x^{p_k-1}+\frac{C_{k1}}{(p_k-2)\,!}x^{p_k-2}+\ldots+C_{k,p_k-1}\right)e^{r_kx} \end{aligned} \tag{17}$$

şi avem

$$\Delta_{n-1}[y]=(-1)^k C_1^{p_1}C_2^{p_2}\ldots C_k^{p_k}\,V^2(\underbrace{r_1,\ldots,r_1}_{p_1\,ori},\underbrace{r_2,\ldots,r_2}_{p_2\,ori},\ \ ,\underbrace{r_k,\ldots,r_k}_{p_k\,ori})\,e^{(p_1r_1+\ldots+p_kr_kx}$$

unde determinantul $V(\underbrace{r_1,\ldots,r_1}_{p_1\,ori};\underbrace{r_2,\ldots,r_2}_{p_2\,ori},\ldots,\underbrace{r^k,\ldots,r_k}_{p_k\,ori})$ *are prima coloană formată din 1,* $r_1,\ldots,r_1^{n-1}$, *a doua din derivatele acestor elemente în raport cu* r_1 *împărţite cu* 1 !, *a treia cu derivatele de ordinul al doilea împărţite cu* 2 !,. . ., *a k-a din derivatele de ordinul k-*1 *a elementelor coloanei întîia împărţite cu* $(k-1)!$. *Următoarele* k_2 *coloane se formează în a elaşi mod, înlocuind pe* r_1 *cu* $r_2\ldots$, *şi aşa mai departe.*

Rezultă că dacă $C_1C_2\ldots C_k\neq 0$, y *este integrală a ecuaţiei diferenţiale* (1). Şi această integrală este definită în intervalul $(-\infty, +\infty)$, iar condiţia $\Delta_{n-1}[y]\neq 0$ este valabilă de asemenea în intervalul $(-\infty, +\infty)$.

Formula (18) se poate demonstra direct, însă calculele sînt complicate. Se ştie însă că integralele unei ecuaţii diferenţiale cu coeficienţi constanţi care corespund la o rădăcină multiplă se pot obţine din integralele care corespund la rădăcini distincte, printr-o trecere la limită. Vom folosi această trecere la limită pentru a demonstra formula (8).

Să presupunem că tratăm cazul cînd rădăcina r_1 este dublă, celelalte rădăcini fiind distincte.

Punînd $r_2=r_1+h$, pentru $h\neq 0$, ecuaţia diferenţială (8) are integrala

$$y=C_1\frac{e^{(r_1+h)x}-e^{r_1x}}{h}+C_2e^{r_1x}+C_3e^{r_3x}+\ldots+C_ne^{r_nx} \tag{19}$$

pe care o putem scrie sub forma

$$y=C_1'e^{r_1x}+C_2'e^{(r_1+h)x}+C_3e^{r_3x}+\ldots+C_ne^{r_nx} \tag{20}$$

unde

$$C_1'=C_2-\frac{C_1}{h},\quad C_2'=\frac{C_1}{h} \tag{21}$$

Cînd $h\to 0$, funcţia y are limita

$$y_1=(C_1x+C_2)e^{r_1x}+C_3e^{r_3x}+\ldots+C_ne^{r_nx} \tag{22}$$

şi y_1 este integrala ecuaţiei diferenţiale (8). Se demonstrează uşor că derivata de un ordin oarecare p al funcţiei y, tinde către derivata de acelaşi ordin al funcţiei y_1 cînd $h\to 0$, de unde rezultă că

$$\lim_{h\to 0}\Delta_{n-1}[y]=\Delta_{n-1}[y_1]. \tag{23}$$

Însă aplicînd formula (12) avem

$$\Delta_{n-1}[y]=C_1'C_2'C_3\ldots C_nV^2(r_1,r_1+h,r_3,\ldots,r_n)\,e^{(2r_1+h+r_3+\ldots+r_n)x}$$

Înlocuind pe C_1', C_2' cu formulele (21), vom avea

$$\Delta_{n-1}[y]=C_1(C_2h-C_1)C_3\ldots C_n\left[\frac{V(r_1,r_1+h,r_3,\ldots,r_n)}{h}\right]^2e^{(2r_1+h+r_3+\ldots+r_n)x}$$

Cînd facem pe $h\to 0$, obţinem

$$\lim_{h\to 0}\Delta_{n-1}[y]=-C_1^2C_3\ldots C_nV^2(r_1,r_1,r_3,\ldots,r_n)e^{(2r_1+r_3+\ldots+r_n)x}$$

deoarece

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \ldots & 1\\ r_1 & r_1+h & r_3 & \ldots & r_n\\ r_1^2 & (r_1+h)^2 & r_3^2 & \ldots & r_n^2\\ r_1^3 & (r_1+h)^3 & r_3^3 & \ldots & r_n^3\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ r_1^{n-1} & (r_1+h)^{n-1} & r_3^{n-1} & \ldots & r_n^{n-1}\end{vmatrix}=V(r_1,r_2,r_3\ldots,r_n).$$

Ţinînd seama de formula (23), deducem astfel că

$$\Delta_{n-1}[y_1]=-C_1^2C_3\ldots C_nV^2(r_1,r_1,r_3,\ldots,r_n)e^{(2r_1+r_3+\ldots+r_n)x} \tag{24}$$

Să presupunem acum că tratăm cazul cînd rădăcina r_1 este triplă, celelalte fiind distincte.

În integrala (22) a ecuaţiei diferenţiale (8), să punem $r_3=r_1+h$ şi să scriem această integrală sub forma

$$y=C_1\frac{e^{(r_1+h)x}-e^{r_1x}-hxe^{r_1x}}{h^2}+C_2\frac{e^{(r_1+h)x}-e^{r_1x}}{h}+C_3e^{r_1x}+C_4e^{r_4x}+\ldots+C_ne^{r_nx}$$

sau

$$y=(C_1' x+C_2') e^{r_1 x}+C_3' e^{(r_1+h)x}+C_4 e^{r_4 x}+\ldots+C_n e^{r_n x}$$

unde

$$C_1'=-\frac{C_1}{h},\quad C_2'=-\frac{C_1}{h^2}-\frac{C_2}{h}+C_3,\quad C_3'=\frac{C_1}{h^2}+\frac{C_2}{h} \tag{25}$$

Cînd $h \to 0$, y tinde către integrala

$$y_2=\left(C_1 \frac{x^2}{2\,!}+C_2 \frac{x}{1\,!}+C_3\right) e^{r_1 x}+C_4 e^{r_4 x}+\ldots+C_n e^{r_n x} \tag{26}$$

a ecuației diferențiale (8) și se demonstrează că

$$\lim_{h\to 0} \Delta_{n-1}[y]=\Delta_{n-1}[y_2]. \tag{27}$$

Pe de altă parte, ținînd seama de ecuația (24) și de formulele (25), putem scrie

$$\Delta_{n-1}[y]=-C_1^2(C_1+hC_2)C_4\ldots C_n\left[\frac{[V(r_1,r_1,r_1+h,r_4,\ldots,r_n)]}{h^2}\right. e^{(3r_1+h+r_4+\ldots+r_n)x}$$

Ținînd seama că

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & \ldots 1 \\ r_1 & 1 & r_1+h & r_4 & \ldots r_n \\ r_1^2 & C_2^1 r_1 & (r_1+h)^2 & r_4^2 & \ldots r_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_1^{n-1} & C_{n-1}^1 r_1^{n-2} & (r_1+h)^{n-1} & r_4^{n-1} & \ldots r_n^{n-1} \end{vmatrix}=V(r_1,r_1,r_1,r_4,\ldots,r_n)$$

și trecînd la limită în formula precedentă, deducem că

$$\lim_{h\to 0}\Delta_{n-1}[y]=-C_1^3 C_4\ldots C_n V^2(r_1,r_1,r_1 r_4,\ldots,r_n)\, e^{(3r_1+r_4+\ldots+r_n)x}$$

și conform formulei (27), vom avea

$$\Delta_{n-1}[y_2]=-C_1^3 C_4\ldots C_n V^2(r_1,r_1,r_1,r_4,\ldots,r_n)\, e^{(3r_1+r_4+\ldots+r_n)x}$$

Cu aceasta socotim că am dat suficiente lămuriri pentru a se putea termina demonstrarea formulei (18).

4. În rezumat, s-a pus în evidență integrala (10) a ecuației diferențiale (1) în care $C_1 C_2 \ldots C_n \neq 0$, precum și integralele de forma (17), în care $r_1, r_2, \ldots, r_k$ sînt numere distincte, k fiind 1, sau $2, \ldots$, sau $n-1$, polinoamele care înmulțesc pe $e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \ldots, e^{r_k x}$ fiind de grade efective $p_1-1, p_2-1, \ldots, p_{k-1}$, unde $p_1+p_2+\ldots+p_k=n$, adică $C_1 C_2 \ldots C_k \neq 0$. Pentru toate aceste integrale $\Delta_{n-1}[y]\neq 0$.

Să demonstrăm acum că *orice integrală a ecuației* $\Delta_q[y]=0$ *pentru care* $\Delta_{q-1}[y]\neq 0$, *unde* $q<n$, *este integrală a ecuației diferențiale* $\Delta_n[y]=0$.

Fie

$$\Delta_q[y]=\begin{vmatrix} y & y' & \ldots y^{(q-1)} & y^{(q)} \\ y' & y'' & \ldots y^{(q)} & y^{(q+1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y^{(q)} & y^{(q+1)} & \ldots y^{(2q-1)} & y^{(q)} \end{vmatrix}=0$$

ecuația diferențială și y o integrală a ei pentru care $\Delta_{q-1}[y]\neq 0$. Se demonstrează ca la nr. 1, că între elementele coloanelor determinantului $\Delta_q[y]$ există o aceeași relație lineară cu coeficienți constanți, adică

$$\begin{aligned} &B_q y + B_{q-1} y' + \ldots + B_1 y^{(q-1)} + y^{(q)} = 0 \\ &B_q y' + B_{q-1} y'' + \ldots + B_1 y^{(q)} + y^{(q+1)} = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &B_q y^{(q)} + B_{q-1} y^{(q+1)} + \ldots + B_1 y^{(2q-1)} + y^{(2q)} = 0. \end{aligned} \tag{28}$$

Dar coeficienții $B_1, B_2, \ldots, B_q$ fiind constanți, putem deriva succesiv ultima ecuație și vom obține

$$\begin{aligned} &B_q y^{(q+1)} + B_{q-1} y^{(q+2)} + \ldots + B_1 y^{(2q)} + y^{(2q+1)} = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &B_q y^{(n)} + B_{q-1} y^{(n+1)} + \ldots + B_1 y^{(n+q-1)} + y^{(n+q)} = 0. \end{aligned} \tag{28'}$$

Deducem astfel că

$$\Delta_n[y]=0$$

deoarece între elementele primelor $q+1$ coloane ale lui există o aceeași relație lineară, după cum arată formulele (28) și (28').

5. *Concluzie.* Fie y o integrală a ecuației $\Delta_n[y]=0$. Dacă ea nu verifică ecuația $\Delta_{n-1}[y]=0$, are forma (10), unde $C_1 C_2 \ldots C_n \neq 0$, sau forma (17), unde $k=1$, sau $2, \ldots$, sau $n-1$, iar $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$ sînt numere întregi pozitive sau nule astfel ca $p_1+p_2+\ldots+p_k=n$, iar $C_1 C_2 \ldots C_k \neq 0$.

Dacă însă integrala y a ecuației $\Delta_n[y]=0$ verifică ecuația $\Delta_{n-1}[y]=0$ dar nu verifică ecuația $\Delta_{n-2}[y=0$, ea are tot una din formele arătate la alineatul precedent, însă n se schimbă în $n-1$.

În general, dacă integrala y a ecuației $\Delta_n[y]=0$ verifică ecuațiile

$$\Delta_{n-1}[y]=0,\quad \Delta_{n-2}[y]=0, \ldots, \Delta_{n-j}[y]=0$$

dar

$$\Delta_{n-j-1}[y]\neq 0$$

atunci ea are una din formele arătate la alineatul 1, cu condiția să se schimbe n în $n-j$.

Exemplu. Să considerăm ecuația diferențială

$$\Delta_3[y]=0.$$

1°. Dacă o integrală a ei y este astfel încît $\Delta_2[y]\neq 0$, atunci ea are una din următoarele forme

$$y=C_1 e^{r_1 x}+C_2 e^{r_2 x}+C_3 e^{r_3 x}$$

unde r_1, r_2, r_3 sînt numere distincte și $C_1C_2C_3 \neq 0$, sau

$$y=(C_1x+C_2)e^{r_1x}+C_3e^{r_3x}$$

unde r_1, r_3 sînt numere distincte și $C_1C_2 \neq 0$ sau

$$y=\left(C_1\frac{x^2}{2\,!}+C_2\frac{x}{1\,!}+C_3\right)e^{r_1x}$$

unde $C_1 \neq 0$.

2°. Dacă integrala y a ecuației diferențiale $\Delta_3[y]=0$ verifică ecuația $\Delta_2[y]=0$, dar $\Delta_1[y] \neq 0$, atunci ea are una din următoarele forme

$$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$$

unde r_1 și r_2 sînt numere distincte și $C_1C_2 \neq 0$, sau

$$y=(C_1x+C_2)e^{r_1x}$$

unde $C_1 \neq 0$.

3°. Dacă integrala y a ecuației $\Delta_3[y]=0$ verifică ecuațiile $\Delta_2[y]=0$, $\Delta_1[y]=0$, dar $\Delta_0[y]=y \neq 0$, atunci ea are forma

$$y=C_1e^{r_1x}$$

unde $C_1 \neq 0$.

4°. Dacă, în fine, integrala y a ecuației diferențiale $\Delta_3[y]=0$ verifică ecuațiile $\Delta_2[y]=0$, $\Delta_1[y]=0$, $\Delta_0[y]=0$, ea este evident identic nulă.

6. Să trecem la integrarea ecuației diferențiale

$$\Delta_n[y]=Ae^{\alpha x} \tag{29}$$

unde A și α sînt constante și $A \neq 0$.

Pentru aceasta, ne vom servi de identitatea

$$\begin{vmatrix} \Delta_n[y] & \Delta_n'[y] \\ \Delta_n'[y] & \Delta_n''[y] \end{vmatrix} = \Delta_{n-1}[y]\,\Delta_{n+1}[y] \tag{30}$$

care se demonstrează în modul următor.

Să scriem determinantul $\Delta_{n+1}[y]$ sub forma

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots a_{1n} & a_{1,n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots a_{nn} & a_{n,n+1} \\ a_{n+1,1} & \dots a_{n+1,n} & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix}$$

și să observăm că avem

$$\Delta_n[y]=\frac{\partial D}{\partial a_{n+1,n+1}},\quad \Delta_n'[y]=-\frac{\partial D}{\partial a_{n,n+1}}=-\frac{\partial D}{\partial a_{r+1,n}},\quad \Delta_n''[y]=\frac{\partial D}{\partial a_{n,n}}.$$

Se știe că avem identitatea [4]

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial D}{\partial a_{n,n}} & \dfrac{\partial D}{\partial a_{n,n+1}} \\ \dfrac{\partial D}{\partial a_{n+1,n}} & \dfrac{\partial D}{\partial a_{n+1,n+1}} \end{vmatrix} = D_2\,D_1$$

unde D_2 este determinantul obținut din D prin suprimarea ultimelor două linii și coloane. Această identitate conduce la identitatea (30).

Fie y o integrală a ecuației diferențiale (29). Este evident că $u=Ae^{\alpha x}$ fiind o integrală a ecuației diferențiale $\Delta_1[u]=0$, vom avea aplicînd identitatea (30)

$$\Delta_{n-1}[y]\,\Delta_{n+1}[y]=0.$$

Dar nu se poate ca y să verifice ecuația $\Delta_{n-1}[y]=0$, fiindcă am avea și $\Delta_n[y]=0$, ceea ce este imposibil căci $A \neq 0$. Deci orice integrală a ecuației diferențiale (29) este integrală a ecuației diferențiale

$$\Delta_{n+1}[y]=0 \tag{31}$$

și prin urmare integralele ecuației diferențiale (29) trebuie căutate printre integralele ecuației diferențiale (31).

Să considerăm întîi integrala ecuației diferențiale (31)

$$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}+\dots+C_ne^{r_nx}+C_{n+1}e^{r_{n+1}x}$$

pentru care $\Delta_n[y] \neq 0$, adică $r_1, r_2, \dots, r_n, r_{n+1}$ sînt numere distincte iar $C_1C_2\dots C_nC_{n+1} \neq 0$. Conform formulei (12), avem

$$\Delta_n[y]=C_1C_2\dots C_nC_{n+1}V^2(r_1,r_2,\dots,r_n,r_{n+1})e^{(r_1+r_2+\dots+r_n+r_{n+1})x}$$

Pentru ca ecuația (29) să fie satisfăcută, vom alege

$$r_1+r_2+\dots+r_n+r_{n+1}=\alpha$$

$$C_1C_2\dots C_nC_{n+1}V^2(r_1,r_2,\dots,r_n,r_{n+1})=A.$$

Prima ecuație determină pe r_{n+1}, adică

$$r_{n+1}=\alpha-(r_1+r_2+\dots+r_n)$$

și vom alege pe $r_1, r_2, \dots, r_n$ astfel ca $r_1, r_2, \dots, r_n, r_{n+1}$ să fie numere distincte. Atunci a doua ecuație determină pe C_{n+1} și vom avea

$$C_{n+1}=\frac{A}{C_1C_2\dots C_nV^2[r_1,r_2\dots r_n,\alpha-(r_1+r_2+\dots+r_n)]}.$$

Integrala ecuației (29) se prezintă sub forma

$$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}+\dots+C_ne^{r_nx}+\frac{Ae^{[\alpha-(r_1+r_2+\dots+r_n)]x}}{C_1C_2\dots C_nV^2[r_1,r_2,\dots,r_n,\alpha-(r_1+r_2+\dots+r_n)]}$$

Să considerăm însă și integralele ecuației diferențiale (31) de forma (17), adică

$$
\begin{aligned}
y = & \left[\frac{C_1}{(p_1-1)!}x^{p_1-1} + \frac{C_{1,1}}{(p_1-2)!}x^{p_1-2} + \ldots + C_{1,p_1-1}\right]e^{r_1x} \\
& + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + \left[\frac{C_{k-1}}{(p_{k-1}-1)!}x^{p_{k-1}-1} + \frac{C_{k-1,1}}{(p_{k-1}-2)!}x^{p_{k-1}-2} + \ldots + C_{k-1,p_{k-1}-1}\right]e^{r_{k-1}x} \\
& + \left[\frac{C_k}{(p_k-1)!}x^{p_k-1} + \frac{C_{k-1,1}}{(p_k-2)!}x^{p_k-2} + \ldots + C_{k,p_k-1}\right]e^{r_kx}
\end{aligned}
\tag{33}
$$

unde

$$p_1+p_2+\ldots+p_k=n+1 \tag{34}$$

iar $r_1, r_2, \ldots, r_k$ sînt distincte. Conform formulei (18), avem

$$\Delta_n[y] = (-1)^k C_1^{p_1}C_2^{p_2}\ldots C_{k-1}^{p_{k-1}}C_k^{p_k}V^2(\underbrace{r_1,\ldots,r_1}_{p_1\ ori},\ldots,\underbrace{r_k,\ldots,r_k}_{p_1\ ori})\, e^{(p_1r_1+\ldots+p_kr_k)x}$$

Pentru ca membrul al doilea să se reducă la $Ae^{\alpha x}$, vom alege

$$p_1r_1+\ldots+p_{k-1}r_{k-1}+p_kr_k=\alpha$$

$$(-1)^k C_1^{p_1}C_2^{p_2}\ldots C_k^{p_k}V^2(\underbrace{r_1,\ldots,r_1}_{p_1\ ori},\ldots,\underbrace{r_k,\ldots,r_k}_{p_k\ ori})=A$$

unde numerele $p_1, p_2, \ldots, p_{k-1}, p_k$ sînt fixate astfel ca să avem relația (34) și ca $p_k \neq 0$.

Atunci vom lua

$$r_k = \frac{\alpha-(p_1r_1+\ldots+p_{k-1}r_{k-1})}{p_k} \tag{35}$$

numerele $r_1, r_2, \ldots, r_{k-1}$ fiind astfel alese ca toate numerele $r_1, r_2, \ldots, r_k$ să fie distincte.

Mai departe vom lua

$$C_k = \sqrt[p_k]{\frac{A}{(-1)^k C_1^{p_1}C_2^{p_2}\ldots C_{k-1}^{p_{k-1}}V^2(\underbrace{r_1,\ldots,r_1}_{p_1\ ori},\ldots,\underbrace{r_k,\ldots,r_k}_{p_k\ ori})}}$$

și atunci ecuația diferențială (29) mai are integralele date de formula (33), unde r_k și C_k sînt date de formulele (35) și (36).

Exemple.

1°. *Ecuația lănțișorului.* Aceasta este

$$\Delta\,[y] = \begin{vmatrix} y & y' \\ y' & y'' \end{vmatrix} = 1.$$

Integrala ei se găsește printre integralele ecuației diferențiale

$$\Delta_2[y]=0.$$

Această ecuație are integrale de forma

$$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x} \tag{37}$$

și

$$y=(C_1x+C_2)e^{r_1x}. \tag{38}$$

Pentru aceste integrale avem

$$\Delta_1[y]=C_1C_2(r_1-r_2)^2e^{(r_1+r_2)x}$$
$$\Delta_1[y]=-C_1^2e^{2r_1x}.$$

Pentru integralele de forma (37), ca să avem $\Delta_1[y]=1$ vom alege

$$r_1+r_2=0, \quad r_1-r_2=\frac{1}{\sqrt{C_1C_2}}$$

care ne conduce la

$$y=C_1e^{\frac{x}{2\sqrt{C_1C_2}}}+C_2e^{-\frac{x}{2\sqrt{C_1C_2}}} \tag{37'}$$

Pentru integralele de forma (38), ca să avem $\Delta_1[y]=1$ vom alege $r_1=0$, $C_1=i$, ceea ce ne conduce la

$$y=ix+C_2. \tag{38'}$$

Integralele ecuației diferențiale a lănțișorului sînt (37′) și (38′).

2°. *Ecuația lui Darboux.* Este ecuația

$$\Delta_2[y] = \begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ y' & y'' & y''' \\ y'' & y''' & y^{IV} \end{vmatrix} = 1.$$

Integralele ei se găsesc printre integralele ecuației

$$\Delta_3[y]=0$$

care sînt de forma

$$y = C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}+C_3e^{r_3x} \tag{39}$$

$$y = (C_1x+C_2)e^{r_1x}+C_3e^{r_3x} \tag{40}$$

$$y = \left(C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3\right)e^{r_1x} \tag{41}$$

Pentru aceste tipuri de integrale, avem

$$\Delta_2[y]=C_1C_2C_3\,V^2(r_1,r_2,r_3)e^{(r_1+r_2+r_3)x}$$
$$\Delta_2[y]=-C_1^2C_3\,V^2(r_1,r_1,r_3)e^{(2r_1+r_3)x}$$
$$\Delta_2[y]=-C_1^3e^{3r_1x}$$

Pentru ca $\Delta_2[y]$ să fie egal cu 1, vom alege în primul caz

$$r_3=-(r_1+r_2),\quad C_3=\frac{1}{C_1C_2V^2[r_1,r_2,-(r_1+r_2)]}$$

în al doilea caz

$$r_3=-2r_1,\quad C_3=-\frac{1}{C_1^2\,V^2(r_1,r_1,-2r_1)}$$

iar în al treilea caz

$$r_1=0 \qquad C_1=-1.$$

Aceasta ne conduce la următoarele integrale ale ecuației lui Darboux :

$$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}+\frac{e^{-(r_1+r_2)x}}{C_1C_2(r_2-r_1)^2(2r_1+r_2)^2(r_1+2r_2)^2} \tag{39}$$

$$y=(C_1x+C_2)\,e^{r_1x}-\frac{e^{-2r_1x}}{81C_1^2\,r_1^4} \tag{40'}$$

$$y=-\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3 \tag{41'}$$

BIBLIOGRAFIE

1. H. Löwner, *Über monotone Matrixfunctionen.* Math. Zeit., 38 (1934) 177–216.
2. G. Darboux, *Sur une équation différentielle du quatrième ordre.* C. R. de l'Ac. des Sci. de Paris, t. CXLI, p. 415–417.
3. — *Sur une équation différentielle du quatrième ordre,* C. R. de l'Ac. des Sci. de Paris, t. CXLI, p. 483–484.
4. A. G. Kuros, *Curs de algebră superioară.* Ed. tehnică, Buc., 1955, p. 133.
5. Th. J. Stieltjes, *Quelques recherches sur la théorie des quadratures dites mécaniques.* Ann. de l'Ecole Normale Supérieure, 1884, p. 409–426.
6. D. V. Ionescu, *Cuadraturi numerice.* Ed. tehnică, Buc., 1957, p. 262.

Интегрирование одного дифференциального уравнения

(Краткое содержание)

В этой работе интегрируется дифференциальное уравнение (1) $\Delta_n[y]=0$ и дифференциальное уравнение (2) $\Delta_n[y]=Ae^{\alpha x}$, где A и α — константы. Уравнение $\Delta_1[y]=1$ является дифференциальным уравнением цепной линии, а уравнение $\Delta_2[y]=1$ была изучена Г. Дарбу [1, 2].

Интегралы уравнения $\Delta_n[y]=A$, для которых $\Delta_{n-1}[y]\neq 0$, даны формулами (10) и (17) и они верны во всем интервале $(-\infty, +\infty)$.

Для этих интегралов имеем формулы (12) и (18), которые верны в интервале $(-\infty, +\infty)$.

Доказывается, что любой итеграл уравнения $\Delta_q[y]=0$ с $\Delta_{q-1}[y]\neq 0$, где $q<n$, является также интегралом $\Delta_n[y]=0$.

С помощью этих результатов, получаются все интегралы дифференциального уравнения $\Delta_n[y]=0$.

В качестве применения, интегрируется дифференциальное уравнение (2), предварительно доказывая тождество (30), которое сводит отыскание интегралов уравнения (2) к интегрированию уравнения $\Delta_{n+1}[y]=0$. Результаты даны формулами (32) и (33), где γ_k и C_k даны формулами (35) и (36).

Интегралы дифференциального уравнения Дарбу (4) даны посредством формул (39'), (40'), (41').

L'intégration d'une équation différentielle

(Résumé)

Dans ce mémoire on intègre l'équation différentielle(1), $\Delta_n[y]=0$ et l'équation différentielle (2) $\Delta_n[y]=Ae^{\alpha x}$, où A et α sont des constantes. L'équation $\Delta_1[y]=1$ est l'équation différentielle de la chaînette et l'équation $\Delta_2[y]=1$ a été étudiée par G. Darboux [1, 2].

Les intégrales de l'équation $\Delta_n[y]=0$ pour lesquelles $\Delta_{n-1}[y]\neq 0$ sont données par les formules (10) et (17) valables dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$. Pour ces intégrales on a les formules (12) et (18), valables dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$.

On démontre aussi que toute intégrale de l'équation $\Delta_q[y]=0$, avec $\Delta_{q-1}[y]\neq 0$, où $q<n$, est également intégrale de l'équation $\Delta_n[y]=0$.

A l'aide de ces résultats on obtient toutes les intégrales de l'équation différentielle $\Delta_n[y]=0$.

Comme application on intègre l'équation différentielle (2), en démontrant au préalable l'identité (30) qui amène la recherche des intégrales de l'équation (2) à l'intégration de l'équation $\Delta_{n+1}[y]=0$. Les résultats sont donnés par les formules (32) et (33) où γ_k et C_k sont données par les formules (35) et (36).

Les intégrales de l'équation différentielle (4) de Darboux sont données par les formules (39'), (40'), (41').