DESPRE APLICABILITATEA TEOREMEI INEGALITĂŢILOR DIFERENŢIALE A LUI S. A CIAPLÎGHIN ÎN CAZUL ECUAŢIILOR DIFERENŢIALE LINIARE

DE

OLEG ARAMĂ

(Cluj)

Lucrare prezentată la sesiunea ştiinţifică a Filialei din Cluj a Academiei R. P. R., din 7—9 decembrie 1962.

1. Fie operatorul diferenţial liniar şi omogen de ordinul n

$$L_n[y] = a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y, \tag{1}$$

avînd coeficienţii continui într-un interval $[a, b)$ şi $a_0(x) \neq 0$ în $[a, b)$. Ne vom folosi de următoarea definiţie :

DEFINIŢIA 1. *Spunem că operatorul L_n are proprietatea $T_n[a, b)$, dacă oricare ar fi $x_0 \in [a, b)$ şi oricare ar fi funcţia $f(x)$ aparţinînd clasei $C^n[x_0, b)$ şi satisfăcînd condiţiile :*

$$f(x_0) = f'(x_0) + \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \tag{2}$$

precum şi inegalitatea diferenţială

$$L_n[f(x)] > 0, \text{ pentru } x \in (x_0, b), \tag{3}$$

acea funcţie verifică în intervalul (x_0, b) inegalitatea

$$f(x) > 0, \quad x \in (x_0, b). \tag{4}$$

Se ştie [30] că fiind dat un operator diferenţial L_n de forma (1), acesta nu verifică în general proprietatea T_n în întregul interval $[a, b)$ de continuitate al coeficienţilor săi, dar există întotdeauna un număr h suficient de mic, astfel ca L_n să aibă proprietatea T_n $[a, a + h)$.

Problema aflării condiţiilor în care un operator L_n de forma (1) are într-un interval dat proprietatea T_n a format obiectul a numeroase lucrări, dintre care au o mai strînsă legătură cu cercetarea de faţă lucrările efectuate de către N. V. Azbelev [5—8], N. V. Azbelev și Z. B. Ţaliuk [10—12], N. V. Azbelev, L. F. Rahmatullina și Z. B. Ţaliuk [9], Z. B. Ţaliuk [27—29], R. G. Aliev [1], N. A. Kaşceev [14], G. P. Kuhta [15]. Ţinem să menţionăm de asemenea contribuţiile aduse la teoria inegalităţilor diferenţiale şi la unele extinderi ale acestei teorii de către T. Wazewski [37, 38], J. Szarski [25, 26], A. N. Baluev [13] şi W. Mlak [19].

Fie $K(x, \alpha)$ funcţia lui Cauchy corespunzătoare operatorului diferenţial L_n, adică soluţia $y(x)$ a ecuaţiei $L_n[y] = 0$, care satisface în punctul $x = \alpha$ condiţiile

$$y(\alpha) = y'(\alpha) = \ldots = y^{(n-2)}(\alpha) = 0, \; y^{(n-1)}(\alpha) = 1, \; \alpha \in [a, b) \tag{5}$$

După cum se ştie [14, 3], condiţia necesară şi suficientă ca operatorul L_n să aibă proprietatea $T_n[a, a + h)$ este ca funcţia lui Cauchy $K(x, \alpha)$ a operatorului (1) să fie nenegativă în domeniul triunghiular al variabilelor x şi α, definit de inegalităţile

$$(D): \qquad a < \alpha < x < a + h \tag{6}$$

Condiţii necesare şi suficiente ca funcţia lui Cauchy asociată operatorului L_n să fie diferită de zero în domeniul (D) definit de inegalităţile (6) au fost obţinute de N. V. Azbelev şi Z. B. Ţaliuk în lucrările [11, 12] şi de către E. S. Cicikin [34].

Astfel, problema determinării subintervalului maximal de forma $[a, a + h)$, conţinut în $[a, b)$, în care operatorul L_n are proprietatea T_n revine la aflarea marginii superioare a numerelor h $(0 < h \leq b - a)$, care au proprietatea că funcţia lui Cauchy $K(x, \alpha)$ este nenegativă în domeniul variabilelor x şi α, definit de inegalităţile (6). Fie H această margine superioară. Dintr-o cunoscută teoremă de interpolare a lui De la Vallée Poussin [35], rezultă delimitarea $H \geq h_0$, h_0 reprezentînd rădăcina pozitivă a următoarei ecuaţii în h:

$$M_n(h)\frac{h^n}{n!} + M_{n-1}(h)\frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + M_1(h)\frac{h}{1!} - 1 = 0,$$

unde

$$M_k(h) = \max_{a \leq x \leq a+h} |a_k(x)| \qquad (0 < h < b - a).$$

Formulări îmbunătăţite ale teoremei de interpolare a lui De la Vallée Poussin au fost obţinute de A. Iu. Levin în lucrarea [16], precum şi de autorul acestui articol, în lucrarea [2]. Aceste teoreme ne furnizează intervale de forma $[a, a + h)$, în care operatorul L_n are proprietatea $I_n^*[a, a + h)$ (a se vedea definiţia 2). Evident, proprietatea $I_n^*[a, a + h)$ atrage după sine pozitivitatea funcţiei lui Cauchy $K_n(x, \alpha)$ în domeniul triunghiular $a<\alpha<x<a+h$, şi în consecinţă — proprietatea $T_n[a, a + h)$ [1])

[1]) Reciproca acestei afirmaţii nu este adevărată, după cum se poate constata pe exemplul ecuaţiei $y^{(4)} - y = 0$.

În lucrarea de faţă se stabilesc teoreme de tipul teoremei lui De la Vallée Poussin, care permit în anumite condiţii, obţinerea unor intervale mai mari de forma $[a, a + h)$, în care operatorul L_n are proprietatea T_n. Metoda de lucru este întrucîtva analoagă cu aceea utilizată în lucrarea noastră anterioară [2] şi se bazează pe o idee a lui De la Vallée Poussin formulată în lucrarea [35].

Înainte de a trece la expunerea propriu-zisă a lucrării, relevăm faptul că proprietatea $T_n[a, a + h)$ este echivalentă cu următoarea proprietate de interpolare:

Oricare ar fi numerele x_1 şi x_2 satisfăcînd condiţia $a \leq x_1 < x_2 < a + h$, şi oricare ar fi numerele $y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-2)}$ şi y_2, ecuaţia $L_n[y] = 0$ admite o integrală şi una singură, care să satisfacă următoarelor condiţii bilocale:

$$y(x_1) = y_1, \; y'(x_1) = y_1', \ldots, y^{(n-2)}(x_1) = y_1^{(n-2)},$$
$$y(x_2) = y_2.$$

(Pentru demonstraţia acestei afirmaţii a se vedea lema 4 din lucrarea de faţă.) Problema legăturii care există între studiul inegalităţilor diferenţiale liniare, în sensul lucrărilor lui S. A. Ciaplîghin şi studiul interpolării cu soluţiile ecuaţiilor diferenţiale liniare, a fost relevată de mai mulţi autori, dintre care amintim E. Moldovan [21], N. V. Azbelev şi Z. B. Taliuk [11, 12], E. S. Cicikin [31, 32, 33], R. G. Aliev [1] şi O. Aramă [3, 4].

2. Vom da la început cîteva rezultate preliminare, de care ne vom servi în cursul acestei expuneri.

DEFINIŢIA 2. *Spunem că operatorul L_n are proprietatea $I_n^*[a, b)$, dacă oricare ar fi m noduri distincte $x_1, x_2, \ldots, x_m$ din intervalul (a, b)* (m fiind arbitrar) *şi oricare ar fi sistemele de numere reale*

$$\{y_1, y^1, \ldots, y_1^{(p_1-1)}\}, \{y_2, y_2', \ldots, y_2^{(p_2-1)}\}, \ldots, \{y_m, y_m', \ldots, y_m^{(m-1)}\}$$

$(p_1 + p_2 + \ldots + p_m = n)$, *ecuaţia diferenţială $L_n[y] = 0$ admite o soluţie şi una singură, satisfăcînd condiţiilor*

$$y(x_k) = y_k, \; y'(x_k) = y_k', \ldots, y_k^{(p_k-1)}(x_k) = y_k^{(p_k-1)} \; (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Proprietatea $I_n^*[a, b)$ este echivalentă cu următoarea proprietate de neoscilaţie:

Oricare ar fi soluţia neidentic nulă $y(x)$, ea nu se poate anula în intervalul $[a, b)$ mai mult de $n - 1$ ori, fiecare rădăcină fiind considerată de atîtea ori, cît indică ordinul ei de multiplicitate.

În lucrarea [24], G. Pólya dă o caracterizare a proprietăţii $I_n^*[a,b)$, care cu unele completări [2] se poate formula astfel:

TEOREMA A. *Fie* $y_j(x)$ $(j = 1, \ldots, n)$ *un sistem de integrale al ecuației* $L_n[y] = 0$, *satisfăcînd condițiilor*

$$y_j^{(n-i)}(a) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } j = i \\ 0 \text{ dacă } j \neq i \end{cases}$$

Condiția necesară și suficientă ca operatorul L_n *să aibă proprietatea* $I_n^*[a, b)$ *este ca să fie satisfăcute în intervalul deschis* (a, b) *relațiile*

$$y_1(x) \neq 0,\ W[y_1(x), y_2(x)] \neq 0, \ldots, W[y_1(x), \ldots, y_{n-1}(x)] \neq 0.$$

Pentru operatorii diferențiali liniari și omogeni L_n care au proprietatea $I_n^*[a, b)$, au loc următoarele două teoreme de medie stabilite tot de către G. Pólya în lucrarea [24]:

TEOREMA B. *In ipoteza că operatorul* L_n *are proprietatea* $I_n^*[a, b)$, *fie* $\varphi(x)$ *o funcție din clasa* $C^n[a, b)$, *care se anulează de* $n + p$ *ori în intervalul* $[a, b)$. *Atunci funcția* $\Phi(x) = L_n[\varphi(x)]$ *se anulează de cel puțin* p *ori în intervalul cuprins între cea mai mică și cea mai mare rădăcină din* $[a, b)$ *a funcției* $\varphi(x)$.

TEOREMA C. *In ipoteza că operatorul* L_n *are proprietatea* $I_n^*[a, b)$, *fie* $f(x)$ *o funcție din clasa* $C^n[a, b)$ *și fie* $H(x)$ *soluția ecuației omogene* $L_n[y] = 0$, *care ia valori egale cu valorile funcției în* n *puncte* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *din intervalul* $[a, b)$ (aceste puncte pot fi distincte sau confundate pe grupe). *Fie apoi* $N(x)$ *integrala ecuației neomogene* $L_n[y] = 1$, *care se anulează în punctele* $x_1, x_2, \ldots, x_n$. *Atunci, pentru orice* $x \in [a, b)$ *există cîte un punct intermediar* ξ *situat între cel mai mic și cel mai mare din numerele* $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$, *astfel încît să aibă loc egalitatea*

$$f(x) = H(x) + N(x) \cdot L_n[f(\xi)].$$

În aceleași ipoteze privitoare la operatorul L_n, formula de medie exprimată de teorema C a fost regăsită de H. Petersson [23] cu ocazia unui studiu privind interpolarea cu ajutorul soluțiilor ecuațiilor diferențiale liniare.

În cele ce urmează vom arăta întîi că dacă $n - 1$ dintre nodurile care intervin în enunțul teoremelor B și C se presupun confundate atunci afirmațiile acestor teoreme se mențin adevărate și în condiția mai largă cînd în locul proprietății $I_n^*[a, b)$ se presupune că operatorul L_n are proprietatea $T_n[a, b)$. Această proprietate, după cum s-a mai menționat anterior, este echivalentă cu proprietatea de nenegativitate a funcției lui Cauchy $K(x, \alpha)$ în domeniul $a < \alpha < x < b$. Vom stabili următoarele leme:

LEMA 1. *Presupunem că operatorul* L_n *din* (1) *are coeficienții continui într-un interval* $[a, b)$ *și* $a_0(x) \neq 0$ *în* $[a, b)$. *Fie* $K(x, \alpha)$ *funcția lui Cauchy asociată acestui operator, adică soluția ecuației* $L_n[y] = 0$, *satisfăcînd condițiile* (5). *Presupunem de asemenea că are loc relația* $K(x, \alpha) \geqq 0$ *în triunghiul* D *definit de inegalitățile* (6). *In aceste ipoteze, fie* $\Phi(x)$ *o funcție din clasa* $C^n[a, b)$ *care se anulează într-un punct* $x_0 \in [a, b)$ *împreună cu primele ei* $n - 1$ *derivate și care se mai anulează în cel puțin un punct* x_1 $(x_1 > x_0)$ *din intervalul* $[a, b)$:

$$\Phi(x_0) = \Phi'(x_0) = \ldots = \Phi^{(n-1)}(x_0) = 0,\ \Phi(x_1) = 0. \tag{7}$$

Atunci există cel puțin un punct $\xi \in (x_0, x_1)$, *astfel încît să aibă loc formula de medie*

$$L_n[\Phi(\xi)] = 0. \tag{8}$$

Demonstrație. Să presupunem contrariu, că în ipotezele lemei, ar avea loc relația $L_n[\Phi(x)] \neq 0$ pentru orice $x \in (x_0, x_1)$. Pentru fixarea ideilor să presupunem că de exemplu $L_n[\Phi(x)] > 0$ pentru $x \in (x_0, x_1)$. Atunci, întrucît prin ipoteză funcția $\Phi(x)$ aparține clasei $C^n[a, b)$ și se anulează în punctul $x = x_0$ împreună cu primele ei $n - 1$ derivate, are loc identitatea

$$\Phi(x) = \int_{x_0}^{x} K(x, \alpha) L_n[\Phi(\alpha)] d\alpha.$$

Se constată însă din condițiile (5) pe care le verifică funcția $K(x, \alpha)$, că oricare ar fi numărul x fixat din intervalul (a, b), această funcție ia valori pozitive cînd α se situează într-o vecinătate de forma $x - \varepsilon < \alpha < x$, unde ε este un număr pozitiv suficient de mic. De aici și din ipotezele $L_n[\Phi(x)] > 0$ pentru $x \in (x_0, x_1)$ și $K(x, \alpha) \geqq 0$ pentru $(\alpha, x) \in D$, rezultă din identitatea precedentă că $\Phi(x) > 0$ pentru orice $x \in (x_0, x_1]$, ceea ce contrazice ipoteza că $\Phi(x_1) = 0$, $x_1 \in (x_0, b)$. Rezultă în definitiv afirmația lemei.

LEMA 2. *Fie* $f(x)$ *o funcție oarecare din clasa* $C^n[a, b)$ *și fie* x_0 *un număr oarecare din intervalul* $[a, b)$. *In ipoteza că funcția lui Cauchy* $K(x, \alpha)$ *asociată operatorului* L_n *din* (1) *satisface relația* $K(x, \alpha) \geqq 0$ *în domeniul* D *definit de inegalitățile* (6), *are loc pentru orice* $x \in [x_0, b)$ *formula de medie*

$$f(x) = H(x) + N(x) \cdot L\,(f(\xi)],\ \xi \in (x_0, x) \tag{9}$$

unde $H(x)$ *este soluția ecuației omogene* $L_n[y] = 0$ *care satisface condițiile*

$$H(x_0) = f(x_0),\ H'(x_0) = f'(x_0), \ldots, H^{(n-1)}(x_0) = f^{(n-1)}(x_0), \tag{10}$$

iar $N(x)$ *este integrala ecuației neomogene* $L_n[y] = 1$, *care satisface condițiile*

$$N(x_0) = N'(x_0) = \ldots = N^{(n-1)}(x_0) = 0. \tag{11}$$

Demonstrația acestei leme se face utilizînd lema 1, întocmai cum teorema C se obține ca o consecință a teoremei B (a se vedea lucrarea [24]). Astfel, în ipotezele lemei 2, să considerăm funcția auxiliară

$$\Phi(x) = f(x) - H(x) - \lambda N(x), \tag{12}$$

unde λ este un parametru. Din (10) şi (11) rezultă că

$$\Phi(x_0) = \Phi'(x_0) = \ldots = \Phi^{(n-1)}(x_0).$$

Fie x_1 un număr arbitrar din intervalul (x_0, b). Vom determina pe λ astfel încît $\Phi(x_1) = 0$. Aceasta este posibil întrucît $N(x_1) \neq 0$, ceea ce rezultă din ipoteza că operatornl L_n are proprietatea $T_n[a, b)$ (întrucît prin ipoteză $K(x, \alpha) \geqq 0$ în domeniul D) precum şi din relaţia $L_n[N(x)] \equiv 1$ şi relaţiile (11), (12).

Obţinem :

$$\lambda = \frac{1}{N(x_1)}[f(x_1) - H(x_1)]. \tag{13}$$

Pentru această valoare a lui λ, funcţia $\Phi(x)$ din (12) îndeplineşte condiţiile lemei 1. Scriind pentru $\Phi(x)$ formula de medie (8) şi ţinînd seamă de identităţile $L_n[H(x)] \equiv 0$, $L_n[N(x)] \equiv 1$, obţinem :

$$L_n[\Phi(\xi)] = L_n[f(\xi)] - \lambda = 0, \quad \xi \in (x_0, x_1).$$

Înlocuind aici pe λ cu valoarea sa din (13), se obţine formula

$$f(x_1) = H(x_1) + N(x_1) \cdot L_n[f(\xi)].$$

Cum însă x_1 este arbitrar în (x_0, b) rezultă de aici formula 9.

Observaţie. Lemele 1 şi 2 sînt analoage teoremelor B şi C enunţate anterior şi aparţinînd lui G. P ó l y a [24]. Este totuşi de remarcat faptul că ipotezele privitoare la operatorul diferenţial L, în care au loc concluziile lemelor 1 şi 2, *sînt mai largi* decît ipotezele în care au loc afirmaţiile teoremelor B şi C ale lui G. P ó l y a. Într-adevăr, concluziile teoremelor B şi C sînt valabile în ipoteza că operatorul L_n are proprietatea $I_n^*[a, b)$ şi conform unui rezultat obţinut de către D. V. W i d d e r [36], această proprietate este şi necesară pentru ca să aibă loc teorema de medie B pentru orice funcţie $\varphi(x)$ din clasa $C^n[a, b)$. Dar după cum rezultă din enunţul teoremei A, proprietatea $I_n^*[a, b)$ implică proprietatea de neanulare a funcţiei lui Cauchy $K(x, \alpha)$ în domeniul D definit de inegalităţile (6).

LEMA 3. *Fie L_p şi L_q operatori diferenţiali liniari şi omogeni, de ordinul p respectiv q, operatorul L_p avînd coeficienţii continui în intervalul $[a, b)$, iar operatorul L_p avînd coeficienţii din clasa $C^q[a, b)$. Mai presupunem că factorii derivatelor de ordinele p respectiv q din expresiile operatorilor L_p respectiv L_q nu se anulează în intervalul $[a, b)$. In aceste ipoteze, dacă operatorul L_p are proprietatea $T_p[a, b)$, iar operatorul L_q are proprietatea $T_q[a, b)$, atunci operatorul produs $L_qL_p[y] \equiv L_q\{L_p[y]\}$ are proprietatea $T_{q+p}[a, b)$.*

Demonstraţie. Fie $f(x)$ o funcţie din clasa $C^{p+q}[a, b)$, care într-un punct $x_0 \in [a, b)$ se anulează împreună cu primele ei $p + q - 1$ derivate :

$$f(x_0) = f'(x_0) = \ldots = f^{(p+q-1)}(x_0) = 0, \tag{14}$$

şi care satisface în intervalul (x_0, b) inegalitatea diferenţială

$$L_pL_q[f(x)] > 0, \quad x \in (x_0, b). \tag{15}$$

Va trebui să arătăm că în ipotezele lemei şi în ipotezele (14) şi (15), are loc pentru orice $x \in (x_0, b)$ inegalitatea $f(x) > 0$. Să presupunem contrariu, că $f(x)$ se mai anulează încă într-un punct x_1 din intervalul (x_0, b) :

$$f(x_1) = 0 \quad (x_0 < x_1 < b). \tag{16}$$

Considerăm funcţia $F(x) = L_p[f(x)]$. Întrucît operatorul L_p are proprietatea $T_p[a, b)$ şi întrucît funcţia $f(x)$ satisface condiţiile $f(x_0) = f'(x_0) = \ldots = f^{(p-1)}(x_1) = 0$, $f(x_0) = 0$ $(a \leqq x_0 < x_1 < b)$, ceea ce se constată din (14) şi (16), rezultă în baza lemei 1 că există cel puţin un număr $\xi \in (x_0, x_1)$, astfel încît

$$F(\xi) = 0, \qquad x_0 < \xi < x_1. \tag{17}$$

Se mai observă din (14) că

$$F(x_0) = F'(x_0) = \ldots = F^{(q-1)}(x_0) = 0. \tag{18}$$

Relaţiile (17) şi (18) ne arată că funcţia $F(x)$ satisface condiţiile lemei 1 în cazul operatorului L_q. Ţinînd seamă că prin ipoteză L_q are proprietatea $T_q[a, b)$, rezultă în baza lemei 1 că există cel puţin un punct $\eta \in (x_0, \xi)$, astfel încît $L_q[F(\eta)] = 0$, ceea ce se mai scrie $L_qL_p[f(\eta)] = 0$. Acest rezultat contrazice inegalitatea (15) presupusă adevărată prin ipoteză. Rezultă în definitiv afirmaţia lemei.

3. Să considerăm acuma n operatori diferenţiali liniari şi omogeni

$$L_i[y] = a_{i,0}(x)y^{(k_i)} + a_{i,1}(x)y^{(k_i-1)} + \ldots + a_{i,k_i}(x)y \tag{19}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

avînd respectiv ordinele k_i. Cu ajutorul acestor operatori construim operatorul diferenţial

$$\mathcal{L}[y] = L_nL_{n-1} \ldots L_1[y] + A_1(x)L_{n-1} \ldots L_1[y] + \ldots + A_{n-1}(x)L_1[y] + A_n(x)y, \tag{20}$$

unde $A_i(x)$ sînt funcţii date. Aici notaţia $L_qL_p[y]$ reprezintă produsul operatorilor L_q şi L_p, adică $L_qL_p[y] = L_q\{L_p[y]\}$. Operatorul diferenţial definit de formula (20) are ordinul $\sigma = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$. Vom adopta următoarele ipoteze cu privire la acest operator :

IPOTEZE. 1°. *Oricare ar fi $i = 1, 2, \ldots, n$, coeficienţii $a_{i,0}(x), \ldots, a_{i,k_i}(x)$ ai operatorului L_i aparţin clasei $C^{(\tau_{i+1})}[a, b)$, unde $\tau_{i+1} = k_{i+1} + k_{i+2} + \ldots + k_n$ şi $a_{i,0}(x) \neq 0$ în intervalul $[a, b)$.*

2°. *Oricare ar fi $i = 1, 2, \ldots, n$, operatorul L_i are proprietatea $T_{k_i}[a, b)$.*

3°. *Coeficienții* $A_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ *ai operatorului* $\mathcal{L}$ *din* (20) *sînt funcții continue în intervalul* $[a, b)$.

În cele ce urmează vom nota prin $\mathcal{K}(x, \alpha)$ funcția lui Cauchy asociată operatorului diferențial $\mathcal{L}$ din (20), adică funcția care în raport cu variabila x verifică ecuația diferențială $\mathcal{L}[\mathcal{K}(x, \alpha)] = 0$, precum și condițiile :

$$\mathcal{K}(\alpha, \alpha) = \frac{\partial \mathcal{K}(\alpha, \alpha)}{\partial x} = \ldots = \frac{\partial^{\sigma-2}\mathcal{K}(\alpha, \alpha)}{\partial x^{\sigma-2}} = 0, \frac{\partial^{\sigma-1}\mathcal{K}(\alpha, \alpha)}{\partial x^{\sigma-1}} = 1. \qquad (21)$$

Aici α reprezintă un număr din intervalul $[a, b)$.

În ipotezele de mai sus ne propunem să determinăm în funcție de coeficienții $A_i(x)$ un număr h $(0 < h \leq b - a)$, astfel încît în intervalul $(a, a + h)$ să fie diferită de zero funcția de variabila x, $\mathcal{K}(x, a)$, obținută din funcția lui Cauchy a operatorului $\mathcal{L}$ prin înlocuirea lui α cu a. În al doilea rînd ne propunem să determinăm de asemenea în funcție de coeficienții $A_i(x)$ un număr h^*, $0 < h^* \leq b - a$, astfel încît în intervalul $[a, a + h^*)$ operatorul $\mathcal{L}$ din (20) să aibă proprietatea T_σ. Aceasta revine la aflarea unui număr h^* astfel încît funcția lui Cauchy $\mathcal{K}(x, \alpha)$ corespunzătoare operatorului $\mathcal{L}$ să fie nenegativă în domeniul D^* al variabilelor α și x, definit de inegalitățile $a < \alpha < x < a + h^*$. În tratarea acestor probleme vom distinge două cazuri, după cum $k_n = 1$ sau $k_n > 1$.

4. În acest paragraf și în cel următor vom presupune $k_n = 1$. Atunci operatorul L_n este de forma

$$L_n[y] = a_{n,0}(x)\,\frac{dy}{dx} + a_{n,1}(x)\,y, \qquad (22)$$

unde $a_{n,0}(x)$ și $a_{n,1}(x)$ sînt funcții continue în intervalul $[a, b)$ iar $a_{n,0}(x) \neq 0$ în $[a, b)$. Operatorul L_n^{-1}, care stabilește corespondența dintre $f(x)$ $(f(x) \in C^0[a, b))$ și soluția ecuației diferențiale $L_n[y] = f(x)$ cu condiția $y(x_0) = 0$ $(x_0 \in [a, b))$, are expresia

$$L_n^{-1}[f] = v(x) \cdot \int_{x_0}^{x} u(s)\, f(s)ds, \qquad (23)$$

unde

$$v(x) = \exp\left\{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_{n,1}(s)}{a_{n,0}(s)}\, ds\right\}, \quad u(x) = \frac{1}{a_{n,0}(x)} \exp\left\{\int_{x_0}^{x} \frac{a_{n,1}(s)}{a_{n,0}(s)}\, ds\right\}. \qquad (24)$$

În continuare, fie i un număr natural satisfăcînd inegalitatea $i \leq n - 1$ și fie operatorul diferențial

$$\Pi_i[Y] = L_{n-1}L_{n-2} \ldots L_iY. \qquad (25)$$

Acesta se prezintă ca produsul operatorilor $L_i, L_{i+1}, \ldots, L_{n-1}$, avînd respectiv ordinele $k_i, k_{i+1}, \ldots, k_{n-1}$ și care prin ipoteză au respectiv proprietățile $T_{k_i}[a, b)$, $T_{k_{i+1}}[a, b), \ldots, T_{k_{n-1}}[a, b)$. În baza lemei 3, operatorul-produs Π_i va avea proprietatea $T_{\bar{\tau}_i}[a, b)$, unde $\bar{\tau}_i = k_i + k_{i+1} + \ldots + k_{n-1}$ reprezintă ordinul său. În aceste condiții, fie α un număr din intervalul $[a, b)$ și fie $N_i(x, \alpha)$ soluția, în raport cu variabila x a ecuației diferențiale neomogene

$$\Pi_i[y] = L_{n-1}L_{n-2} \ldots L_i[y] = 1, \qquad (26)$$

satisfăcînd pentrn $x = \alpha$ condițiile

$$N_i(\alpha, \alpha) = \frac{\partial N_i(\alpha, \alpha)}{\partial x} = \ldots = \frac{\partial^{\bar{\tau}_i - 1} N_i(\alpha, \alpha)}{\partial x^{\bar{\tau}_i - 1}} = 0. \qquad (27)$$

Din faptul că operatorul Π_i are proprietatea $T_{\bar{\tau}_i}[a, b)$, rezultă, ținînd seamă de relația $\Pi_i[N_i(x, \alpha)] > 0$, precum și de egalitățile (27), că $N_i(x, \alpha) > 0$ pentru $x \in (\alpha, b)$. De această inegalitate vom ține seamă în cele ce urmează.

Fie în continuare h un număr nenegativ, satisfăcînd inegalitatea $\alpha + h < b$. În cele ce urmează vom folosi notațiile

$$\mathcal{N}_i(h, \alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha+h} |N_i(x, \alpha)|\, dx = \int_{\alpha}^{\alpha+h} N_i(x, \alpha)\, dx \quad (i = 1, 2, \ldots, n - 1) \qquad (28)$$

$$\mathcal{A}_i(h, \alpha) = \max_{x \in [\alpha, \alpha+h]} |A_i(x)|, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (29)$$

$$\mathcal{U}(h, \alpha) = \max_{x \in [\alpha, \alpha+h]} |u(x)|, \quad \mathcal{V}(h, \alpha) = \max_{x \in [a, \alpha+h]} |v(x)| \quad (a < \alpha < \alpha + h < b) \qquad (30)$$

Cu aceste notații considerăm următoarea ecuație în necunoscuta h :

$$\mathcal{F}(h, \alpha) = \mathcal{U}(h, \alpha)\, \mathcal{V}(h, \alpha)\, [\mathcal{A}_n(h, \alpha)\, \mathcal{N}_1(h, \alpha) + \mathcal{A}_{n-1}(h, \alpha)\, \mathcal{N}_2(h, \alpha) + \ldots +$$
$$+ \mathcal{A}_2(h, \alpha)\, \mathcal{N}_{n-1}(h, \alpha) + h\, \mathcal{A}_1(h, \alpha)] - 1 = 0. \qquad (31$$

Vom arăta că oricare ar fi numărul α dat din intervalul $[a, b)$, această ecuație nu poate admite două rădăcini distincte în raport cu h în intervalul $0 \leq h < b - \alpha$. Într-adevăr, funcția $\mathcal{F}(h, \alpha)$ crește (efectiv) în raport cu variabila h, ceea ce se constată cu ușurință ținînd seamă de formula (31) precum și de faptul că funcțiile $\mathcal{U}(h, \alpha)$, $\mathcal{V}(h, \alpha)$, $\mathcal{A}_i(h, \alpha)$ și $\mathcal{N}_i(h, \alpha)$ sînt nedescrescătoare în raport cu h în intervalul $0 \leq h < b - \alpha$. De aici rezultă unicitatea rădăcinii pozitive a ecuației (31), în cazul cînd această ecuație admite o astfel de rădăcină.

În cele ce urmează, vom nota cu $h(\alpha)$, rădăcina pozitivă a ecuației (31), în cazul cînd această ecuație admite o astfel de rădăcină, iar în caz contrar, considerăm prin definiție $h(\alpha) = b - \alpha$.

Cu aceste notații și precizări, are loc următoarea teoremă :

TEOREMA 1. *Fie* α *un număr din intervalul* $[a, b)$ *și fie* $\mathcal{K}(x, \alpha)$ *funcția lui Cauchy asociată operatorului diferențial* $\mathcal{L}$ *din* (20). *În ipotezele* 1°, 2°, 3° *de la* § 3 *și în ipoteza suplimentară* $k_n = 1$, *are loc inegalitatea*

$$\mathcal{K}(x, \alpha) > 0, \qquad (32)$$

valabilă pentru orice $x \in (\alpha, \alpha + h(\alpha))$, *unde* $h(\alpha)$ *reprezintă rădăcina din intervalul* $(0, b - \alpha)$ *a ecuației* (31), *dacă această ecuație admite o astfel de rădăcină, sau reprezintă numărul* $b - \alpha$ *în caz contrar.*

Demonstrație. Pentru simplicitatea scrierii vom nota $\mathcal{K}(x, \alpha) = \mathcal{K}(x)$. Să considerăm operatorul $\Pi_1 = L_{n-1}L_{n-2} \ldots L_2L_1$ de ordinul $\bar{\tau}_1 = k_1 + k_2 + \ldots + k_{n-1}$. În baza lemei 3, acest operator va avea proprietatea $T_{\bar{\tau}_1}[a, b)$, întrucît el este produsul operatorilor $L_1, L_2, \ldots, L_{n-1}$, care au respectiv proprietățile $T_{k_1}[a, b), \ldots, T_{k_{n-1}}[a, b)$. Atunci în baza lemei 2, are loc pentru orice $x \in [\alpha, b)$ formula de medie

$$\mathcal{K}(x) = H_1(x, \alpha) + N_1(x, \alpha) \cdot \Pi_1[\mathcal{K}(\xi_1)], \quad \xi_1 \in (\alpha, x), \tag{33}$$

unde $H_1(x, \alpha)$ reprezintă integrala ecuației omogene $\Pi_1[y] = 0$, satisfăcînd condițiile

$$H_1(\alpha, \alpha) = \mathcal{K}(\alpha), \quad \frac{\partial H_1(\alpha, \alpha)}{\partial x} = \mathcal{K}'(\alpha), \ldots, \frac{\partial H_1^{\bar{\tau}_1 - 1}(\alpha, \alpha)}{\partial x^{\bar{\tau}_1 - 1}} = \mathcal{K}^{(\bar{\tau}_1 - 1)}(\alpha), \tag{34}$$

iar $N_1(\alpha, x)$ reprezintă integrala ecuației neomogene $\Pi_1[y] = 1$, satisfăcînd condițiile

$$N_1(\alpha, \alpha) = \frac{\partial N_1(\alpha, \alpha)}{\partial x} = \ldots = \frac{\partial N_1^{\bar{\tau}_1 - 1}(\alpha, \alpha)}{\partial x^{\bar{\tau}_1 - 1}} = 0. \tag{35}$$

Dar întrucît $k_n \geq 1$, rezultă că $\bar{\tau}_1 = k_1 + k_2 + \ldots + k_{n-1}$ verifică inegalitatea $\bar{\tau}_1 \leq \sigma - 1$ $(\sigma = \bar{\tau}_1 + k_n)$ și ținînd seamă de (21), condițiille (34) devin

$$H_1(\alpha, \alpha) = \frac{\partial H_1(\alpha, \alpha)}{\partial x} = \ldots = \frac{\partial^{\bar{\tau}_1 - 1} H_1(\alpha, \alpha)}{\partial x^{\bar{\tau}_1 - 1}} = 0,$$

de unde rezultă că $H_1(x, \alpha) \equiv 0$. Astfel, formula (33) devine

$$\mathcal{K}(x) = N_1(x, \alpha) \cdot \Pi_1[\mathcal{K}(\xi_1)], \quad \xi_1 \in (\alpha, x). \tag{36}$$

Să considerăm în continuare operatorul diferențial $\Pi_2 = L_{n-1}L_{n-2} \ldots L_2$ de ordinul $\bar{\tau}_2 = k_2 + \ldots + k_{n-1}$. În baza lemei 3, acest operator va avea proprietatea $T_{\bar{\tau}_2}[a, b)$, întrucît el este produsul operatorilor $L_2, \ldots, L_{n-1}$, care au respectiv proprietățile $T_{k_2}[a, b), \ldots, T_{k_{n-1}}[a, b)$. Atunci putem aplica lema 2, considerînd în locul operatorului L_n care figurează în enunțul acestei leme, operatorul Π_2, apoi în locul funcției $f(x)$, funcția $L_1[\mathcal{K}(x)]$. Obținem astfel următoarea formulă, valabilă pentru orice $x \in [\alpha, b)$:

$$L_1[\mathcal{K}(x)] = H_2(x, \alpha) + N_2(x, \alpha) \cdot \Pi_2 L_1[\mathcal{K}(\xi_2)], \quad \xi_2 \in (\alpha, x), \tag{37}$$

unde $H_2(x, \alpha)$ reprezintă integrala ecuației omogene $\Pi_2[y] = 0$, satisfăcînd condițiile

$$\begin{aligned} H_2(\alpha, \alpha) &= L_1[\mathcal{K}(\alpha)], \quad \frac{\partial H_2(\alpha, \alpha)}{\partial x} = \left\{\frac{d}{dx} L_1[\mathcal{K}(x)]\right\}_{x=\alpha}, \ldots \\ &\ldots, \frac{\partial^{\bar{\tau}_2 - 1} H_2(\alpha, \alpha)}{\partial x^{\bar{\tau}_2 - 1}} = \left\{\frac{d^{\bar{\tau}_2 - 1}}{dx^{\bar{\tau}_2 - 1}} L_1[\mathcal{K}(x)]\right\}_{x=\alpha}. \end{aligned} \tag{38}$$

iar $N_2(x, \alpha)$ reprezintă integrala ecuației neomogene $\Pi_2[y] = 1$, satisfăcînd condițiile

$$N_2(\alpha, \alpha) = \frac{\partial N_2(\alpha, \alpha)}{\partial x} = \ldots = \frac{\partial^{\bar{\tau}_2 - 1} N_2(\alpha, \alpha)}{\partial x^{\bar{\tau}_2 - 1}} = 0. \tag{39}$$

Se observă însă că membrii doi ai egalităților (38) reprezintă expresii diferențiale liniare și omogene, de ordin cel mult $\bar{\tau}_2 - 1 + k_1 = \bar{\tau}_1 - 1$ în raport cu funcția $\mathcal{K}(x)$. De aici, ținînd seamă de inegalitatea $\bar{\tau}_1 < \sigma - 1$ și ținînd seamă de (21), se obțin din (38) egalitățile:

$$H_2(\alpha, \alpha) = \frac{\partial H_2(\alpha, \alpha)}{\partial x} = \ldots = \frac{\partial^{\bar{\tau}_2 - 1} H_2(\alpha, \alpha)}{\partial x^{\bar{\tau}_2 - 1}} = 0, \tag{40}$$

din care rezultă că $H_2(x, \alpha) \equiv 0$. Astfel, formula (37) devine

$$\begin{aligned} L_1[\mathcal{K}(x)] = N_2(x, \alpha) \cdot \Pi_2\{L_1[\mathcal{K}(\xi_2)]\} &= N_2(x, \alpha) \cdot \Pi_1[\mathcal{K}(\xi_2)], \\ \xi_2 &\in (\alpha, x). \end{aligned} \tag{41}$$

Considerații analoage se pot face succesiv, referitor la funcțiile $L_2L_1[\mathcal{K}(x)], \ldots, L_{n-1} \ldots L_2L_1[\mathcal{K}(x)]$. Se obțin astfel următoarele formule, valabile pentru orice $x \in [\alpha, b)$:

$$\left.\begin{aligned} L_2L_1[\mathcal{K}(x)] &= N_3(x, \alpha) \cdot \Pi_1[\mathcal{K}(\xi_3)], \quad \xi_3 \in (\alpha, x) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_{n-2}L_{n-3} \ldots L_2L_1[\mathcal{K}(x)] &= N_{n-1}(x, \alpha) \cdot \Pi_1[\mathcal{K}(\xi_{n-1})], \\ &\xi_{n-1} \in (\alpha, x), \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

unde $N_i(x, \alpha)$ reprezintă integrala ecuației neomogene $\Pi_i[y] = L_{n-1}L_2 \ldots \ldots L_i[y] = 1$, de ordinul $\bar{\tau}_i = k_i + k_{i+1} + \ldots + k_{n-1}$, satisfăcînd condițiile

$$N_i(\alpha, \alpha) = \frac{\partial N_2(\alpha, \alpha)}{\partial x} = \ldots = \frac{\partial^{\bar{\tau}_i - 1} N_i(\alpha, \alpha)}{\partial x^{\bar{\tau}_i - 1}} = 0. \tag{43}$$

Pe de altă parte, întrucît $\mathcal{K}(x)$ constituie o soluție a ecuației diferențiale $\mathcal{L}[y] = 0$, unde $\mathcal{L}$ este dat de formula (20), are loc identitatea:

$$\begin{aligned} L_nL_{n-1} \ldots L_2L_1[\mathcal{K}(x)] = -A_1(x)L_{n-1} \ldots L_2L_1[\mathcal{K}(x)] - \ldots - \\ - A_{n-1}(x)L_1[\mathcal{K}(x)] - A_n(x)\mathcal{K}(x). \end{aligned} \tag{44}$$

Să presupunem acuma că în ipotezele teoremei 1 şi contrar afirmaţiei acestei teoreme, funcţia $\mathcal{K}(x)$ s-ar anula pentru o valoare β situată în intervalul $(\alpha, \alpha + h(\alpha))$, numărul $h(\alpha)$ fiind definit în enunţul teoremei 1. Vom aplica ambilor membrii ai identităţii (44) operatorul L_n^{-1} din (23). Alegem pentru numărul x_0 care figurează în expresia acestui operator, o rădăcină din intervalul (α, β) a funcţiei $L_{n-1} \dots L_2L_1[\mathcal{K}(x)]$. Existenţa unei asemenea rădăcini rezultă din ipoteza că funcţia $\mathcal{K}(x)$ are o rădăcină α, multiplă de ordinul $\sigma - 1$ şi o rădăcină β $(\beta > \alpha)$, precum şi din faptul că operatorul - produs $L_{n-1} \dots L_2L_1$ are (în baza afirmaţiei lemei 3) proprietatea $T_{\tau_1}[a, b)$ $(\tau_1 = k_1 + k_2 + \dots + k_{n-1})$. În baza unicităţii problemei lui Cauchy pentru ecuaţia diferenţială

$$L_n[y] = L_nL_{n-1} \dots L_2L_1[\mathcal{K}(x)],$$

în care y este considerată ca funcţie necunoscută iar membrul al doilea se consideră o funcţie dată, ţinîndu-se seama de modul în care a fost ales numărul x_0 în expresia (23) a operatorului L_n^{-1}, se obţine identitatea:

$$L_n^{-1}\{L_nL_{n-1} \dots L_2L_1[\mathcal{K}(x)]\} \equiv L_{n-1}L_{n-2} \dots L_1[\mathcal{K}(x)].$$

Astfel, din (44) obţinem identitatea

$$L_{n-1} \dots L_2L_1[\mathcal{K}(x)] \equiv -v(x)\int_{x_0}^{x} u(s)\,A_1(s)\,L_{n-1} \dots L_2L_1[\mathcal{K}(s)]\,ds - \dots - v(x)\int_{x_0}^{x} u(s)\,A_{n-1}(s)\,L_1[\mathcal{K}(s)]\,ds - v(x)\int_{x_0}^{x} u(s)\,A_n(s)\,\mathcal{K}(s)\,ds,$$

valabilă pentru orice $x \in [a, b)$. Luînd valorile absolute ai ambilor membrii şi ţinînd seamă de notaţiile (29) şi (30), obţinem următoarea delimitare, valabilă pentru orice $x \in [\alpha, \beta]$:

$$|L_{n-1} \dots L_2L_1[\mathcal{K}(x)]| \le \mathcal{U}(\beta-\alpha, \alpha)\,\mathcal{V}(\beta-\alpha, \alpha)\Big\{\mathcal{A}_1(\beta-\alpha, \alpha)\Big|\int_{x_0}^{x} |L_{n-1} \dots L_1[\mathcal{K}(s)]|\,ds\Big| + \dots + \mathcal{A}_{n-1}(\beta-\alpha, \alpha)\Big|\int_{x_0}^{x} |L_1[\mathcal{K}(s)]|\,ds\Big| + \mathcal{A}_n(\beta-\alpha, \alpha)\Big|\int_{x_0}^{x}|\mathcal{K}(s)|\,ds\Big|\Big\}, \quad x \in [\alpha, \beta]. \qquad (45)$$

Fie ξ un punct din intervalul $[\alpha, \beta]$ în care funcţia $|L_{n-1} \dots L_2L_1[\mathcal{K})x)]|$ îşi atinge valoarea sa maximă μ în intervalul $[\alpha, \beta]$. Întrucît inegalitatea (45) este valabilă pentru orice $x \in [\alpha, \beta]$, vom putea să înlocuim peste tot

pe x cu ξ şi apoi, ţinînd seamă de faptul că $\xi \in [\alpha, \beta]$, să înlocuim în membrul al doilea pe ξ cu β $(\beta \ge \xi)$. Obţinem astfel a fortiori inegalitatea

$$\mu \le \mathcal{U}(\beta-\alpha, \alpha)\,\mathcal{V}(\beta-\alpha, \alpha)\Big\{\mathcal{A}_1(\beta-\alpha, \alpha)\int_{\alpha}^{\beta} |L_{n-1} \dots L_2L_1[\mathcal{K}(s)]|\,ds + \dots + \mathcal{A}_{n-1}(\beta-\alpha, \alpha)\int_{\alpha}^{\beta} |L_1[\mathcal{K}(s)]|\,ds + \mathcal{A}_n(\beta-\alpha, \alpha)\int_{\alpha}^{\beta} |\mathcal{K}(s)|\,ds\Big\}. \qquad (46)$$

Dar din (36), (41), (42), ţinînd seamă de notaţiile (28), rezultă delimitările:

$$\int_{\alpha}^{\beta} |\mathcal{K}(s)|\,ds \le \mu\,\mathcal{H}_1(\beta-\alpha, \alpha),$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} |L_i \dots L_2L_1[\mathcal{K}(s)]|\,ds \le \mu\,\mathcal{H}_{i+1}(\beta-\alpha, \alpha) \qquad (47)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n-2).$$

Aici, $\mu = \max\limits_{x \in [\alpha, \beta]} |L_{n-1} \dots L_2L_1[\mathcal{K}(x)]|$. Astfel, din (46), ţinînd seamă de (47) şi notînd pentru simplicitatea scrierii $\beta - \alpha = \bar{h}$, se obţine în urma unei simplificări cu μ $(\mu \ne 0)$ inegalitatea

$$1 \le \mathcal{U}(\bar{h}, \alpha)\,\mathcal{V}(\bar{h}, \alpha)\{(\alpha + \bar{h})\,\mathcal{A}_1(\bar{h}, \alpha) + \mathcal{A}_2(\bar{h}, \alpha)\,\mathcal{H}_{n-1}(\bar{h}, \alpha) + \dots + \mathcal{A}_{n-1}(\bar{h}, \alpha)\,\mathcal{H}_2(\bar{h}, \alpha) + \mathcal{A}_n(\bar{h}, \alpha)\,\mathcal{H}_1(\bar{h}, \alpha)\},$$

ceea ce ne arată că pentru $h = \beta - \alpha$ are loc inegalitatea

$$\mathcal{F}(\beta - \alpha, \alpha) \ge 0. \qquad (48)$$

Pe de altă parte, făcînd în expresia (31) a funcţiei $\mathcal{F}(h, \alpha)$ pe h să tindă către zero prin valori pozitive, se obţine că

$$\lim_{h \to 0^+} \mathcal{F}(h, \alpha) = -1. \qquad (49)$$

Din (48) şi (49) ar rezulta în baza continuităţii funcţiei $\mathcal{F}(h, \alpha)$ în raport cu variabila h $(h \in (0, b - \alpha))$, că ecuaţia (31) admite o rădăcină $h_1(\alpha)$ satisfăcînd inegalităţile

$$0 < h_1(\alpha) \le \beta - \alpha. \qquad (50)$$

Întrucît însă $\beta \in (\alpha, \alpha + h(\alpha))$, rezultă din (50) inegalitatea $h_1(\alpha) < h(\alpha)$. Existenţa unei astfel de rădăcini a ecuaţiei (31) ar contrazice însă definiţia numărului $h(\alpha)$. Astfel, ipoteza că funcţia $\mathcal{K}(x, \alpha)$ s-ar anula pentru o valoare situată în intervalul $(\alpha, \alpha + h(\alpha))$ nu poate avea loc şi prin aceasta teorema este demonstrată.

CONSECINȚĂ. Dacă se ia $\alpha = a$, atunci teorema 1 ne indică un interval $(a, a + h(a))$ în care soluția $y(x)$ a ecuației $\mathcal{L}[y] = 0$, satisfăcînd condițiile

$$y(a) = y'(a) = \ldots = y^{(\sigma-2)}(a) = 0, \quad y^{(\sigma-1)}(a) = 1, \tag{51}$$

nu se anulează pentru nici o valoare a variabilei x.

5. În acest § vom arăta cum se poate obține un număr H $(0 < H \leq b - a)$, astfel încît *oricare* ar fi numărul α fixat în intervalul $[a, a + H)$, să aibă loc pentru orice $x \in (\alpha, a + H)$ inegalitatea

$$\mathcal{K}(x, \alpha) > 0, \quad a \leq \alpha < x < a + H. \tag{52}$$

Cu alte cuvinte, vom determina un număr H, astfel încît în domeniul $D(a, H)$ al variabilelor x și α, definit de inegalitățile

$$D(a, H): \qquad a \leq \alpha < x < a + H \tag{53}$$

funcția lui Cauchy $\mathcal{K}(x, \alpha)$ asociată operatorului diferențial $\mathcal{L}$ din (20) să fie pozitivă.

Din cele expuse în § 1 se știe că dacă H este un astfel de număr, atunci în intervalul $[a, a + H)$ operatorul diferențial $\mathcal{L}$ are proprietatea T_a (a se vedea definiția 1 de la § 1).

Considerăm numărul H_0 definit de relația

$$H_0 = \inf_{\alpha \in [a, b)} \{\alpha + h(\alpha)\} - a, \tag{54}$$

unde $h(\alpha)$ este rădăcina (în sensul precizat în § 4) a ecuației (31). Ținînd seamă de proprietatea de continuitate a funcției $h(\alpha)$, se constată cu ușurință că are loc de asemenea egalitatea

$$\inf_{\alpha \in [a, b)} \{\alpha + h(\alpha)\} = \inf_{\alpha \in [a, a+H_0)} \{\alpha + h(\alpha)\} = H_0 + a, \tag{55}$$

de unde rezultă relația

$$\alpha + h(\alpha) \geq a + H_0, \quad \alpha \in [a, a + H_0). \tag{56}$$

Ținînd seamă de această inegalitate, din teorema 1 se obține :

TEOREMA 2. *În ipotezele* $1° - 3°$ *de la* § 3 *și în ipoteza suplimentară* $k_n = 1$, *are loc inegalitatea* $\mathcal{K}(x, \alpha) > 0$ *pentru orice* α *și* x *satisfăcînd inegalitățile* $a \leq \alpha < x < a + H_0$.

Vom da acum o delimitare inferioară a numărului H_0 definit în (54). Fie în acest scop H un număr din intervalul $(0, b - a)$. Vom utiliza notațiile :

$$\left.\begin{aligned} &\overline{\mathcal{N}}_i(H) = \max_{\alpha \in [a, a+H]} \mathcal{N}_i(a + H - \alpha, \alpha) \\ &\qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, n - 1), \\ &\mathcal{A}_i(H) = \mathcal{A}_i(a, H) = \max_{x \in [a, a+H]} |A_i(x)| \\ &\qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

$$\left.\begin{aligned} &\overline{\mathcal{U}}(H) = \mathcal{U}(a, H) = \max_{x \in [a, a+H]} |u(x)| \\ &\overline{\mathcal{V}}(H) = \mathcal{V}(a, H) = \max_{x \in [a, a+H]} |v(x)| \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

Considerăm următoarea ecuație în necunoscuta H :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(H) = \overline{\mathcal{U}}(H)\,\overline{\mathcal{V}}(H)\,[\mathcal{A}_n(H)\,\overline{\mathcal{N}}_1(H) + \mathcal{A}_{n-1}(H)\,\overline{\mathcal{N}}_2(H) + \ldots + \\ + \mathcal{A}_2(H)\,\overline{\mathcal{N}}_{n-1}(H) + H\,\mathcal{A}_1(H)] - 1 = 0, \end{aligned} \tag{59}$$

unde $\overline{\mathcal{N}}_i(H)$, $\mathcal{A}_i(H)$, $\overline{\mathcal{U}}(H)$, $\overline{\mathcal{V}}(H)$ reprezintă funcțiile definite în (57) și (58). Se observă că ecuația (59) are cel mult o rădăcină în intervalul $(0, b - a)$. Într-adevăr, funcțiile $\overline{\mathcal{N}}_i(H)$, $\mathcal{A}_i(H)$, $\overline{\mathcal{U}}(H)$, $\overline{\mathcal{V}}(H)$ sînt nedescrescătoare pentru $H \in (0, b - a)$ și de aici, ținînd seamă de expresia (59) a funcției $\mathcal{F}(H)$, rezultă că această funcție este crescătoare (în sens strict) pentru $H \in (0, b - a)$. În cele ce urmează vom nota cu $\overline{H}_0$ rădăcina din intervalul $(0, b - a)$ a ecuației (59), dacă această ecuație admite o astfel de rădăcină, iar în caz contrar, vom considera prin definiție $\overline{H}_0 = b - a$.

Vom demonstra următoarea teoremă :

TEOREMA 3. *În ipotezele* $1° - 3°$ *de la* § 3 *are loc inegalitatea*

$$H_0 \geq \overline{H}_0. \tag{60}$$

Demonstrație. Fie deci H_0 numărul definit în (54). Conform relațiilor (55) putem scrie :

$$a + H_0 = \inf_{\alpha \in [a, a+H_0)} \{\alpha + h(\alpha)\}. \tag{55'}$$

Vom distinge două cazuri după cum $H_0 < b - a$ sau $H_0 = b - a$.

Cazul $H_0 < b - a$. În acest caz $a + H_0 < b$ și ținînd seamă de continuitatea funcției $h(\alpha)$ pentru $\alpha \in [a, a + H_0)$, relația (55') se poate scrie sub următoarea formă mai completă

$$a + H_0 = \inf_{\alpha \in [a, a+H_0]} \{\alpha + h(\alpha)\}, \tag{55''}$$

care se deosebește de (55') prin aceea că marginea inferioară care intervine în această relație este considerată relativ la intervalul *închis* $[a, a + H_0]$. În acest caz, marginea inferioară va fi atinsă în intervalul $[a, a + H_0]$, din cauza continuității funcției $\alpha + H(\alpha)$ în acest interval. Fie α_0 o valoare a lui α din $[a, a + H]$, pentru care

$$\alpha_0 + h(\alpha_0) = a + H_0. \tag{55'''}$$

Să considerăm acuma ecuația în necunoscuta h, $\mathcal{F}(h, \alpha_0) = 0$, care se obține din (31) înlocuind α cu α_0. Dacă această ecuație admite rădăcină în intervalul $(0, b - \alpha_0)$, atunci această rădăcină va fi unică și prin definiția numărului $h(\alpha)$, ea va fi egală cu $h(\alpha_0)$. Are deci loc egalitatea

$$\mathcal{F}(h(\alpha_0), \alpha_0) = 0. \tag{61}$$

Pe de altă parte, ținînd seamă de egalitatea (55'''), obținem

$$\left.\begin{aligned} \overline{\mathcal{H}}_i(H_0) &\geq \mathcal{H}_i(h(\alpha_0), \alpha_0) \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \\ \overline{\mathcal{A}}_i(H_0) &\geq \mathcal{A}_i(h(\alpha_0), \alpha_0) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \\ \overline{\mathcal{U}}(H_0) &\geq \mathcal{U}(h(\alpha_0), \alpha_0), \\ \overline{\mathcal{V}}(H_0) &\geq \mathcal{V}(h(\alpha_0), \alpha_2). \end{aligned}\right. \tag{62}$$

Aici $\overline{\mathcal{H}}_i(H)$, $\overline{\mathcal{A}}_i(H)$; $\overline{\mathcal{U}}(H)$ și $\overline{\mathcal{V}}(H)$ reprezintă funcțiile definite în (57), (58), iar $\mathcal{H}_i(h, \alpha)$, $\mathcal{A}_i(h, \alpha)$, $\mathcal{U}(h, \alpha)$, $\mathcal{V}(h, \alpha)$ sînt definite în (28), (29) și (30). De asemenea are loc inegalitatea

$$H_0 \geq h(\alpha_0). \tag{63}$$

Ținînd seamă de expresiile (31), respectiv (59) ale funcțiilor $\mathcal{F}(h, \alpha)$ și $\overline{\mathcal{F}}(H)$, din inegalitățile (62) și (63) rezultă relația $\overline{\mathcal{F}}(H_0) \geq \mathcal{F}(h(\alpha_0), \alpha_0)$ și ținînd seamă de (61), rezultă că

$$\overline{\mathcal{F}}(H_0) \geq 0. \tag{64}$$

Se mai observă însă că

$$\lim_{H \to 0+} \overline{\mathcal{F}}(H) = -1. \tag{65}$$

Deoarece $\overline{\mathcal{F}}(H)$ este o funcție continuă și crescătoare de H în intervalul $(0, b - a)$, rezultă din (64) și (65) că ecuația $\overline{\mathcal{F}}(H) = 0$ are o rădăcină $\overline{H}_0$ și una singură în intervalul $(0, b - a)$, și că această rădăcină satisface inegalitatea $\overline{H}_0 \leq H_0$, ceea ce demonstrează teorema în cazul considerat.

Cazul $H_0 = b - a$. În acest caz, afirmația teoremei este banală întrucît numărul $\overline{H}_0$ satisface întotdeauna inegalitatea $\overline{H}_0 \leq b - a$, ceea ce rezultă din însăși definiția dată acestui număr. Cu aceasta, teorema este complet demonstrată.

Din teoremele 2 și 3 rezultă în particular următoarea

CONSECINȚĂ. *In ipotezele teoremelor 2 și 3, oricare ar fi numărul* $\alpha \in [a, a + \overline{H}_0)$, *are loc inegalitatea* $\mathcal{K}(x, \alpha) > 0$ *pentru* $x \in (\alpha, a + \overline{H}_0)$.

Această afirmație poate fi demonstrată prin reducere la absurd, la fel cum s-a demonstrat teorema 1. Astfel, presupunînd contrariul, că în ipotezele formulate, ar exista două numere α și β satisfăcînd inegalitățile $a \leq \alpha < \beta < a + H_0$ și pentru care $\mathcal{K}(\beta, \alpha) = 0$, s-ar ajunge la concluzia că ecuația (59) în necunoscuta H, ar avea încă o rădăcină $\overline{H}_1$ satisfăcînd inegalitățile $0 < \overline{H}_1 < \overline{H}_0$, ceea ce este imposibil întrucît funcția $\overline{\mathcal{F}}(H)$ este crescătoare pentru $H \in (0, b - a)$.

6. În acest § vom presupune $k_n > 1$. Considerăm operatorul diferențial L_n de ordinul k_n care figurează în expresia (20) a operatorului $\mathcal{L}$. Din proprietatea $T_{k_n}[a, b)$ a operatorului L_n rezultă că oricare ar fi $x_1 \in [a, b)$, integrala ecuației diferențiale $L_n[y] = 0$, care verifică în punctul $x = x_1$ condițiile

$$y(x_1) = y'(x_1) = \ldots = y^{(k_n-2)}(x_1) = 0, \quad y^{(k_n-1)}(x_1) = 1 \tag{66}$$

nu se poate anula în nici un punct din intervalul (x_1, b). În continuare ne vom folosi de următoarea lemă:

LEMA 4. *Condiția necesară și suficientă ca operatorul diferențial* L_n *de ordinul* k_n *să aibă proprietatea* $T_{k_n}[a, b)$ *este ca oricare ar fi numerele* x_1 *și* x_2 *satisfăcînd condiția* $a \leq x_1 < x_2 < b$, *și oricare ar fi numerele* $y_1, y_1', \ldots, y_1^{(k_n-2)}, y_2$, *ecuația* $L_n[y] = 0$ *să admită o soluție și una singură care să verifice următoarele condiții bilocale:*

$$\left.\begin{aligned} y(x_1) = y_1,\ y'(x_1) = y_1', \ldots, y^{(k_n-2)}(x_1) = y_1^{(k_n-2)}, \\ y(x_2) = y_2. \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

Într-adevăr, presupunînd că operatorul L_n are proprietatea $T_{k_n}[a, b)$, fie $y_0(x), y_1(x), \ldots, y_{k_n-1}(x)$ un sistem fundamental al ecuației $L_n[y] = 0$ și fie determinantul

$$D(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} y_1(x_1) & y_2(x_1) & \ldots\ldots & y_{k_n}(x_1) \\ y_1'(x_1) & y_2'(x_1) & \ldots\ldots & y_{k_n}'(x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(k_n-2)}(x_1) & y_2^{(k_n-2)}(x_1) & \ldots\ldots & y_{k_n}^{(k_n-2)}(x_1) \\ y_1(x_2) & y_2(x_2) & \ldots\ldots & y_{k_n}(x_2) \end{vmatrix} \tag{68}$$

Acest determinant nu poate fi nul întrucît în caz afirmativ, s-ar putea determina o integrală neidentic nulă $\eta(x)$, care să verifice condițiile

$$\left.\begin{aligned} \eta(x_1) = \eta'(x_1) = \ldots = \eta^{(k_n-2)}(x_1) = 0, \\ \eta(x_2) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

Întrucît $\eta(x)$ nu este identic nulă, din egalitățile (69) ar rezulta că $\eta^{(k_n-1)}(x_1) \neq 0$ și deci că integrala $\overline{\eta}(x) = \frac{\eta(x)}{\eta(x_1)}$ verifică relațiile (66). Tot din (69) ar rezulta că $\eta(x_2) = 0$, ceea ce ar contrazice proprietatea $T_{k_n}[a, b)$ a operatorului L_n. Deci determinantul $D(x_1, x_2)$ din (68) este diferit de zero oricare ar fi x_1 și x_2 satisfăcînd condiția $a \leq x_1 < x_2 < b$. De aici rezultă îndată existența și unicitatea soluției $y(x)$ a ecuației $L_n[y] = 0$, care verifică condițiile (67).

Suficienţa condiţiei exprimate de lemă, pentru ca operatorul L_n să aibă proprietatea $T_{k_n}[a, b)$, se verifică cu uşurinţă observînd că din unicitatea soluţiei ecuaţiei $L_n[y] = 0$, satisfăcînd condiţiile (67), rezultă că $D(x_1, x_2) = 0$, etc.

CONSECINŢE. Din lema stabilită, în aceleaşi ipoteze relative la operatorul L_n, rezultă existenţa şi unicitatea soluţiei $\mu(x)$ a ecuaţiei neomogene

$$L_n[\mu(x)] = f(x), \tag{70}$$

satisfăcînd condiţiile

$$\left.\begin{aligned} \mu(x_1) = \mu'(x_1) = \ldots\ldots = \mu^{(k_n-2)}(x_1) = 0, \\ \mu(x_2) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{71}$$

Aici s-a presupus că $f(x)$ este continuă în intervalul $[a, b)$.

Vom nota cu $L_n^{-1}(f;\, x_1, x_2)$ operatorul invers operatorului L_n, considerat împreuna cu condiţiile (71), adică operatorul prin care se realizează corespondenţa între funcţiile $f(x) \in C[a, b)$ şi soluţiile $\mu(x)$ ale ecuaţiei diferenţiale (70), satisfăcînd condiţiile (71). După cum se ştie [22], operatorul $L_n^{-1}(f;\, x_1, x_2)$ admite o reprezentare integrală

$$\mu(x) = L_n^{-1}(f;\, x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} G(x, s;\, x_1, x_2)\, f(s)\, ds, \tag{72}$$

$$x \in (x_1, x_2],$$

unde $G(x, s;\, x_1, x_2)$ este funcţia lui Green corespunzătoare problemei bilocale (70), ((71). Această funcţie conform unui rezultat obţinut de A. Iu. L e v i n [17], este continuă în raport cu ansamblul variabilelor x, s, x_1, x_2, cînd acestea variază în intervalul $[a, b)$. În cele ce urmează, ne vom folosi de următoarele notaţii :

$$G(h, \alpha) = \sup_{x_2 \in (\alpha,\, \alpha+h]} \left\{ \sup_{x, s \in [\alpha, x_2]} |G(x, s;\, \alpha, x_2)| \right\}, \tag{73}$$

$$\mathcal{G}(h, \alpha) = \sup_{x_2 \in (\alpha,\, \alpha+h]} \left\{ \sup_{x \in [\alpha, x_2]} \int_{\alpha}^{x_2} |G(x, s;\, \alpha, x_2)|\, ds \right\}. \tag{74}$$

Evident că are loc inegalitatea $\mathcal{G}(h, \alpha) \leqq h \cdot G(h, \alpha)$. Ţinînd seamă de formulele (73) şi (74), precum şi de proprietatea de continuitate a funcţiei $G(x, s;\, x_1, x_2)$ în raport cu ansamblul variabilelor x, s, x_1, x_2, se constată că funcţiile $G(h, \alpha)$ şi $\mathcal{G}(h, \alpha)$ sînt continue în raport cu α şi h $(a \leqq \alpha < \alpha + h < b)$. Presupunînd pe α fixat $(a \leqq \alpha < b)$, aceste funcţii sînt nedescrescătoare în raport cu h. Considerăm în continuare următoarea ecuaţie în necunoscuta h, analoagă ecuaţiei (31) :

$$\mathcal{F}^*(h, \alpha) = G(h, \alpha)\, [\mathcal{A}_n(h, \alpha)\, \mathcal{H}_1(h, \alpha) + \mathcal{A}_{n-1}(h, \alpha)\, \mathcal{H}_2(h, \alpha) + \\ + \ldots + \mathcal{A}_2(h, \alpha)\, \mathcal{H}_{n-1}(h, \alpha)] + \mathcal{G}(h, \alpha)\, \mathcal{A}_1(h, \alpha) - 1 = 0. \tag{75}$$

Funcţia $\mathcal{F}^*(h, \alpha)$ este nedescrescătoare în raport cu h cînd $h \in (\alpha, b-\alpha)$, întrucît funcţiile $G(h, \alpha)$, $\mathcal{G}(h, \alpha)$, $\mathcal{A}_i(h, \alpha)$ şi $\mathcal{H}_i(h, \alpha)$ sînt nedescrescătoare. De aici rezultă că mulţimea tuturor rădăcinilor ecuaţiei (75) în necunoscuta h, (α fiind fixat în intervalul (a, b)) formează un subinterval al intervalului $(0, b-\alpha)$. Acest subinterval poate să se reducă la un singur punct, dacă ecuaţia (75) admite o singură rădăcină în necunoscuta h în intervalul $(0, b-\alpha)$, sau poate să se reducă la mulţimea vidă, dacă ecuaţia (75) nu admite astfel de rădăcini. În cele ce urmează, vom nota cu $h^*(\alpha)$ marginea inferioară a rădăcinilor din intervalul $(0, b-\alpha)$ a ecuaţiei (75)— privită ca ecuaţie în necunoscuta h — în cazul cînd această ecuaţie admite astfel de rădăcini; în cazul contrar, considerăm prin definiţie $h^*(\alpha) = b - \alpha$. Evident că în cazul cînd mulţimea rădăcinilor ecuaţiei (75) în ecunoscuta h nu este vidă, $h^*(\alpha)$ va fi de asemenea o rădăcină a aceleiaşi ecuaţii, întrucît funcţia $\mathcal{F}^*(h)$ este continuă în raport cu h. Cu aceste notaţii şi precizări, are loc următoarea

TEOREMA 1*. *Fie α un număr oarecare din intervalul $[a, b)$ şi fie $\mathcal{K}(x, \alpha)$ funcţia lui Cauchy asociată operatorului diferenţial $\mathcal{L}$ din (20). In ipotezele 1°, 2°, 3° de la § 3 şi în ipoteza $k_n > 1$, are loc inegalitatea $\mathcal{K}(x, \alpha) > 0$, valabilă pentru orice $x \in (\alpha, \alpha + h^*(\alpha))$, unde $h^*(\alpha)$ reprezintă marginea inferioară a rădăcinilor din intervalul $(0, b-\alpha)$ ale ecuaţiei (75), dacă această ecuaţie admite astfel de rădăcini, sau reprezintă numărul $b - \alpha$ în caz contrar.*

Demonstraţia acestei teoreme se face întocmai ca demonstraţia teoremei 1. Notăm pentru simplicitatea scrierii, $\mathcal{K}(x, \alpha) = \mathcal{K}(x)$. Vor avea loc relaţiile (36), (41), (42), (44). Să presupunem că în ipotezele teoremei 1*, contrar afirmaţiei acestei teoreme, funţia $\mathcal{K}(x)$ s-ar anula pentru o valoare β situată în intervalul $(\alpha, \alpha + h^*(\alpha))$ numărul $h^*(\alpha)$ fiind definit în enunţul teoremei. Această funcţie mai are (prin ipoteză) şi rădăcina $x = \alpha$, care este multiplă de ordinul $\sigma - 1$ $(\sigma = k_1 + k_2 + \ldots + k_n)$. Să considerăm operatorul $\Pi_1 = L_{n-1}L_{n-2} \ldots L_2L_1$. Întrucît prin ipoteză L_i are proprietatea $T_{k_i}[a, b)$, rezultă în baza lemei 3 că operatorul Π_1 va avea proprietatea $T_{\bar{\tau}_1}(a, b)$, unde $\bar{\tau}_1 = k_1 + k_2 + \ldots + k_{n-1}$. Atunci ţinînd seamă de faptul că funţia $\mathcal{K}(x)$ se anulează pentru valorile α şi β cu ordinile de multiplicitate $\sigma - 1$, resp. 1, rezultă în baza lemei 1 că funcţia de variabila x, $\Pi_1[\mathcal{K}(x)]$, se va anula pentru cel puţin o valoare x_0 din intervalul (α, β). Dar întrucît $\mathcal{K}(x)$ se anulează pentru $x = \alpha$ cu un ordin de multiplicitate $\sigma - 1$, rezultă că funcţia $\Pi_1[\mathcal{K}(x)]$ se anulează pentru $x = \alpha$ cu un ordin, cel puţin $\sigma - 1 - \bar{\tau}_1 = k_n - 1$. Cum prin ipoteză $k_n > 1$, acest ordin este mai mare ca zero. Considerăm în continuare ecuaţia diferenţială în funcţia necunoscută Y :

$$L_n[Y] = L_n\Pi_1[\mathcal{K}(x)], \tag{76}$$

cu condiţiile bilocale

$$\left.\begin{aligned} Y(\alpha) = Y'(\alpha) = \ldots = Y^{(k_n-2)}(\alpha) = 0, \\ Y(x_0) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

Ținînd seamă de semnificația numărului x_0 care intervine în aceste condiții, precum și de constatările anterioare privitoare la funcția $\Pi_1[\mathcal{K}(x)]$, se constată îndată că această funcție constitue o soluție a problemei (76), (77). S-a arătat însă că o astfel de problemă bilocală admite o singură soluție, care cu notațiile introduse anterior, se poate scrie formal $L_n^{-1}\{L_n\Pi_1[\mathcal{K}(x)];\ \alpha,\ x_0\}$. Rezultă deci identitatea

$$L_n^{-1}\{L_n\Pi_1[\mathcal{K}(x)];\ \alpha,\ x_0\}\equiv\Pi_1[\mathcal{K}(x)]. \tag{78}$$

Cu aceste pregătiri, să aplicăm ambilor membrii ai identității (44) operatorul $L_n^{-1}(\cdot\ ;\ \alpha,\ x_0)$. Ținînd seamă de reprezentarea integrală (72) a acestui operator, precum și de identitatea (78), obținem identitatea

$$L_{n-1}\dots L_2L_1\,[\mathcal{K}(x)]\equiv-\int_\alpha^{x_0}G(x,\ s;\ \alpha,\ x_0)\,\{A_1(s)\,L_{n-1}\dots L_2L_1[\mathcal{K}(s)]+$$
$$+\dots+A_{n-1}(s)\,L_1[\mathcal{K}(s)]+A_n(s)\,\mathcal{K}(s)\}\,ds.$$

valabilă pentru orice $x\in(\alpha,\ x_0)$. Luînd valorile absolute ale ambilor membrii și ținînd seamă de notațiile (28), (29), (30) și (73), obținem următoarea delimitare, valabilă pentru orice $x\in(\alpha,\ x_0)$:

$$|L_{n-1}\dots L_2L_1[\mathcal{K}(x)]|\leqq$$
$$\leqq\mathcal{A}_1(x_0-\alpha,\ \alpha)\int_\alpha^{x_0}|G(x,s;\alpha,x_0)\ L_{n-1}\dots L_2L_1[\mathcal{K}(s)]|\,ds+$$
$$+\ G(x_0-\alpha,\alpha)\Big[\mathcal{A}_2(x_0-\alpha,\ \alpha)\int_\alpha^{x_0}|L_{n-2}\dots L_1[\mathcal{K}(s)]|\,ds+$$
$$+\dots+\mathcal{A}_{n-1}(x_0-\alpha,\ \alpha)\int_\alpha^{x_0}|L_1[\mathcal{K}(s)]|\,ds+\mathcal{A}_n(x_0-\alpha,\ \alpha)\int_\alpha^{x_0}|\mathcal{K}(s)|\,ds\Big]. \tag{79}$$

Fie ξ un punct din intervalul $[\alpha,\ x_0]$, în care funcția $|L_{n-1}\dots L_2L_1[\mathcal{K}(x)]|$ își atinge valoarea sa maximă μ în intervalul $[\alpha,\ x_0]$. Evident că ξ nu poate coincide nici cu α, nici cu x_0, întrucît în aceste puncte funcția $L_{n-1}\dots L_2L_1[\mathcal{K}(x)]$ se anulează. Deci $\xi\in(\alpha,\ x_0)$. Întrucît inegalitatea (79) este valabilă pentru orice $x\in(\alpha,\ x_0)$, vom putea să înlocuim peste tot pe x cu ξ și ținînd seamă de notația (74), obținem ineglitatea

$$\mu\leqq\mathcal{A}_1(x_0-\alpha,\ \alpha)\ \mathcal{G}(x_0-\alpha,\ \alpha)\ \mu+$$
$$+\ G(x_0-\alpha,\ \alpha)\Big[\mathcal{A}_2(x_0-\alpha,\ \alpha)\int_\alpha^{x_0}|L_{n-2}\dots L_1[\mathcal{K}(s)]|\,ds+\dots+$$
$$+\ \mathcal{A}_{n-1}(x_0-\alpha,\ \alpha)\int_\alpha^{x_0}|L_1[\mathcal{K}(s)]|\,ds+\mathcal{A}_n(x_0-\alpha,\ \alpha)\int_\alpha^{x_0}|\mathcal{K}(s)|\,ds\Big].$$

Delimitînd integralele care figurează în membrul drept al acestei inegalități cu ajutorul formulelor (47), obținem în urma unei simplificări cu factorul μ $(\mu\neq0)$, inegalitatea

$$1\leqq\mathcal{A}_1(x_0-\alpha,\ \alpha)\ \mathcal{G}(x_0-\alpha,\ \alpha)+G(x_0-\alpha,\ \alpha)\,[\mathcal{A}_2(x_0-\alpha,\ \alpha)\,\mathcal{H}_{n-1}(x_0-\alpha,\ \alpha)+$$
$$+\dots+\mathcal{A}_{n-1}(x_0-\alpha,\ \alpha)\ \mathcal{H}_2(x_0-\alpha,\ \alpha)+$$
$$+\ \mathcal{A}_n(x_0-\alpha,\ \alpha)\ \mathcal{H}_1(x_0-\alpha,\ \alpha)],$$

care ne arată că pentru $h=x_0-\alpha$, are loc inegalitatea

$$\mathcal{F}^*(x_0-\alpha,\ \alpha)\geqq0. \tag{80}$$

Deoarece, după cum se constată cu ușurință, are loc relația

$$\lim_{h\to0^+}\mathcal{F}^*(h,\ \alpha)<0 \tag{81}$$

și întrucît funcția $\mathcal{F}^*(h,\ \alpha)$ este continuă în raport cu variabila h $(h\in(0,\ b-\alpha))$, ar rezulta din (80) și (81) că funcția $\mathcal{F}^*(h,\ \alpha)$ se anulează pentru un număr h' situat în intervalul $(0,\ x_0-\alpha)$. Pe de altă parte, întrucît numărul x_0 satisface în baza lemei **1** inegalitatea $\alpha<x_0<\beta$, și cum prin ipoteză $\beta<h^*(\alpha)$, ar rezulta că rădăcina h' a ecuației $\mathcal{F}^*(h,\ \alpha)=0$ satisface inegalitățile $0<h'<h^*(\alpha)$, ceea ce ar contrazice definiția numărului $h^*(\alpha)$. Astfel teorema este demonstrată.

Consecință. Dacă $\alpha=a$, atunci teorema 1* ne furnizează un interval $(a,\ a+h^*(a))$ în care soluția $y(x)$ a ecuației $\mathcal{L}[y]=0$, satisfăcînd condițiile (51) nu se anulează pentru nici o valoare a variabilei x.

7. Pentru a obține în cazul $k_n>1$ un interval de forma $[a,\ a+H)$ în care operatorul diferențial $\mathcal{F}$ să aibă proprietatea T_σ, procedăm ca în cazul $k_n=1$ (a se vedea § 5). Considerăm în acest scop numărul H_0^* definit astfel

$$a+H_0^*=\inf_{\alpha\in[a,\ b)}\{\alpha+h^*(\alpha)\}, \tag{82}$$

unde $h^*(\alpha)$ este rădăcina (în sensul precizat în § anterior) a ecuației (75). Se constată cu ușurință că are loc egalitatea

$$\inf_{\alpha\in[a,\ b)}\{\alpha+h^*(\alpha)\}=\inf_{\alpha\in[a,\ a+H_0^*)}\{\alpha+h^*(\alpha)\}=a+H_0^*, \tag{83}$$

de unde rezultă că $\alpha+h^*(\alpha)\geqq a+H_0$ pentru orice $\alpha\in[a,\ a+H_0)$. În baza teoremei 1*, se obține astfel următoarea teoremă :

Teorema 2*. *In ipotezele* 1°—3° *de la* § 3 *și în ipoteza* $k_n>1$, *are loc inegalitatea* $\mathcal{K}(x,\ \alpha)>0$ *pentru orice* x *și* α *satisfăcînd relațiile* $a\leqq\alpha<x<a+H_0^*$.

Pentru a obţine o delimitare inferioară a numărului H_0^*, procedăm ca în § 5. Fie H un număr din intervalul $(0, b - a)$. Ne vom folosi în afară de notaţiile (57) şi de următoarele :

$$\overline{G}(H) = \sup_{\alpha \in [a, a+H]} G(a + H - \alpha, \alpha),$$
$$\overline{\mathcal{G}}(H) = \sup_{\alpha \in [a, a+H]} \mathcal{G}(a + H - \alpha, \alpha). \tag{84}$$

Considerăm ecuaţia în necunoscuta H :

$$\overline{\mathcal{F}}^*(H) = \overline{G}(H)\,[\overline{\mathcal{A}}_n(H)\,\overline{\mathcal{H}}_1(H) + \overline{\mathcal{A}}_{n-1}(H)\,\overline{\mathcal{H}}_2(H) + \ldots + $$
$$+ \overline{\mathcal{A}}_2(H)\,\overline{\mathcal{H}}_{n-11}(H)] + \overline{\mathcal{G}}(H)\,\overline{\mathcal{A}}_1(H) - 1 = 0. \tag{85}$$

Se observă că funcţia $\overline{\mathcal{F}}^*(H)$ este nedescrescătoare de variabila H în intervalul $(0, b - a)$, întrucît funcţiile $\overline{\mathcal{A}}_i(H)$, $\overline{\mathcal{H}}(H)$, $\overline{G}(H)$, $\overline{\mathcal{G}}(H)$, care intervin în expresia funcţiei $\overline{\mathcal{F}}^*(H)$ sînt nedescrescătoare pentru $H \in (0, b - a)$. Fie $\overline{H}_0^*$ marginea inferioară a rădăcinilor din intervalul $(0, b - a)$ a ecuaţiei (85) ; dacă această ecuaţie nu admite nici o rădăcină în intervalul $(0, b - a)$, atunci considerăm prin definiţie $\overline{H}_0^* = b - a$. Are loc :

Teorema 3*. *In ipotezele* 1°—3° *de la* § 3, $H_0^* > \overline{H}_0^*$.

Această teoremă se demonstrează întocmai ca şi teorema 3. Din teoremele 2* şi 3* rezultă îndată următoarea

Consecinţă. *In ipotezele teoremelor* 2* *şi* 3*, *oricare ar fi* $\alpha \in [a, a + \overline{H}_0^*)$, are loc inegalitatea $\mathcal{K}(x, \alpha) > 0$, pentru $x \in (\alpha, a + \overline{H}_0^*)$.

О ПРИМЕНИМОСТИ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ С. А. ЧАПЛЫГИНА В СЛУЧАЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящем труде исследуется вопрос интерполяции типа $(n - 1, 1)$ решениями линейных дифференциальных уравнений порядка n и устанавливаются для интерполяции такого типа теоремы аналогичные теореме Валле Пуссена [35]. Исследуемый вопрос тесно связан с вопросом применимости теоремы дифференциальных неравенств С. А. Чаплыгина в том случае, когда все узлы интерполяции совпадают, в смысле следующего определения:

Определение. *Пусть* $L_n[y]$ *линейный однородный дифференциальный оператор порядка* n, *с непрерывными коэффициентами на ин-*

тервале $[a, b)$, $a_0(x) \neq 0$ *для* $x \in [a, b)$ *а пусть* $x_0 \in [a, b)$. *Говорим, что* L_n *обладает свойством* $T_{n, x_0}[a, b)$ *если какой бы ни была функция* $f(x) \in C^n[a, b)$ *удовлетворяющая условиям* (2), *а также неравенству* (3), *эта функция удовлетворяет неравенству* (4).

Говорим, что оператор L_n *обладает свойством* $T_n[a, b)$, *если он обладает свойством* $T_{n, x_0}[a, b)$ *какой бы ни был узел* $x_0 \in [a, b)$.

Пусть $\mathcal{L}[y]$ линейный и однородный дифференциальный оператор, порядка σ. Предполагаем, что он допускает разложение вида (20), где $L_i[y]$, являются линейными дифференциальными операторами порядков $k_i (k_1 + k_2 + \ldots + k_n = \sigma)$ и ещё, что выполняются следующие условия:

1°. *Каким бы ни был* $i = 1, 2, \ldots, n$, *коэффициенты* $a_{i,0}(x), \ldots, a_{i,k_i}(x)$ *оператора* L_i *из* (19) *принадлежут классу* $C^{\tau_i+1}(a, b)$, *где* $\tau_{i+1} = k_{i+1} + k_{i+2} + \ldots + k_n$ *и* $a_{i,0}(x) \neq 0$ *на интервале* $[a, b]$.

2°. *Каким бы ни был* $i = 1, 2, \ldots, n$, *оператор* L_i *обладает свойством* $T_{k_i}[a, b)$.

3°. *Коэффициенты* $A_i(x)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, *входящие в выражение* (20) *оператора* $\mathcal{L}$ *являются непрерывными функциями на интервале* $[a, b]$.

В труде устанавливается следующая

Теорема. *При условиях* 1°, 2°, 3° *и при предположении* $k_n > 1$, *оператор* $\mathcal{L}$ *из* (20) *обладает свойством* $T_\sigma[a, \overline{H}_0^*)$, *где* $\overline{H}_0^*$ *представляет собой нижнюю грань корней из интервала* $(0, b - a)$ *уравнения* (85), *по неизвестной* H. (Если уравнение (85) не допускает таких корней, то берется $\overline{H}_0^* = b - a$).

В уравнении (85) функции $\overline{\mathcal{A}}_i(H)$ даются формулами (57), а $\overline{\mathcal{H}}_i(H)$, $\overline{G}(H)$ и $\overline{\mathcal{G}}(H)$ определяются следующим образом:

I. Пусть i натуральное число, удовлетворяющее неравенству $i \leq n - 1$, и пусть $\Pi_i[Y]$ дифференциальный оператор, определённый в (25) и имеющий порядок $\tau_i = k_i + k_{i+1} + \ldots + k_{n-1}$.

В труде показано, что при условиях 1° — 3°, оператор Π_i обладает свойством $T_{\tau_i}(a, b)$. Далее, пусть α любое число из $[a, b)$ и пусть $\Lambda_i(x, \alpha)$ решение неоднородного дифференциального уравнения (26), удовлетворяющее для $x = \alpha$ условиям (27). Из свойства $T_{\tau_i}[a, b)$ оператора Π вытекает неравенство $N_i(x, \alpha) > 0$ для $x \in (\alpha, b)$. Имея ввиду это неравенство, определяются числа $\mathcal{H}(h, \alpha)$ и $\overline{\mathcal{H}}_i(H)$ соотношениями (28) и (57).

II. При условиях 1° — 3° и при дополнительном предположении $k_n > 1$, в труде показано, что краевая задача (70), (71), допускает функцию Грина, которая обозначается $G(x, s; x_1, x_2)$ и при помощи которой определяются функции $G(h, \alpha)$ и $\mathcal{G}(h, \alpha)$, по формулам (73) и (74), а потом функции $\overline{G}(H)$ и $\overline{\mathcal{G}}(H)$ при помощи формул (84).

Для доказательства вышеуказанной теоремы использовались лемы 2, 3 и 4. Лема 2 уточняет известную теорему о среднем Г. Пойа [24], а лема 3 касается сохранения в определённом смысле свойства T двух линейных дифференциальных операторов, при составлении их произведений.

SUR L'APPLICABILITÉ DU THÉORÈME DES INÉGALITÉS DIFFÉRENTIELLES DE S. A. TCHAPLYGUINE DANS LE CAS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

RÉSUMÉ

Dans ce travail on étudie le problème de l'interpolation du type $(n-1, 1)$ aux solutions des équations différentielles linéaires d'ordre n et on établit pour l'interpolation de ce type des théorèmes analogues au théorème de C. de la Vallée Poussin [35]. Le problème traité est en rapport étroit avec le problème de l'applicabilité du théorème des inégalités différentielles de S. A. Tchaplyguine, correspondant au cas où tous les noeuds d'interpolation sont confondus, suivant la définition suivante :

DÉFINITION. *Soit $L_n[y]$ un opérateur différentiel linéaire et homogène d'ordre n, ayant les coefficients continus dans un intervalle $[a, b)$, $a_0(x) \neq 0$ pour $x \in [a, b)$ et soit $x_0 \in [a, b)$. On dit que L_n possède la propriété $T_{n, x_0}[a, b)$ si, quelle que soit la fonction $f(x) \in C^n[a, b)$, satisfaisant aux conditions* (2), *ainsi qu'à l'inégalité* (3), *cette fonction vérifie l'inégalité* (4).

On dit que l'opérateur L_n possède la propriété $T_n[a, b)$, s'il a la propriété $T_{n, x_0}[a, b)$ quel que soit le noeud $x_0 \in [a, b)$.

Dans le présent travail on considère un opérateur différentiel linéaire et homogène $\mathcal{L}[y]$ d'ordre σ, dont on suppose q'il admet une décomposition de la forme (20), où $L_i[y]$ sont des opérateurs différentiels linéaires ayant respectivement les ordres k_i $(k_1 + k_2 + \ldots + k_n = \sigma)$. On suppose aussi que sont remplies les conditions suivantes :

1°. *Quel que soit $i = 1, 2, \ldots, n$, les coefficients $a_{i,0}(x), \ldots, a_{i,k_i}(x)$ de l'opérateur L_i de* (19) *appartiennent à la classe $C^{\tau_{i+1}}[a, b)$, où $\tau_{i+1} = k_{i+1} + k_{i+2} + \ldots + k_n$ et $a_{i,0}(x) \neq 0$ dans l'intervalle $[a, b)$.*

2°. *Quel que soit $i = 1, 2, \ldots, n$, l'opérateur L_i possède la propriété $T_{k_i}[a, b)$.*

3°. *Les coefficients $A_i(x)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ qui interviennent dans l'expression* (20) *de l'opérateur $\mathcal{L}$ sont des fonctions continues dans l'intervalle $[a, b)$.*

Dans le travail on établit entre autres le théorème suivant :

THÉORÈME. *Dans les hypothèse 1°, 2°, 3° et dans l'hypothèse $k_n > 1$, l'opérateur $\mathcal{L}$ de* (20) *possède la propriété $T_\sigma[a, \overline{H}_0^*)$, où $\overline{H}_0^*$ représente la borne inférieure des racines dans l'intervalle $(0, b-a)$ de l'équation* (85) *dans l'inconnue H.* (Si l'équation (85) n'admet pas de telles racines, alors on prend $\overline{H}_0^* = b - a$).

Dans l'équation (85) les fonctions $\overline{\mathcal{A}}_i(H)$ sont données par les formules (57), et $\overline{\mathcal{N}}_i(H)$, $\overline{G}(H)$ et $\overline{\mathcal{Q}}(H)$ se définissent comme suit :

I. Soit i un nombre naturel satisfaisant à l'inégalité $i \leqq n - 1$, et soit $\Pi_i[Y]$ l'opérateur différentiel défini dans (25) et ayant l'ordre $\overline{\tau}_i = k_i + k_{i+1} + \ldots + k_{n-1}$.

Il est montré dans le travail que dans les hypothèses 1° — 3° l'opérateur Π_i possède la propriété $T_{\overline{\tau}_i}[a, b)$. Soit ensuite α un nombre quelconque de $[a, b)$ et soit $N_i(x, \alpha)$ la solution en rapport avec la variable y de l'équation différentielle non-homogène (26), satisfaisant pour $x = \alpha$ aux conditions (27). De la propriété $T_{\overline{\tau}_i}[a, b)$ de l'opérateur Π_i il résulte l'inégalité $N_i(x, \alpha) > 0$, pour $x \in (\alpha, b)$. En tenant compte de cette inégalité, on définit les nombres $\mathcal{N}_i(h, \alpha)$ et $\overline{\mathcal{N}}_i(H)$ respectivement par les relations (28) et (57).

II. Dans les hypothèses 1° — 3° et dans l'hypothèse supplémentaire $k_n > 1$, on montre dans le travail que le problème bilocal (70), (71) admet une fonction Green que l'on note $G(x, s; x_1, x_2)$, au moyen de laquelle on définit les fonctions $G(h, \alpha)$ et $\mathcal{Q}(h, \alpha)$, conformément aux formules (73) et (74) et puis les fonctions $\overline{G}(H)$ et $\overline{\mathcal{Q}}(H)$ à l'aide des formules (84).

Afin de démontrer le théorème énoncé, on a utilisé les lemmes 2, 3 et 4. Le lemme 2 apporte une précision dans un théorème connu de moyenne établi par G. Pólya [24], et le lemme 3 se réfère à la conservation dans un certain sens de la propriété T de deux opérateurs différentiels linéaires par la formation de leur produit.

BIBLIOGRAFIE

1. Алиев Р. Г., *Теоремы о дифференциальном неравенстве для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка с многочисленными краевыми условиями.* Доклады второй сибирской конференции по математике и механике, Томск, 1962.
2. Arамă O., *Intervale de neoscilație la ecuații diferențiale liniare.* Studii și cercet. de matem. (Cluj), **XIII**, *2*, (1962).
3. — *Problema bilocală și teorema inegalităților diferențiale cu noduri confundate, a lui S. A. Ciaplîghin, pentru ecuații diferențiale liniare de ordinul doi.* Studii și cercet. de matem. (Cluj), **IX**, 7–38 (1958).
4. — *Problema polilocală.* Raport prezentat la Colocviul de analiză numerică din 8–13 dec. 1960.
5. Азбелев Н. В., *О границах применимости теоремы С. А. Чаплыгина.* Доклады Акад. Наук СССР, **89**, № *4*, 489—591 (1953).
6. — *Об одном достаточном условий применимости метода Чаплыгина к уравнениям высших порядков.* Доклады Акад. Наук СССР, **99**, № *4*, 493—494 (1954).
7. — *К вопросу о распространении метода Чаплыгина за границы применимости теоремы о дифференциальных неравенствах.* Доклады Акад. Наук СССР, **102**, №, *3*, 429—430 (1955).
8. — *О границах применимости теоремы Чаплыгина о дифференциальных неравенствах.* Математ. сборник, **39**, *2*, 161—178 (1956).
9. Азбелев Н. В., Рахматуллина Л. Ф., Цалюк З. Б., *О распространении решения задачи Чаплыгина за границу применимости теоремы о дифференциальных неравенствах.* Журнал „Научные доклады высшей школы", физико-математ. науки, № *2*, 3—5, (1958).
10. Азбелев Н. В., Цалюк З. Б., *О задаче Чаплыгина.* Украинский математ. журнал, **X**, № *1*, 3—12 (1958).

11. — *Заметка о неосцилляции решений дифференциальных уравнений n-ого порядка.* Ученые записки Удмуртского государственного педагог. института, 12, 44—46 (1958).

12. — *К вопросу о распределении нулей решений линейного дифференциального уравнения третего порядка.* Матем. сборник, **51** (93), № *4*, 475—486 (1960).

13. Балуев А. Н., *О методе С. А. Чаплыгина,* Вестник Ленинградского университета, **13**, *3*, 27—42 (1956).

14. Кащеев Н. А., *Точная граница применимости теоремы С. А. Чаплыгина для линейного уравнения.* Доклады Акад. Наук СССР, **111**, № *5*, 937—940 (1956).

15. Кухта Г. П., *Замечания по поводу условий L* и L** Н. В. Азбелева.* Уч. зап. Кишиневск. ун-та, **29**, 49—52 (1957).

16. Левин А. Ю., *О некоторых оценках дифференцируемой функции.* Доклады Акад. Наук СССР, **138**, № *1*, 37—38 (1961).

17. — *О дифференциальных свойствах функции Грина многоточечной краевой задачи.* Доклады Акад. Наук СССР, **136**, № *5*, 1022—1025 (1961).

18. Лузин Н. Н., *О методе приближенного интегрирования акад. С. А. Чаплыгина.* Успехи математ. наук, **6**, *6* (1951).

19. Mlak W., *Differential inequalities in linear spaces.* Annales polonici matematici, **V**, 95—101 (1958).

20. — *Differential inequalities with unbounded operators in Banach spaces.* Annales polonici mathematici, **IX**, 101—111 (1960).

21. Moldovan E., *Asupra noţiunii de funcţie convexă faţă de o mulţime de funcţii interpolatoare.* Studii şi cercet. de matem. (Cluj), **IX**, 161—224 (1958); idem în limba franceză în revista Mathematica, **1**(**24**), 49—80, 281—286 (1959).

22. Наймарк М. А., *Линейные дифференциальные операторы.* Гос. изд. технико-теоретической лит., Москва, 1954.

23. Petersson H., *Über Interpolation durch Lösungen linearer Differential Gleichungen* Abhandl. Math. Sem. Hamburg, **16**, 40—55 (1949).

24. Pólya G., *On the mean-value theorem corresponding to a given Linear homogeneous differential equation.* Amer. Math. S. Bull., **24**, 312—324 (1922).

25. Szarski J., *Sur les systèmes majorants d'équations différentielle ordinaires.* Annales de la Soc. Polanaise de Mathémat., **XXIII**, 206—223 (1950).

26. — *Sur les systèmes d'inégalites différentielles ordinaires remplies en dehors de certains ensembles.* Annales de la Soc. Polonaise de Mathem., **XXIV**, 1—8 (1953).

27. Цалюк З. Б., *Об условиях разрешимости задачи Чаплыгина.* Ученые записки Удмуртского гос. пед. ин-та, **11**, 119—121 (1957).

28. — *Об условиях разрешимости задачи Чаплыгина.* Кандидатская диссертация, Казанский гос. университет, 1958.

29. — *Замечание по поводу применения условий разрешимости задачи Чаплыгина к вопросам качественной теории уравнений.* Доклады Акад. Наук СССР, **134**, № *1*, 52—54 (1960).

30. Чаплыгин С. А., *Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений.* Москва—Ленниград, Гостехиздат, 1950.

31. Чичкин Е. С., *Теорема о дифференциальном неравенстве для многоточечных краевых задач.* Известия высших учебных заведений, Математика, 2 (**27**) 170—179 (1962).

32. — *Теорема о дифференциальном неравенстве для многоточечных краевых задач.* Итоговая научная конференция Казанского гос. ун-та им. В. И. Ульянова—Ленина за 1960 год. Краткое содержание докладов, 40—42, Казань 1961.

33. — *Некоторые применения условий разрешимости задачи Чаплыгина к вопросам существования и единственности решений краевых задач.* Докл. конференц. по теоретич. и прикл. вопросам. мех-ки. Изд-во Томского ун-та, **47**, (1960).

34. — *Об одной неосцилляционной теореме для линейного самосопряженного дифференциального уравнения четвертого порядка.* Известия высших учебных заведений, Математика, № *4* (*17*), 206—209 (1960).

35. Vallée Poussin Ch. J., *Sur l'équation différentielle du second ordre. Détermination d'une intégrale par deux valeurs assignées. Extension aux équations d'ordre n.* Journ. de Math. pures et appl. (**9**), 8, **125**—144 (1929).

36. Widder D. V., *A general mean-value theorem.* Amer. M. S. Trans., **26**, 385—394 (1924).

37. Wazewski T., *Systèmes des équations et des inégalités différentielles ordinaires aux deuxièmes membres monotones et leurs applications.* Annales de la Soc. Polonaise de Mathemat., **XXIII**, 112—166 (1950).

38. — *Certaines propositions de caractère „épidermique" relatives aux inégalités différentielles.* Annales de la Soc. Polonaise de Mathém., **XXIV**, 1—12 (1951).

Primit. la 1. XII. 1962.