RESTUL ÎN FORMULA DE INTEGRARE NUMERICĂ A LUI NYSTRÖM

DE

D. V. IONESCU

(Cluj)

Să considerăm ecuația diferențială

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

și să presupunem că soluția ei care satisface la condiția $y(x_0) = y_0$, a fost calculată în prealabil pe nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_5$ în progresie aritmetică cu rația $h = x_1 - x_0$. Pentru calculul lui $y(x_6)$ unde $x_6 = x_5 + h$, se folosește o formulă de integrare numerică de forma

$$\begin{aligned} y(x_6) = y(x_4) + h \Big[g(x_5) &+ \frac{1}{3}(\Delta_2 g(x_5) + \Delta_3 g(x_5) + \Delta_4 g(x_5) + \Delta_5 g(x_5)) - \\ &- \frac{1}{90}(\Delta_4 g(x_5) + 2\Delta_5 g(x_5)) \Big] + R \end{aligned} \tag{2}$$

care se numește *formula lui Nystrom* [1]. În această formulă avem

$$g(x) = f[x, y(x)], \tag{3}$$

iar

$$\begin{aligned} \Delta_2 g(x_5) &= g(x_5) - 2g(x_4) + g(x_3) \\ \Delta_3 g(x_5) &= g(x_5) - 3g(x_4) + 3g(x_3) - g(x_2) \\ \Delta_4 g(x_5) &= g(x_5) - 4g(x_4) + 6g(x_3) - 4g(x_2) + g(x_1) \\ \Delta_5 g(x_5) &= g(x_5) - 5g(x_4) + 10g(x_3) - 10g(x_2) + 5g(x_1) - g(x_0). \end{aligned} \tag{4}$$

Formula (2) se mai scrie sub forma

$$\begin{aligned} y(x_6) = y(x_4) + \frac{h}{90}[297\, g(x_5) &- 406 f(x_4) + 574\, g(x_3) - 426\, g(x_2) + \\ &+ 169\, g(x_1) - 28\, g(x_0)] + R. \end{aligned} \tag{5}$$

În această lucrare vom determina restul formulei de integrare numerică (2) sau (5), pe care-l vom pune sub formă de integrală definită, din care va rezulta o evaluare a valorii lui absolute. Vom presupune că funcția $f(x, y)$ are derivate parțiale în raport cu x și y, pînă la ordinul 6, continue în domeniul D definit de inegalitățile

$$x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + a, \quad |y - y_0| \leqslant b$$

și că soluția $y(x)$, care satisface la condiția $y(x_0) = y_0$ este definită pe intervalul $[x_0, x_0 + a]$.

1. Pentru a determina restul formulei de integrare numerică (2) sau (5), vom întrebuința metoda noastră de lucru [2]. Alăturăm la intervalele $[x_0, x_1], \ldots, [x_5, x_6]$ funcțiile $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_6(x)$ care sînt soluții ale ecuațiilor diferențiale

$$\varphi_1^{(7)}(x) = 0, \quad \varphi_2^{(7)}(x) = 0, \ldots, \varphi_6^{(7)}(x) = 0 \tag{6}$$

și care satisfac la următoarele condiții la limită

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(x_0) = 0, && \varphi_1'(x_0) = 0, \ldots, \varphi_1^{(4)}(x_0) = 0, \\
& && \varphi_1^{(5)}(x_0) = -28h, \quad \varphi_1^{(6)}(x_0) = 0 \\
&\varphi_2(x_1) = \varphi_1(x_1), && \varphi_2'(x_1) = \varphi_1'(x_1), \ldots, \varphi_2^{(4)}(x_1) = \varphi_1^{(4)}(x_1), \\
& && \varphi_2^{(5)}(x_1) - \varphi_1^{(5)}(x_1) = 169\, h, \quad \varphi_2^{(6)}(x_1) - \varphi_1^{(6)}(x_1) = 0 \\
&\varphi_3(x_2) = \varphi_2(x_2), && \varphi_3'(x_2) = \varphi_2'(x_2), \ldots, \varphi_3^{(4)}(x_2) = \varphi_2^{(4)}(x_2), \\
& && \varphi_3^{(5)}(x_2) - \varphi_2^{(5)}(x_2) = -426\, h, \quad \varphi_3^{(6)}(x_2) - \varphi_2^{(6)}(x_2) = 0 \\
&\varphi_4(x_3) = \varphi_3(x_3), && \varphi_4'(x_3) = \varphi_3'(x_3), \ldots, \varphi_4^{(4)}(x_3) = \varphi_3^{(4)}(x_3), \\
& && \varphi_4^{(5)}(x_3) - \varphi_3^{(5)}(x_3) = 574\, h, \quad \varphi_4^{(6)}(x_3) - \varphi_3^{(6)}(x_3) = 0 \\
&\varphi_5(x_4) = \varphi_4(x_4), && \varphi_5'(x_4) = \varphi_4'(x_4), \ldots, \varphi_5^{(4)}(x_4) = \varphi_4^{(4)}(x_4), \\
& && \varphi_5^{(5)}(x_4) - \varphi_4^{(5)}(x_4) = -406\, h, \quad \varphi_5^{(6)}(x_4) - \varphi_4^{(6)}(x_4) = -90 \\
&\varphi_6(x_5) = \varphi_5(x_5), && \varphi_6'(x_5) = \varphi_5'(x_5), \ldots, \varphi_6^{(4)}(x_5) = \varphi_5^{(4)}(x_5), \\
& && \varphi_6^{(5)}(x_5) - \varphi_5^{(5)}(x_5) = 297\, h, \quad \varphi_6^{(6)}(x_5) - \varphi_5^{(6)}(x_5) = 0 \\
&\varphi_6(x_6) = 0, && \varphi_6'(x_6) = 0, \ldots, \varphi_6^{(4)}(x_6) = 0, \\
& && \varphi_6^{(5)}(x_6) = 0, \quad \varphi_6^{(6)}(x_6) = -90.
\end{aligned} \tag{7}$$

În baza ipotezelor făcute asupra funcției $f(x, y)$ soluția $y(x)$ are pe intervalul $[x_0, x_0 + a]$, derivate succesive continue pînă la ordinul 7, și vom avea

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi_1^{(7)} y\, dx = 0, \quad \int_{x_1}^{x_2} \varphi_2^{(7)} y\, dx = 0, \ldots, \int_{x_5}^{x_6} \varphi_6^{(7)} y\, dx = 0.$$

Aplicînd la fiecare integrală de mai sus, formula generalizată de integrare prin părți vom putea scrie

$$\left[\varphi_1^{(6)} y - \varphi_1^{(5)} y' + \ldots + \varphi_1'' y^{(4)} - \varphi_1' y^{(5)} + \varphi_1 y^{(6)}\right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \varphi_1 y^{(7)}\, dx = 0$$

$$\left[\varphi_2^{(6)} y - \varphi_2^{(5)} y' + \ldots + \varphi_2'' y^{(4)} - \varphi_2' y^{(5)} + \varphi_2 y^{(6)}\right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \varphi_2 y^{(7)}\, dx = 0$$

. . . .

$$\left[\varphi_6^{(6)} y - \varphi_6^{(5)} y' + \ldots + \varphi_6'' y^{(4)} - \varphi_6' y^{(5)} + \varphi_6 y^{(6)}\right]_{x_5}^{x_6} - \int_{x_5}^{x_6} \varphi_6 y^{(7)}\, dx = 0.$$

Adunînd toate aceste formule membru cu membru și ținînd seama de condițiile de limită (7), obținem formula de integrare (5) :

$$h[-28\, g(x_0) + 169\, g(x_1) - 426\, g(x_2) + 574\, g(x_3) - 406\, g(x_4) + 297\, g(x_5)] +$$
$$+ 90[y(x_4) - y(x_5)] - \int_{x_0}^{x_6} \varphi y^{(7)} dx = 0$$

de unde deducem că restul în formula (5) este dat de formula

$$R = -\frac{1}{90} \int \varphi y^{(7)} dx. \tag{8}$$

Existența formulei de integrare numerică (5) cu restul dat de formula (8) depinde de integrarea sistemului de ecuații diferențiale (6) cu condițiile (7).

2. Să determinăm pe rînd funcțiile $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_6(x)$.

Avem

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= -28\, h \frac{(x - x_0)^5}{5!} \\
\varphi_2(x) &= -28\, h \frac{(x - x_0)^5}{5!} + 169\, h \frac{(x - x_1)^5}{5!} \\
\varphi_3(x) &= -28\, h \frac{(x - x_0)^5}{5!} + 169\, h \frac{(x - x_1)^5}{5!} - 426\, h \frac{(x - x_2)^5}{5!} \\
\varphi_4(x) &= -28\, h \frac{(x - x_0)^5}{5!} + 169\, h \frac{(x - x_1)^5}{5!} \\
&\quad - 426\, h \frac{(x - x_2)^5}{5!} + 574\, h \frac{(x - x_3)^5}{5!}
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\varphi_5(x) = -28\,h\,\frac{(x-x_0)^5}{5\,!} + 169\,h\,\frac{(x-x_1)^5}{5\,!} - 426\,h\,\frac{(x-x_2)^5}{5\,!} +$$
$$+ 574\,h\,\frac{(x-x_3)^5}{5\,!} - 406\,h\,\frac{(x-x_4)^5}{5\,!} - 90\,\frac{(x-x_4)^6}{6\,!}$$

$$\varphi_6(x) = -28\,h\,\frac{(x-x_0)^5}{5\,!} + 169\,h\,\frac{(x-x_1)^5}{5\,!} - 426\,h\,\frac{(x-x_2)^5}{5\,!} + \qquad (9)$$
$$+ 574\,h\,\frac{(x-x_3)^5}{5\,!} - 406\,h\,\frac{(x-x_4)^5}{5\,!} -$$
$$- 90\,\frac{(x-x_4)^6}{6\,!} + 297\,h\,\frac{(x-x_5)^5}{5\,!}.$$

Cu aceste formule toate condiţiile la limită (7) din nodurile x_0, $x_1, \ldots, x_5$ sînt verificate. De asemenea sînt verificate condiţiile din nodul x_6 şi din această cauză $\varphi_6(x)$ se mai scrie sub forma

$$\varphi_6(x) = -\,90\,\frac{(x-x_6)^6}{6\,!}. \qquad (10)$$

3. Putem acum să facem studiul funcţiei $\varphi(x)$.

Să observăm că avem

$$\begin{aligned}
\varphi_1^{(5)}(x) &= -28\,h\\
\varphi_2^{(5)}(x) &= 141\,h\\
\varphi_3^{(5)}(x) &= -285\,h\\
\varphi_4^{(5)}(x) &= 289\,h\\
\varphi_5^{(5)}(x) &= -117\,h - 90(x-x_4)\\
\varphi_6^{(5)}(x) &= 90(x_6-x)
\end{aligned} \qquad (11)$$

şi că nici una din aceste derivate nu se anulează pe intervalul respectiv.

Avem

$$\varphi(x_0)=0,\quad \varphi'(x_0)=0,\quad \varphi''(x_0)=0,\quad \varphi'''(x_0)=0$$
$$\varphi(x_6)=0,\quad \varphi'(x_6)=0,\quad \varphi''(x_6)=0,\quad \varphi'''(x_6)=0,$$

iar funcţia $\varphi(x)$ este continuă împreună cu derivatele φ', φ'', φ''', $\varphi^{(4)}$ pe intervalul $[x_0, x_6]$.

Deoarece $\varphi(x_0)=0$, $\varphi(x_6)=0$ derivata $\varphi'(x)$ are cel puţin un zero pe intervalul $[x_0, x_6]$. Să demonstrăm că acest zero este *unic*.

Într-adevăr dacă $\varphi'(x)$ ar avea două zerouri pe intervalul (x_0, x_6), ar urma aplicînd teorema lui Rolle ca $\varphi''(x)$ să aibă trei zerouri, $\varphi'''(x)$ să aibă patru zerouri, iar $\varphi^{(4)}(x)$ să aibă *cinci* zerouri $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5$.

Avem

$$\varphi_1(x) = -28\,h\,\frac{(x-x_0)^5}{5\,!},\quad \varphi_6(x) = -90\,\frac{(x-x_6)^6}{6\,!}$$

ceea ce înseamnă că nici unul din zerourile lui $\varphi^{(4)}(x)$ nu se găseşte pe $(x_0, x_1]$, sau pe $[x_5, x_6)$. Atunci punctele $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5$ se găsesc pe intervalul (x_1, x_5).

Pe un interval parţial $(x_1, x_2]$, sau $(x_2, x_3]$, sau $(x_3, x_4]$ sau (x_4, x_5) nu se pot găsi două puncte dintre $\xi_1, \ldots, \xi_5$, căci dacă s-ar găsi ar trebui ca derivata $\varphi^{(5)}(x)$ să se anuleze pe acest interval, ceea ce este imposibil, după cum arată formulele (11).

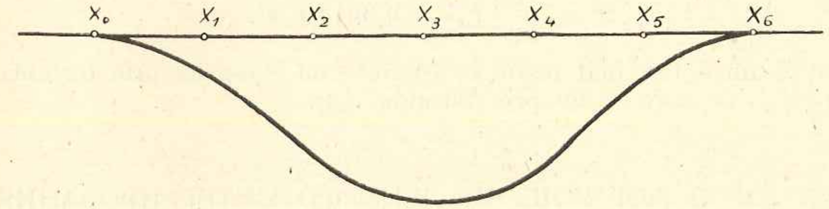

Figura 1

Rezultă că $\varphi'(x)$ are un singur zero pe intervalul (x_0, x_6), şi deoarece $\varphi_1(x)$ şi $\varphi_6(x)$ sînt negative pe intervalele respective, graficul funcţiei $\varphi(x)$ este cel din fig. 1.

4. Proprietatea funcţiei $\varphi(x)$ de a fi negativă pe intervalul (x_0, x_6), permite să evaluăm restul R dat de formula (8). Avem

$$R = -\frac{y^{(7)}(\xi)}{90}\int_{x_0}^{x_6}\varphi(x)\,dx,$$

unde $\xi \in (x_0, x_6)$.

Fără greutate se arată ţinînd seama de formulele (9) că

$$\int_{x_0}^{x_6}\varphi(x)\,dx = -\frac{1139}{42}h^7,$$

astfel încît formula precedentă se mai scrie

$$R = \frac{1139}{3780}h^7 y^{(7)}(\xi). \qquad (12)$$

Din ecuaţia diferenţială (1) se deduce prin derivări succesive că

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f = f_1(x, y)$$

$$y''' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} f = f_2(x, y)$$

. . . .

$$y^{(7)} = \frac{\partial f_5}{\partial x} + \frac{\partial f_5}{\partial y} f = f_6(x, y)$$

unde funcţiile $f_1(x, y), \ldots, f_6(x, y)$ sînt continue pe dreptunghiul D. Dacă notăm cu F_6 o margine superioară a valorii absolute a lui $|f_6(x, y)|$, în dreptunghiul D, deducem că

$$|R| \leqslant \frac{1139}{3780} F_6 h < 0{,}3014\, F_6 h^7. \tag{13}$$

Astfel am determinat restul în formula lui Nyström prin formula (8) şi am dat o evaluare a lui prin formula (13).

ОСТАТОК В ФОРМУЛЕ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ НИСТРЁМА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящем труде даётся выражение (8) остатка формулы Нистрёма (2) или (5) и изучается функция $\varphi(x)$, определённая дифференциальными уравнениями (6) и предельными условиями (7).

Доказывая что функция $\varphi(x)$ отрицательна на интервале (x_0, x_6), автор даёт остаток R в виде (12), откуда вытекает оценка (13).

LE RESTE DANS LA FORMULE D'INTÉGRATION NUMÉRIQUE DE NYSTRÖM

RÉSUMÉ

Dans ce travail, on donne l'expression (8) du reste de la formule de Nyström (2) ou (5) et l'on étudie la fonction $\varphi(x)$ déterminée par les équations différentielles (6) et les conditions aux limites (7).

En démontrant que la fonction $\varphi(x)$ est négative sur l'intervalle (x_0, x_6), on met le reste R sous la forme (12), d'où résulte l'évaluation (13).

BIBLIOGRAFIE

1. Valiron G., *Equations fonctionnelles*, Paris, 1950, p. 330.
2. Ionescu D. V., *Cuadraturi numerice*, Bucureşti, Ed. Tehnică, 1957.

Primit la 15. XII. 1962.