UNELE PROPRIETĂŢI ALE INFRAPOLINOAMELOR CONDIŢIONATE

DE

I. MARUŞCIAC

(Cluj)

Lucrare prezentată la Colocviul de teoria funcţiilor şi analiză funcţională din 21–27 sept. 1962, Bucureşti.

1. Fie K o mulţime compactă din planul complex (z) şi

$$A(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n \tag{1}$$

un polinom de grad cel mult n, ai cărui coeficienţi verifică relaţiile

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_{ik} a_k = 1, \; i = 0, 1, \ldots, r, \tag{2}$$

unde α_{ik} sînt numere complexe date astfel ca

$$\text{rang } \| \alpha_{ik} \| = r + 1.$$

În lucrarea [2] am definit o clasă de infrapolinoame condiţionate, cu scopul de a se studia diferite proprietăţi ale infrapolinoamelor în care se fixează anumiţi coeficienţi sau se impun alte restricţii asupra coeficienţilor polinomului. În lucrarea amintită s-au dat o serie de proprietăţi generale ale acestor polinoame, legate mai ales de localizarea rădăcinilor infrapolinomului şi de porprietatea de „ortogonalitate" a acestora. În prezenta notă se dau alte cîteva proprietăţi ale acestor polinoame în cazul cînd se particularizează în diferite moduri coeficienţii care apar în relaţiile liniare (2).

Astfel, polinomul

$$B(z) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_n \neq A(z)$$

se numeşte *polinom adjunct* $(r+1)$-*condiţionat al lui* $A(z)$ *pe mulţimea* K, dacă sînt îndeplinite următoarele trei condiţii :

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_{ik} b_k = 1, \quad i = 0, 1, \ldots, r, \tag{3}$$

$$B(z) = 0, \text{ dacă } A(z) = 0, \ z \in K \tag{4}$$

şi

$$|B(z)| < |A(z)|, \ z \in K \text{ şi } A(z) \neq 0. \tag{5}$$

Spunem că $A(z)$ este un *infrapolinom* $(r+1)$-*condiţionat pe mulţimea* K, dacă acesta nu admite nici un polinom adjunct $(r+1)$-condiţionat pe mulţimea K.

Dăm mai jos două dintre proprietăţile de bază ale acestor infrapolinoame stabilite în [2], de care vom avea nevoie în cele ce urmează.

TEOREMĂ 1. *Dacă* $A(z)$ *este un infrapolinom* $(r+1)$-*condiţional pe* K, *atunci orice divizor al său de grad cel puţin* $r+1$ *este deasemenea un infrapolinom* $(r+1)$-*condiţionat pe mulţimea* K.

TEOREMĂ 2. *Dacă* $A(z)$ *este un infrapolinom* $(r+1)$ *condiţional pe mulţimea* K (conţinînd cel puţin $n - r + 1$ puncte), *atunci* φ_z *fiind unghiul sub care se vede mulţimea* K *din punctul* z, *avem*

$$\varphi_{\alpha_1} + \varphi_{\alpha_2} + \ldots + \varphi_{\alpha_n} + \varphi_{\beta_1} + \varphi_{\beta_2} + \ldots + \varphi_{\beta_{k_r}} \geqslant \pi, \tag{6}$$

unde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *sînt rădăcinile lui* $A(z)$, *iar* $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{k_r}$-*rădăcinile polinomului*

$$B(z) = b_0 z^{k_r} + b_1 z^{k_{r-1}} + \ldots + b_r z^{k_0} + z^p, \tag{7}$$

ai cărui coeficienţi b_j *s-au determinat din condiţiile*

$$\sum_{j=0}^{r} \alpha_{i, k_j} b_j + \alpha_{i, n-p} = 0, \ i = 0, 1, \ldots, r. \tag{8}$$

cu numerele α_{i, k_j} *luate în aşa fel încît*

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} \alpha_{0l_0} & \alpha_{0k_1} & \ldots & \alpha_{0k_r} \\ \alpha_{1k_0} & \alpha_{1k_1} & \ldots & \alpha_{1k_r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{rk_0} & \alpha_{rk_1} & \ldots & \alpha_{rk_r} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{9}$$

presupunîndu-se $0 \leqslant k_0 < k_1 < \ldots < k_r \leqslant n$, *iar* p *este cel mai mic număr întreg diferit de numerele* $n - k_0, n - k_1, \ldots, n - k_r$.

2. Să notăm acum cu K^{-1} imaginea mulţimii K prin transformarea $w = \frac{1}{z}$.

TEOREMA 3. *Fie* K *o mulţime compactă din planul complex* (z), *care nu conţine* $(0 \notin K)$, *atunci un polinom*

$$A(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^{n-k},$$

ai cărui coeficienţi verifică condiţiile (2), *este atunci şi numai atunci un infrapolinom* $(r+1)$-*condiţionat pe* K, *cînd polinomul*

$$\widetilde{A}(z) = \sum_{k=0}^{n} \widetilde{a}_k z^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} z^{n-k}$$

este un infrapolinom $(r+1)$-*condiţionat pe mulţimea* K^{-1}, *verificînd condiţiile*

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_{i,n-k} \widetilde{a}_k = 1, \ i = 0, 1, \ldots, r. \tag{2'}$$

Într-adevăr, dacă $A(z)$ este un infrapolinom $(r+1)$-condiţionat pe K, ai cărui coeficienţi verifică relaţiile (2), punînd $w = \frac{1}{z}$, avem

$$\begin{aligned} A(z) &= a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots a_n = \\ &= \frac{1}{w^n}(a_n w^n + a_{n-1} w^{n-1} + \ldots + a_0) = \frac{\widetilde{A}(w)}{w^n}. \end{aligned} \tag{10}$$

De aici se vede că dacă coeficienţii a_k verifică relaţiile (2), atunci

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_{i,n-k} \widetilde{a}_k = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{i,n-k} a_{n-k} = 1, \ i = 0, 1, \ldots, r.$$

De asemenea, din (10) rezultă că dacă $A(z) = 0$, $z \in K$, atunci şi $A(w) = 0$, $w \in K^{-1}$. Dacă am presupune că $\widetilde{A}(w)$ admite un polinom adjunct $\widetilde{B}(w)$ $(r+1)$-condiţionat pe K^{-1}, care verifică condiţiile (2′), am avea

$$|\widetilde{B}(w)| < |\widetilde{A})w)|, \ w \in K^{-1}, \ \widetilde{A}(w) \neq 0.$$

Dar atunci, notînd

$$B(z) = z^n \widetilde{B}\left(\frac{1}{z}\right)$$

avem

$$|B(z)| = |z^n| \cdot \left|\widetilde{B}\left(\frac{1}{z}\right)\right| = \frac{1}{|w|^n} \cdot |\widetilde{B}(w)| < \frac{1}{|w|^n} \cdot |\widetilde{A}(w)| = |A(z)|,$$

ceea ce reprezintă o contradicție. Deci $A(w)$ este un infrapolinom $(r+1)$-condiționat pe K^{-1}. Reciproca se demonstrează la fel.

Să considerăm acum cazul infrapolinomelor în care s-au fixat coeficienții $a_0^*, a_1^*, \ldots, a_{r-k}^*, a_{n-k+1}^*, \ldots, a_n^*$. Aceste polinoame sînt cuprinse în cazul general, și este suficient să luăm pentru parametrii α_{ik}, (presupunînd mai întîi că toți coeficienții a_k^* fixați sînt diferiți de zero), următoarele valori :

$$\begin{gathered}
\alpha_{00} = \frac{1}{\overset{*}{a}_0}, \ \alpha_{0j} = 0, \ j \neq 0, \\
\alpha_{11} = \frac{1}{\overset{*}{a}_1}, \ \alpha_{1j} = 0, \ j \neq 1, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_{r-k\ r-k} = \frac{1}{\overset{*}{a}_{r-k}}, \ \alpha_{r-k,j} = 0, \ j \neq r-k, \\
\alpha_{r-k+1,n-k+1} = \frac{1}{\overset{*}{a}_{n-k+1}}, \ \alpha_{r-k+1,j} = 0, \ j \neq n-k+1, \\
\alpha_{rn} = \frac{1}{\overset{*}{a}_n}, \ \alpha_{rj} = 0, \ j \neq n.
\end{gathered} \tag{11}$$

Dacă un coeficient $a_j^* = 0$, atunci e suficient să punem în (11) $\alpha_{j0} = \frac{1}{\overset{*}{a}_0}$, $\alpha_{jj} = 1$, iar restul $\alpha_{jk} = 0$, $j \neq 0$, j. Coeficientul a_0^* se poate presupune totdeauna diferit de zero, pentru că în caz contrar infrapolinomul de gradul n $(r+1)$-condiționat devine un infrapolinom de gradul $n-1$ și r-condiționat.

Polinoame de genul acesta au fost considerate recent de către O. Shisha și J. L. Walsh [3], însă acolo s-a studiat numai cazul cînd în polinom se fixează primul și ultimul coeficient. În teorema care urmează să dă un rezultat mai general, care conține ca un caz particular rezultatul analog conținut în lucrarea [3].

TEOREMĂ 4. *Fie n, r și k $(0 \leqslant k \leqslant r < n)$ trei numere naturale oarecare, K o mulțime compactă din planul complex (z) și în cazul $k > 0$, $K \not\ni 0$. Fie de asemenea $A(z)$ un infrapolinom cu coeficienții $a_0^*, a_1^*, \ldots, a_{r-k}^*, a_{n-k+1}^*, \ldots, a_n^*$ fixați și care nu se anulează pe K, atunci pentru orice grupare formată din $r+1$ rădăcini ale sale, avem*

$$\varphi_{\alpha_0} + \varphi_{\alpha_1} + \ldots + \varphi_{\alpha_r} + k\varphi_0 \geqslant \pi, \tag{12}$$

φ_0 fiind unghiul sub care se vede mulțimea K din origine.

Într-adevăr, fie $D(z) = d_0 z^m + d_1 z^{m-1} + \ldots + d_m$, $(r+1 \leqslant m < n)$ un divizor al lui $A(z)$, adică

$$A(z) = D(z) \cdot E(z),$$

unde $E(z) = e_0 z^{n-m} + e_1 z^{n-m-1} + \ldots + e_{n-m}$. Atunci, se constată ușor, că coeficienții $d_0, d_1, \ldots, d_m$ verifică relațiile

$$\sum_{k=0}^{m} \beta_{ik} d_k = 1, \ i = 0, 1, \ldots, r, \tag{13}$$

unde

$$\beta_{ik} = \alpha_{ik} e_0 + \alpha_{i,k+1} e_1 + \ldots + \alpha_{i,k+n-m} e_{n-m} \tag{14}$$
$$i = 0, 1, \ldots, r, \ k = 0, 1, \ldots, m.$$

Din condițiile (11) se vede că în cazul cînd coeficienții fixați $a_j^* \neq 0$, avem

$$\begin{gathered}
\beta_{00} = \frac{e_0}{a_0^*}, \ \beta_{0j} = 0, \ j \neq 0, \\
\beta_{10} = \frac{e_1}{\overset{*}{a}_1}, \ \beta_{11} = \frac{e_0}{\overset{*}{a}_1}, \ \beta_{1j} = 0, \ j \neq 0, 1, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\beta_{r-k,0} = \frac{e_{r-k}}{\overset{*}{a}_{r-k}}, \ \beta_{r-k,1} = \frac{e_{r-k-1}}{\overset{*}{a}_{r-k}}, \ \ldots, \ \beta_{r-k,r-k} = \frac{e_0}{\overset{*}{a}_{r-k}}, \ \beta_{r-k,j} = 0, \ j > r-k, \\
\beta_{r-k+1,m} = \frac{e_{n-m-k+1}}{\overset{*}{a}_{n-k+1}}, \ldots, \beta_{r-k+1,m-k+1} = \frac{e_{n-m}}{\overset{*}{a}_{n-k+1}}, \ \beta_{r-k+1,j} = 0, j < m-k+1, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\beta_{r-1,m} = \frac{e_{n-m-1}}{\overset{*}{a}_{n-1}}, \ldots, \beta_{r-1,m-1} = \frac{e_{n-m}}{\overset{*}{a}_{n-1}}, \ \beta_{r-1,j} = 0, \ j \neq m-1, \ m, \\
\beta_{rm} = \frac{e_{n-m}}{\overset{*}{a}_n}, \ \beta_{rj} = 0, \ j \neq m,
\end{gathered}$$

iar determinantul (9) corespunzător acestui caz este următorul :

$$\Delta_r = \begin{vmatrix}
\frac{e_0}{\overset{*}{a}_0} & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\
\frac{e_1}{\overset{*}{a}_1} & \frac{e_0}{\overset{*}{a}_1} & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\frac{e_{r-k}}{\overset{*}{a}_{r-k}} & \frac{e_{r-k-1}}{\overset{*}{a}_{r-k}} & \ldots & \frac{e_0}{\overset{*}{a}_{r-k}} & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{e_{n-m}}{\overset{*}{a}_{n-k+1}} & \ldots & \frac{e_{n-m-k}}{\overset{*}{a}_{n-k+1}} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \frac{e_{n-m}}{a_n^*}
\end{vmatrix} \neq 0$$

Determinînd coeficienţii polinomului $B(z)$, din condiţiile (8) găsim $b_0 = b_1 = \ldots = b_r = 0$, iar $p = k$.

Aplicînd acum teorema 2 polinomului $D(z)$, care din cauza teoremei 2, este de asemenea un infrapolinom, avem

$$\varphi_{\gamma_1} + \varphi_{\gamma_2} + \ldots + \varphi_{\gamma_m} + k\varphi_0 \geqslant \pi,$$

$\gamma_1, \gamma, \ldots, \gamma_m$ -fiind rădăcinile lui $D(z)$. Cum divizorul $D(z)$ a fost oarecare, teorema este demonstrată.

În cazul cînd un coeficient $a_j^* = 0$, se face un raţionament analog luînd, după cum s-a indicat deja, pentru $\alpha_{j0} = \frac{1}{a_j^*}$, $\alpha_{jj} = 1$, iar restul $\alpha_{jk} = 0$, $k \neq 0, j$.

CONSECINŢĂ 1. *In condiţiile teoremei 4, cel puţin $n - r$ rădăcini al unui infrapolinom $A(z)$ $(r+1)$-condiţionat pe K, sînt situate în mulţimea M, formată din punctele din care mulţimea K se vede sub un unghi $\varphi \geqslant \frac{\pi - k\varphi_0}{r+1}$.*

Într-adevăr, să presupunem contrariul că ar exista $r+1$ rădăcini $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_r$ situate în exteriorul mulţimii M. Atunci am avea

$$\varphi_{\alpha_0} < \frac{\pi - k\varphi_0}{r+1},$$

$$\varphi_{\alpha_1} < \frac{\pi - k\varphi_0}{r+1},$$

$$\cdots\cdots$$

$$\varphi_{\alpha_r} < \frac{\pi - k\varphi_0}{r+1},$$

şi deci

$$\varphi_{\alpha_0} + \varphi_{\alpha_1} + \ldots + \varphi_{\alpha_r} < \pi - k\varphi_0,$$

ceea ce contrazice teorema 4. Prin urmare, în exteriorul mulţimii M nu pot exista decît cel mult r rădăcini, iar restul de $n - r$ sînt situate în M.

În cele ce urmează, prin K^* vom înţelege învelitoarea convexă închisă a lui K.

Rezultatul dat în consecinţa 1, după cum se vede, nu indică prea mult cînd originea este ,,apropiată" de învelitoarea convexă K^* a mulţimii K, căci atunci unghiul sub care se vede mulţimea K din origine este apropiat de π şi astfel relaţiile (12) nu arată prea mult. În cazul cînd originea este mai ,,departe" de K^*, atunci relaţiile (12), precum şi rezultatul conţinut în Consecinţa 1, arată că cel puţin $n - r$ din rădăcini trebuie să fie ,,apropiate" faţă de mulţime. Teorema care urmează va aduce anumite precizări şi în cazul cînd originea aparţine lui K^* sau este apropiată de aceasta, şi în polinom se fixează numai ultimii r coeficienţi, adică cazul în care situaţia originii faţă de mulţimea de definiţie joacă un rol esenţial.

În acest scop introducem nişte notaţii. Astfel, notăm cu $(K^{-1})_r^*$ mulţimea punctelor din planul complex (z) din ale cărei puncte mulţimea K^{-1} se vede sub un unghi $\varphi \geqslant \frac{\pi}{r+1}$, iar cu

$$C_r = [(K^{-1})_r^* - \{0\}]^{-1}, \tag{15}$$

unde $\{0\}$ înseamnă mulţimea redusă la punctul zero.

TEOREMA 5. *Fie K o mulţime compactă din planul (z), $0 \notin K$ şi $A(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + A_{n-r} z^r + \ldots A_n$ $(A_n \neq 0)$ un infrapolinom cu ultimii $r+1$ coeficienţi $A_{n-r}, \ldots, A_n$ fixaţi şi care nu se anulează pe K, atunci cel puţin $n - r$ din rădăcinile lui $A(z)$ sînt situate în C_r.*

Într-adevăr, din teorema 3 şi condiţiile (11), rezultă că polinomul

$$\tilde{A}(w) = \sum_{k=0}^{n} \tilde{a}_k w^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_k w^k$$

este un infrapolinom pe K^{-1} cu primii $r+1$ coeficienţi fixaţi. Însă atunci se ştie, dintr-o teoremă a lui M. F e k e t e [1], că cel puţin $n - r$ din rădăcinile lui $A(w)$ sînt situate în $[K^{-1}]_r^*$. Fie acestea $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-r}$.

Fie acum α_0 o rădăcină a polinomului $A(z)$. Atunci evident că $\alpha_0 \neq 0$, căci altfel ar rezulta $A_n = 0$, contrar ipotezei.

Din (10) avem

$$\tilde{A}(\alpha_0^{-1}) = \alpha_0^n A(\alpha_0) = 0$$

şi deci α_0^{-1} este o rădăcină al lui $A(w)$. Dacă $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-r}$ sînt contraimaginile lui $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-r}$ $(\alpha_j^{-1} = \beta_j,\ j = 1, 2, \ldots, n - r)$, atunci avem

$$\alpha_j^{-1} \in (K^{-1})_r^* - \{0\},\ j = 1, 2, \ldots, n - r,$$

de unde

$$\alpha_j \in [(K^{-1})_r^* - \{0\}]^{-1} = C_r,\ j = 1, 2, \ldots, n - r,$$

şi teorema este demonstrată.

CONSECINŢĂ 2. *In aceleaşi condiţii ca şi în Teorema 5, dacă $A(z)$ este un infrapolinom cu ultimul coeficient A_n fixat, atunci toate rădăcinile sale sînt conţinute în $C_0 = [(K^{-1})_0^* - \{0\}]^{-1}$.*

Acesta este tocmai un rezultat a lui M. F e k e t e conţinut într-o lucrare a lui O. S h i s h a şi J. L. W a l s h [3]. C_0 este intersecţia tuturor domeniilor circulare $D \supseteq K$ şi $D \not\ni 0$. Prin domeniu circular se înţelege un disc, complementara închisă a discului şi seminplanul închis.

Astfel, dacă mulţimea K este conţinută într-un disc ce nu conţine originea, atunci toate rădăcinile unui infrapolinom $A(z)$ pe K, sînt deasemenea conţinute în acelaşi disc. Dacă mulţimea K este conţinută într-o coroană circulară cu centrul în 0, toate rădăcinile lui $A(z)$ sînt conţinute în exteriorul cercului mai mic.

3. Infrapolinoamele considerate de noi conţin ca şi cazuri particulare şi infrapolinoamele supuse condiţiei ca în anumite puncte dinainte fixate, polinomul să ia nişte valori date. (În cazul infrapolinoamelor reale, curba reprezentativă să treacă prin anumite puncte date dinainte).

Astfel, să considerăm polinoamele

$$A(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n \tag{16}$$

supuse condiţiei ca în punctele $z_0, z_1, \ldots, z_r$ să ia valorile $w_0, w_1, \ldots, w_r$, adică

$$w_i = A(z_i),\ i = 0, 1, \ldots, r. \tag{17}$$

Putem presupune de la început că numerele $w_0, w_1, \ldots, w_r$ sînt diferite de zero, căci în caz contrar ar fi suficient să luăm polinoamele de forma $A(z) = (z - z_i)\, A_1(z)$, reducînd astfel problema la infrapolinoame de gradul $n - 1$.

Dacă luăm pentru $\alpha_{ik} = \dfrac{z_i^{n-k}}{w_i}$, $i = 0, 1, \ldots, r$, relaţiile (2) devin

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{z_i^{n-k}}{w_i} = 1,\ i = 0, 1, \ldots, r \tag{18}$$

sau

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\, z_i^{n-k} = w_i,\ i = 0, 1, \ldots, r,$$

care nu este altceva de cît condiţia (17).

Din cele arătate în [2] rezultă imediat că infrapolinoamele care verifică condiţiile (17) există pe orice mulţime compactă K şi pentru orice sisteme de numere complexe $z_0, z_1, \ldots, z_r$ şi $w_0, w_1, \ldots, w_r$. Şi celelalte rezultate găsite acolo pentru cazul general se pot transcrie imediat şi pentru acest caz particular. Aici vom analiza numai localizarea rădăcinilor infrapolinoamelor de acest gen.

Infrapolinoamele care verifică condiţia (17), le vom numi, pentru prescurtare, *infrapolinoame local* $(r + 1)$*-restrînse*.

Teorema 6. *Fie K o mulţime compactă din planul (z)* (conţinînd cel puţin $n - r + 1$ puncte) *şi $A(z)$ un infrapolinom local $(r + 1)$-restrîns pe K. Atunci oricare ar fi $r + 1$ rădăcini ale sale $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_r$, avem*

$$\varphi_{\alpha_0} + \varphi_{\alpha_1} + \ldots + \varphi_{\alpha_r} + \varphi_{z_0} + \ldots + \varphi_{z_r} \geqslant \pi, \tag{18}$$

unde $z_0, z_1, \ldots, z_r$ sînt punctele din condiţiile (17).

Într-adevăr, aplicînd teorema 2 acestui caz, avem

$$\sigma_{\alpha_1} + \ldots + \varphi_{\alpha_n} + \varphi_{\beta_1} + \ldots + \varphi_{\beta_{k_r}} \geqslant \pi, \tag{19}$$

unde $\beta_1, \ldots, \beta_{k_r}$ sînt rădăcinile polinomului $B(z)$ din (7).

Însă din condiţiile

$$\sum_{k=0}^{n} b_k\, z_i^{n-k} = 0,\quad i = 0, 1, \ldots, r, \tag{20}$$

se observă că $B(z) = (z - z_0) \ldots (z - z_r)$ verifică condiţiile (20). Astfel, înlocuind în (19) $\beta_1, \ldots, \beta_{k_r}$ cu $z_0, z_1, \ldots, z_r$ obţinem

$$\varphi_{\alpha_1} + \ldots + \varphi_{\alpha_n} + \varphi_{z_0} + \ldots + \varphi_{z_r} \geqslant \pi. \tag{20}$$

Să luăm acum un divizor oarecare $D(z)$ al lui $A(z)$ de gradul $r + 1$

$$A(z) = D(z) \cdot E(z) = (d_0 z^{r+1} + \ldots d_{r+1}) \cdot E(z).$$

Atunci din condiţiile (17) rezultă

$$d_0 z_i^{r+1}\ d_1 z_i^r + \ldots + d_r = \frac{w_i}{E(z_i)},\quad i = 0, 1, \ldots, r$$

($E(z_i) \neq 0$ prin ipoteză), ceea ce arată că şi $D(z)$ este un infrapolinom local $(r + 1)$-restrîns pe K. Aplicîndu-i relaţia (21) găsim teorema 6.

Consecinţă 3. *In aceleaşi condiţii ca şi în Teorema de mai sus* (pentru $r = 1$), *dacă $A(z)$ este un infrapolinom local* (1*-restrîns*) *pe K şi $A(z_0) = w_0 \neq 0$, atunci toate rădăcinile sale sînt situate în interiorul mulţimii $\mathcal{J}$, formată din punctele z pentru care $\varphi_z \geqslant \pi - \varphi_{z_0}$.*

În cazul cînd $z_0 = 0$, avem $\varphi_z \geqslant \pi - \varphi_0$, regăsind astfel un rezultat al autorului ([2], teorema 11) privind cazul infrapolinoamelor 1-condiţionate, cu termenul liber fixat.

Din teorema 6 se vede că de data aceasta poziţia rădăcinilor unui infrapolinom local $(r + 1)$-restrîns depinde de aşezarea punctelor z^i, $i = 0, 1, \ldots, r$ faţă de mulţimea de definiţie. Cu cît ele sînt mai departe de mulţimea K cu atît cele $n - r$ rădăcini sînt mai apropiate de mulţimea K.

Fie acum K o mulţime reală şi $[a, b]$ cel mai mic interval care o conţine, iar punctele $z_0, z_1, \ldots, z_r$ fiind situate pe axa reală în exteriorul lui $[a, b]$, atunci

$$\varphi_{z_i} = 0,\ i = 0, 1, \ldots, r$$

şi avem

$$\varphi_{\alpha_0} + \ldots + \varphi_{\alpha_r} \geqslant \pi,$$

adică cel puţin $n - r$ din rădăcinile lui $A(z)$ sînt situate în domeniul mărginit de arce de cerc, din care $[a, b]$ se vede sub un unghi egal cu $\dfrac{\pi}{r + 1}$.

În cazul unui infrapolinom local 1-restrîns, domeniul se reduce la segmentul $[a, b]$. Deci cel puţin $n - 1$ rădăcini ale unui infrapolinom real, a cărui curba reprezentativă trece printr-un punct dat, sînt cuprinse în intervalul $[a, b]$.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА УСЛОВНЫХ ИНФРАПОЛИНОМОВ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Пусть K компактное множество комплексной плоскости (z) и

$$A(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n \tag{1}$$

многочлен степени не более n, коэффициенты которого удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_{ik} a_k = 1, \quad i = 0, 1, \ldots, r, \tag{2}$$

где α_{ik} некоторые заданные комплексные числа, удовлетворяющие условию

$$\operatorname{rang} \| \alpha_{ik} \| = r + 1.$$

Полином

$$B(z) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_n \neq A(z)$$

называется $(r+1)$*-условным подполиномом* $A(z)$, *на множестве* K, если удовлетворяются следующие три условия:

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_{ik} b_k = 1, \quad i = 0, 1, \ldots, r,$$

$$B(z) = 0, \text{ если } A(z) = 0, \ z \in K$$

и

$$|B(z)| < |A(z)|, \quad z \in K \quad \text{и} \quad A(z) \neq 0.$$

Говорим, что $A(z)$ является $(r+1)$*-условным инфраполиномом на множестве* K если он не допускает ни одного $(r+1)$-условного подполинома на множестве K.

Настоящий труд является продолжением труда (2) и содержит некоторые свойства этих условных инфраполиномов, определённых в труде (2). Большинство результатов (теоремы 3—6) касаются свойства распределения корней этих инфраполиномов в случае различных частных матриц $\|\alpha_{ik}\|$. Между прочим, рассматриваетя матрица соответствующая случаю, когда эти определенные инфраполиномы подвергаются тому условию, чтобы в определённых заданных точках в плоскости они принимали заданные комплексные значения и даётся (теорема 6) свойство корней этих инфраполиномов.

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES INFRAPOLYNOMES CONDITIONNÉS

RÉSUMÉ

Soient K un ensemble compact du plan complexe (z) et

$$A(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n \tag{1}$$

un polynome de degré n au plus, dont les coefficients vérifient les relations

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_{ik} a_k = 1, \quad i = 0, 1, \ldots, r, \tag{2}$$

où α_{ik} sont des nombres complexes donnés à conditions que rang $\|\alpha_{ik}\| = r+1$.

Un polynome

$$B(z) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_n \neq A(z)$$

est appelé *polynome adjoint* $(r+1)$*-conditionné de* $A(z)$ *sur l'esnsemble* K si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_{ik} b_k = 1, \quad i = 0, 1, \ldots, r,$$

$$B(z) = 0, \text{ si } A(z), \ z \in K$$

et

$$|B(z)| < |A(z)|, \ z \in K \text{ et } A(z) \neq 0.$$

Nous disons que A(z) est *un infrapolynome* $(r+1)$*-conditionné sur l'ensemble* K si celui-ci n'admet aucun polynome adjoint $(r+1)$-conditionné sur l'ensemble K.

Le présent travail fait suite au travail [2] et contient quelques propriétés de ces infrapolynomes conditionnés définis dans le travail [2]. La plupart des résultats (théorèmes 3—6) se réfèrent à la propriété de la distribution des matrices $\|\alpha_{ik}\|$ particulières. On considère entre autres la matrice correspondent au cas où les infrapolynomes différents sont soumis à la condition que, dans certains points fixés du plans, prennent certaines valeurs complexes données. On donne (théorème 6) une propriété des racines de ces infrapolynomes.

BIBLIOGRAFIE

1. Fekete M., Walsh J. L., *On restricted infrapolynomials.* J. Anal. Math., **5**, 47—76 (1957).
2. Marușciac I., *Sur certains infrapolynomes conditionés.* Mathematica (Cluj) (sub tipar).
3. Shisha O., Walsh J. L., *The zeros of infrapolynomials with some prescribed coefficients.* Journal D'Analyse mathématique Jérusalem, **IX**, 111—160 (1961).

Primit la 12. IX. 1962.