# ASUPRA UNOR SISTEME DE INEGALITĂŢI ŞI ECUAŢII LINIARE CU SOLUŢII NENEGATIVE. APLICAŢII LA PROGRAMAREA LINIARĂ

DE

LIVIU NEGRESCU

(Cluj)

În nota de faţă vom stabili condiţii asupra coeficienţilor unui sistem de inegalităţi liniare, pentru ca toate soluţiile lui, diferite de soluţia nulă, să fie nenegative.

Problema soluţiilor nenegative ale sistemelor de inegalităţi sau ecuaţii liniare, are o importanţă în teoria jocurilor şi a programării liniare.

Cu probleme legate de existenţa soluţiilor pozitive ale sistemelor de ecuaţii şi inegalităţi liniare s-au ocupat mai mulţi matematicieni printre care putem aminti pe E. Stiemke [8], L. L. Dines [2], C. F. Gummer [4], V. S. Mihelson [6], S. N. Cernikov [1].

În lucrarea [7] am dat, împreună cu Al. Németh şi T. Rus, o condiţie suficientă pentru ca un sistem de ecuaţii liniare să aibă o soluţie pozitivă.

L. L. Dines, în lucrarea [2], dă o condiţie necesară şi suficientă pentru ca un sistem de $n$ ecuaţii omogene în $m$ necunoscute să admită cel puţin o soluţie nenegativă.

1. Fie sistemul de inegalităţi liniare

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \geqq \mathbf{b},$$

unde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

DEFINIŢIA 1. *Spunem că* $\bar{\mathbf{x}}$ *este o soluţie a sistemului* $\mathbf{A}\mathbf{x} \geqq \mathbf{b}$ *dacă* $\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} \geqq \mathbf{b}$.

DEFINIȚIA 2. *O soluție a sistemului* $\mathbf{A}\mathbf{x} \geqq \mathbf{b}$ *o vom numi pozitivă (nenegativă), (nulă), (nepozitivă), (negativă), dacă*

$$\mathbf{x} > \mathbf{0},\ (\geqq \mathbf{0}),\ (= \mathbf{0}),\ (\leqq \mathbf{0}),\ (< \mathbf{0}).$$

În cele ce urmează introducem cîteva notații. Dacă suprimăm din matricea $\mathbf{A}$ linia și coloana a $j$-a, atunci notăm noua matrice cu $\mathbf{A}_j$.

Dacă din matricea $\mathbf{x}$, formată dintr-o singură coloană, suprimăm pe $x_j$, atunci noua matrice o vom nota cu $\mathbf{x}^j$.

Prin $\mathbf{a}_j$ notăm coloana a $j$-a a matricii $\mathbf{A}$ din care lipsește elementul $a_{jj}$.

2. În cele ce urmează ne vom ocupa de cazul sistemelor omogene în care $m = n$, deci cu sistemele de forma

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}. \tag{1}$$

Relativ la aceste sisteme demonstrăm teorema următoare:

TEOREMA 1. Dacă:

a) *sistemul* $\mathbf{A}\mathbf{x} > \mathbf{0}$, *are cel puțin o soluție* $\bar{\mathbf{x}}$ *nenegativă;*

b) $a_{ii} > 0$, $a_{ij} \leqq 0$, pentru $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$;

*atunci toate soluțiile sistemului* (1) *diferite de soluția nulă, sînt nenegative.*

*Demonstrație.* Demonstrăm prin inducție completă. Să considerăm $n = 2$. Sistemul (1) ia forma:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &\geqq 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &\geqq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Fie $\tilde{\mathbf{x}}$ o soluție a sistemului (2) și să presupunem că $\tilde{x}_1 < 0$. Din prima inegalitate rezultă atunci că $a_{12} < 0$ și $\tilde{x}_2 < 0$, adică $\tilde{\mathbf{x}} < \mathbf{0}$. La aceeași concluzie ajungeam dacă presupuneam că $\tilde{\mathbf{x}}$ este o soluție a sistemului (2) în care $\tilde{x}_2 < 0$.

Să arătăm acum că sistemul (2) în ipotezele teoremei 1 nu poate avea soluții negative.

Din condiția a) și din faptul că $\tilde{\mathbf{x}}$ este o soluție a sistemului (2), rezultă că avem

$$\mathbf{A}(\bar{\mathbf{x}} + k\tilde{\mathbf{x}}) > \mathbf{0},\ \text{dacă}\ k > 0. \tag{3}$$

Presupunem că $\tilde{\mathbf{x}} < 0$. Atunci fie de exemplu $\bar{x}_1 > 0$ și luăm $k = -\dfrac{\bar{x}_1}{\tilde{x}_1}$.

Sistemul (3) devine

$$\begin{aligned} a_{12}(\bar{x}_2 + k\tilde{x}_2) &> 0 \\ a_{22}(\bar{x}_2 + k\tilde{x}_2) &> 0, \end{aligned}$$

ceea ce constituie o contradicție.



Sistemul (2) nu admite deci soluții negative. Am demonstrat astfel că sistemul (2) nu admite soluții în care o necunoscută ar avea valoare negativă. Deci toate soluțiile sistemului (2) diferite de soluția nulă sînt nenegative.

Presupunem acum teorema adevărată pentru matrici de ordinul $n - 1$.

Fie $\tilde{\mathbf{x}}$ o soluție a sistemului (1) și presupunem că pentru un indice $i$, $\tilde{x}_i < 0$.

Vom arăta întîi că dacă există o soluție în care o necunoscută oarecare are o valoare negativă atunci și celelalte necunoscute au valori negative, adică soluția respectivă este negativă. Pe urmă vom arăta, ca și în cazul $n = 2$, că sistemul (1) nu admite soluții negative în ipotezele teoremei 1.

Din aceste două concluzii rezultă, evident, că soluțiile sistemului (1), diferite de soluția nulă, sînt nenegative.

Presupunem prin absurd că există un $j \neq i$, $1 \leqq j \leqq n$, așa ca $\tilde{x}_j \geqq 0$. Să considerăm sistemul

$$\mathbf{A}_j\mathbf{x}^j \geqq -\mathbf{a}_j\tilde{x}_j. \tag{4}$$

Evident că matricea sistemului

$$\mathbf{A}_j\mathbf{x}^j \geqq \mathbf{0} \tag{5}$$

satisface condițiile teoremei 1. Într-adevăr dacă $\bar{x}$ este o soluție nenegativă a sistemului $\mathbf{A}\mathbf{x} > \mathbf{0}$, atunci cu atît mai mult avem și $\mathbf{A}_j\bar{\mathbf{x}}^j > 0$.

În baza ipotezei toate soluțiile sistemului (5) sînt nenegative. Aceasta însă este în contradicție cu faptul că $\tilde{\mathbf{x}}^j$ este soluție a sistemului (4), deci și a sistemului (5).

Rămîne să arătăm că sistemul (1) nu poate avea soluții negative. Fie $\tilde{\mathbf{x}} < \mathbf{0}$ o soluție a sistemului (1).

Atunci avem

$$\mathbf{A}(\bar{\mathbf{x}} + k\tilde{\mathbf{x}}) > \mathbf{0},\ \text{unde}\ k > 0. \tag{6}$$

Fie $\bar{x}_r > 0$. Luînd $k = -\dfrac{\bar{x}_r}{\tilde{x}_r}$, în sistemul (6) va dispare coloana a $r$-a. Eliminînd din sistemul (6) inegalitatea a $r$-a, obținem sistemul

$$\mathbf{A}_r(\bar{\mathbf{x}}^r + k\tilde{\mathbf{x}}^r) > \mathbf{0}. \tag{7}$$

Soluțiile sistemului $\mathbf{A}_r\mathbf{x}^r \geqq \mathbf{0}$ sînt nenegative sau nule căci $\mathbf{A}_r$ este o matrice de ordinul $n - 1$, care satisface condițiile teoremei 1. Deci $\bar{\mathbf{x}}^r + k\tilde{\mathbf{x}}^r \geqq \mathbf{0}$. Intrucît $\bar{\mathbf{x}}^r + k\tilde{\mathbf{x}}^r = \mathbf{0}$ nu poate verifica sistemul (7), rezultă că $\bar{\mathbf{x}}^r + k\tilde{\mathbf{x}}^r \geqq \mathbf{0}$, dar atunci inegalitatea a $r$-a a sistemului (6) nu poate fi satisfăcută de această soluție căci $\bar{x}_r + k\tilde{x}_r = 0$, iar $a_{rj} \leqq 0$ pentru $r \neq j$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Astfel teorema este complet demonstrată.

CONSECINȚA 1. *Rangul matricii* $\mathbf{A}$, *care satisface condițiile* a) *și* b) *ale teoremei* 1 *este egal cu* $n$.

Dacă rangul matricii $\mathbf{A}$ ar fi $r < n$, atunci sistemul $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ ar admite o soluţie $\bar{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0}$. Dar atunci el admite ca soluţie şi pe $-\bar{\mathbf{x}}$, ceea ce contrazice teorema 1.

CONSECINŢA 2. *Dacă matricea* $\mathbf{A}$ *satisface condiţiile* a) *şi* b) *din teorema* 1, *atunci sistemul* $\mathbf{Ax} = \mathbf{p}$ *admite o soluţie unică nenegativă oricare ar fi* $\mathbf{p} \geq \mathbf{0}$.

Existenţa şi unicitatea soluţiei rezultă din faptul că matricea $\mathbf{A}$ este nesingulară. Soluţia este nenegativă, căci ea satisface totodată şi sistemul (1), întrucît $\mathbf{p} \geq \mathbf{0}$.

CONSECINŢA 3. *Dacă matricea* $\mathbf{A}$ *este astfel încît*

a') *există un* $\bar{\mathbf{x}} > \mathbf{0}$ *aşa ca* $\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} > \mathbf{0}$;

b') $a_{ii} > 0$, $a_{ij} < 0$, $i \neq j (i, j = 1, 2, \ldots, n)$;

*atunci toate soluţiile sistemului* (1) *diferite de soluţia nulă, sînt pozitive.*

Într-adevăr dacă $\bar{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0}$ este o soluţie nenegativă şi $\bar{x}_i = 0$, atunci inegalitatea a $i$-a nu poate fi satisfăcută de soluţia $\bar{\mathbf{x}}$. Evident, în aceste condiţii sistemul $\mathbf{Ax} = \mathbf{p}$ va avea o soluţie unică pozitivă, oricare ar fi $\mathbf{p} \geq \mathbf{0}$.

CONSECINŢA 4. *Dacă matricea* $\mathbf{A}$ *satisface condiţiile* a) *şi* b) *din teorema* 1, *atunci sistemul*

$$\mathbf{A'y} = \mathbf{l}, \qquad \mathbf{l} = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} \tag{8}$$

*are o soluţie unică nenegativă oricare ar fi* $\mathbf{l} \geq \mathbf{0}$.

Unicitatea soluţiei sistemului (8) rezultă din faptul că rangul matricei $\mathbf{A}$ este egal chiar cu $n$.

Faptul că această soluţie este nenegativă rezultă din lema lui F a r k a s-M i n k o w s k i [3] care se poate formula astfel:

*Egalitatea* $\mathbf{A'y} = \mathbf{l}$ *are loc pentru* $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$, *atunci şi numai atunci cînd* $\mathbf{l'x} \geqq \mathbf{0}$ *oricare ar fi* $\mathbf{x}$ *astfel ca* $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{0}$.

CONSECINŢA 5. *Dacă matricea* $\mathbf{A}$ *satisface condiţiile* a') *şi* b') *atunci sistemul* (8) *are o soluţie unică pozitivă.*

Într-adevăr, dacă un anumit $y_i = 0$, atunci ecuaţia a $i$-a nu mai poate fi satisfăcută chiar dacă $l_i = 0$, întrucît sistemul (8) cu condiţia $\mathbf{l} \geq \mathbf{0}$ admite o soluţie diferită de soluţia nulă.

CONSECINŢA 6. *Dacă matricea* $\mathbf{A}$ *satisface condiţiile* a) *şi* b) *din teorema* 1 *şi* $\mathbf{l} > \mathbf{0}$, *atunci sistemul* (8) *admite o soluţie unică pozitivă.*

Faptul că soluţia sistemului (8) este pozitivă rezultă de acolo că dacă o anumită necunoscută ar fi nulă, de exemplu $y_i = 0$, atunci ecuaţia a $i$-a nu poate fi satisfăcută întrucît restul necunoscutelor sînt nenegative.



Dacă în teorema 1 luăm $\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, atunci condiţia a) devine:

$$a'') \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij} > 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

O matrice care satisface condiţiile a'') şi b) este de tip M i n k o w s k i-L e o n t i e f [5]. Putem deci enunţa:

*Dacă* $\mathbf{A}$ *este o matrice de tip Minkovski-Leontief atunci sistemul* (8) *admite o soluţie nenegativă.*

În particular, dacă $\mathbf{l} > \mathbf{0}$, atunci sistemul (8) relativ la o matrice de tip Minkowski-Leontief admite o soluţie pozitivă. Acest rezultat poate fi găsit şi pe altă cale, utilizînd elemente de teoria jocurilor [8].

CONSECINŢA 7. *Dacă matricea* $\mathbf{A}$ *satisface condiţiile* a) *şi* b) *ale teoremei* 1, *atunci sistemul*

$$\mathbf{A'y} \geqq \mathbf{0} \tag{1'}$$

*are toate soluţiile diferite de soluţia nulă, nenegative.*

Într-adevăr, dacă $\mathbf{l} > \mathbf{0}$, atunci sistemul (8) are o soluţie pozitivă, deci $\mathbf{A}'$ satisface condiţiile a) şi b) ale teoremei 1.

TEOREMA 2. *Dacă*:

c) *sistemul* $\mathbf{Ax} > \mathbf{0}$ *admite cel puţin o soluţie pozitivă*;

d) *fiecare din sistemele*

$$\mathbf{A}_i\mathbf{x}^i < \mathbf{0}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

*posedă cel puţin o soluţie nenegativă*;

e) $a_{ii} < 0$, $a_{ij} \geqq 0$, $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$;

*atunci soluţiile sistemului* (1) *diferite de soluţia nulă, sînt pozitive.*

Arătăm întîi că toate soluţiile sistemelor

$$\mathbf{A}_i\mathbf{x}^i \leqq \mathbf{0} \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

diferite de soluţia nulă, sînt nenegative.

Într-adevăr dacă notăm $\mathbf{B}_i = -\mathbf{A}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, atunci se observă că $\mathbf{B}_i$ este o matrice ce satisface condiţiile a) şi b) ale teoremei 1, deci toate soluţiile diferite de soluţia nulă ale sistemelor

$$\mathbf{B}_i\mathbf{x}^i \geqq \mathbf{0} \qquad i = 1, 2, \ldots, n; \tag{10}$$

sînt nenegative. Înmulţind cu $-1$, găsim că toate soluţiile diferite de soluţia nulă ale sistemelor (9) sînt nenegative.

Presupunem că sistemul (1) admite o soluție $\tilde{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0}$ în care un anumit $\tilde{x}_i \leq 0$, $1 \leq i \leq n$. Atunci sistemul

$$\mathbf{A}_i \mathbf{x}^i \geq -\mathbf{a}_i \tilde{x}_i \tag{11}$$

are ca soluție pe $\tilde{\mathbf{x}}^i$, iar sistemul

$$\mathbf{A}_i(-\mathbf{x}^i) \leq \mathbf{a}_i x_i \tag{12}$$

are ca soluție pe $-\tilde{\mathbf{x}}^i$. Cum $\mathbf{a}_i \tilde{x}_i \leq \mathbf{0}$, iar soluțiile sistemului (9) sînt nenegative sau nule, rezultă că $-\tilde{\mathbf{x}}^i \geq \mathbf{0}$ sau $\tilde{\mathbf{x}}^i \leq \mathbf{0}$, deci $\tilde{\mathbf{x}} \leq \mathbf{0}$. Să arătăm că acest lucru nu este posibil.

Avem $\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} > \mathbf{0}$ și $\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0}$, unde $\bar{\mathbf{x}} > \mathbf{0}$ iar $\tilde{\mathbf{x}} \leq \mathbf{0}$.

Atunci

$$\mathbf{A}(\bar{\mathbf{x}} + k\tilde{\mathbf{x}}) > \mathbf{0} \text{ dacă } k > 0. \tag{13}$$

Fie $\tilde{x}_r < 0$. Atunci luăm $k = -\frac{\bar{x}_r}{\tilde{x}_r}$ deci $\bar{x}_r + k\tilde{x}_r = 0$.

Din (13) avem

$$\mathbf{A}_r(\bar{\mathbf{x}}^r + k\tilde{\mathbf{x}}^r) > \mathbf{0},$$

sau

$$\mathbf{A}_r(-\bar{\mathbf{x}}^r - k\tilde{\mathbf{x}}^r) < \mathbf{0},$$

adică $-\bar{\mathbf{x}}^r - k\tilde{\mathbf{x}}^r \geq \mathbf{0}$ sau $\bar{\mathbf{x}}^r + k\tilde{\mathbf{x}}^r \leq \mathbf{0}$, dar atunci inegalitatea a $r$-a nu poate fi satisfăcută.

Rezultă că dacă $\tilde{\mathbf{x}}$ este o soluție a sistemului (1) diferită de soluția nulă, atunci nici o necunoscută $\tilde{x}_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ nu poate fi nulă sau negativă, adică $\tilde{\mathbf{x}} > \mathbf{0}$.

Teorema 2, ca și teorema 1, are cîteva consecințe. În primul rînd se vede imediat că și în condițiile teoremei 2, rangul matricei $\mathbf{A}$ este egal cu $n$. Consecința a 2-a rămîne evident valabilă dacă înlocuim condițiile a) și b) ale teoremei 1 cu condițiile c), d) și e) ale teoremei 2. În acest caz soluția sistemului $\mathbf{Ax} = \mathbf{p}$ este chiar pozitivă.

Consecința a 4-a de asemenea rămîne valabilă și în condițiile c), d) și e).

Consecința a 6-a rămîne valabilă înlocuind condițiile a) și b) cu condițiile c), d) și e).

Într-adevăr, dacă sistemul (8) ar avea o soluție nenegativă $\bar{\mathbf{y}}_i$ și $\bar{y}_i = 0, 1 \leq i \leq n$, atunci sistemul

$$\mathbf{A}_i' \mathbf{y}^i = \mathbf{l}^i \tag{14}$$

admite soluția nenegativă $\bar{\mathbf{y}}^i \geq \mathbf{0}$. Din (14) însă avem

$$-\mathbf{A}_i'(-\mathbf{y}^i) = \mathbf{l}^i$$

Dar $-\mathbf{A}_i$ satisface condițiile a) și b) ale teoremei 1 și cum $\mathbf{l}^i > \mathbf{0}$, rezultă din consecința 5 că $-\bar{\mathbf{y}}^i > \mathbf{0}$, deci $\bar{\mathbf{y}}^i < \mathbf{0}$, ceea ce este o contradicție.



De asemenea rămîne valabilă și consecința 7.

Într-adevăr, dacă sistemul (1') ar avea o soluție $\bar{\mathbf{y}} \neq \mathbf{0}$, care nu este nenegativă, atunci ar însemna că sistemul

$$\mathbf{A}'\mathbf{y} = \mathbf{A}'\bar{\mathbf{y}}$$

are o soluție unică care nu este nenegativă, ceea ce contrazice consecința 4.

3. În continuare vom considera sisteme neomogene de forma

$$\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}. \tag{15}$$

DEFINIȚIA 3. *Spunem că matricea* $\mathbf{A}$ *este de tipul* I (II) *dacă ea satisface condițiile teoremei* 1(2).

TEOREMA 3. *Dacă matricea* $\mathbf{A}$ *a sistemului* (15) *este de tipul* I *sau* II, *atunci orice soluție* $\tilde{\mathbf{x}}$ *a sistemului* (15) *satisface inegalitatea* $\tilde{\mathbf{x}} \geq \bar{\mathbf{x}}$, *unde* $\bar{\mathbf{x}}$ *este soluția sistemului* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

*Demonstrație.* Fie $\tilde{\mathbf{x}}$ o soluție a sistemului (15). Punem $\tilde{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}}$. Atunci

$$\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{y}} + \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{y}} + \mathbf{b} \geq \mathbf{b},$$

sau

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{y}} \geq \mathbf{0}, \tag{16}$$

dar atunci $\tilde{\mathbf{x}} \geq \bar{\mathbf{x}}$.

În particular, dacă $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, atunci din consecința 2 urmează imediat că $\bar{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0}$, deci toate soluțiile sistemului (15) sînt nenegative.

4. Să indicăm acum cîteva aplicații ale rezultatelor de mai sus la programarea liniară. Considerăm următoarea problemă de programare liniară:

Să se minimizeze forma

$$f = (\mathbf{c}, \mathbf{x}), \quad \mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n), \tag{17}$$

pe mulțimea soluțiilor nenegative a sistemului

$$\mathbf{Ux} \geq \mathbf{b}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & \ldots & u_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{m1} & \ldots & u_{mn} \end{pmatrix}, \tag{18}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

TEOREMA 4. *Dacă* $\mathbf{U}$ *este o matrice de tipul* I *sau* II, *iar* $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{c} \geq \mathbf{0}$, *atunci forma* (17) *își atinge minimul pe mulțimea soluțiilor sistemului* (18) *pentru* $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$, $\bar{\mathbf{x}}$ *fiind soluția sistemului* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Teorema este o consecință imediată a teoremei 3, observînd că $(\mathbf{c}, \mathbf{x},) \geq \geq (\mathbf{c}, \overline{\mathbf{x}})$, dacă $\mathbf{x} \geqq \overline{\mathbf{x}}$.

Presupunem că $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}$, unde $\mathbf{A}$ este o matrice de tipul I sau II.

Sistemul (18) îl punem atunci sub forma

$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{x} \geqq \mathbf{b}' \\ \mathbf{B}\mathbf{x} \geqq \mathbf{b}''. \end{cases} \tag{18'}$$

Evident, dacă $\overline{\mathbf{x}}$ este o soluție a sistemului $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}'$, iar $\mathbf{B}\overline{\mathbf{x}} \geqq \mathbf{b}''$, atunci $\overline{\mathbf{x}}$ este chiar soluția problemei de minimizare în cazul cînd $\mathbf{c} \geq \mathbf{0}$ și $\mathbf{b} \geqq \mathbf{0}$.

Problemele de programare liniară se pot rezolva cu ajutorul metodei simplex. Această metodă este incomodă uneori din cauza numărului mare al inegalităților. Indicăm un caz particular în care numărul inegalităților se poate reduce. Să presupunem că

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ & \mathbf{B} \end{pmatrix}$$

unde $\mathbf{A}$ este o matrice de tipul I sau II, $\mathbf{C}$ are toate elementele nepozitive, iar $\mathbf{b}' \geq \mathbf{0}$.

Sistemul (18) îl punem sub forma :

$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{x}' + \mathbf{C}\mathbf{x}'' \geqq \mathbf{b}' \\ \qquad\qquad \mathbf{B}\mathbf{x} \geqq \mathbf{b}'', \end{cases} \tag{19}$$

unde $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}' \\ \mathbf{b}'' \end{pmatrix}$, iar $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ \mathbf{x}'' \end{pmatrix}$.

Sistemul

$\mathbf{A}\mathbf{x}' + \mathbf{C}\mathbf{x}'' \geqq \mathbf{b}'$ îl transformăm în sistemul de egalități

$$a_{i1} x_1' + a_{i2} x_2' + \ldots + a_{ir} x_r' + c_{i1} x_1'' + c_{i2} x_2'' + \ldots + c_{is} x_s'' - y_i = b_i$$
$$i = 1, 2, \ldots, r, \tag{20}$$

la care adăugăm condițiile $y_i \geqq 0, \ i = 1, 2, \ldots, r$.

Evident, orice soluție a sistemului (20) în care

$$x_j'' \geqq 0, \ j = 1, 2, \ldots, s \ \text{ și } \ y_i \geqq 0, \ i = 1, 2, \ldots, r,$$

este nenegativă. Exprimăm necunoscutele $x_1', x_2', \ldots, x_r'$ în funcție de restul necunoscutelor din sistemul (20) și le înlocuim în sistemul $\mathbf{B}\mathbf{x} \geqq \mathbf{b}''$. Făcînd acest lucru și în forma liniară (17), problema revine la a minimiza forma

$$f' = (\mathbf{m}, \mathbf{z}) \tag{22}$$

pe mulțimea soluțiilor nenegative a sistemului

$$\mathbf{V}\mathbf{z} \geqq \mathbf{q}, \tag{23}$$

unde sistemul (23) are cu $r$ inegalități mai puțin decît sistemul (18), numărul necunoscutelor rămînînd același.



## О НЕКОТОРЫХ СИСТЕМАХ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ И УРАВНЕНИЙ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ РЕШЕНИЯМИ. ПРИМЕНЕНИЯ К ЛИНЕЙНОМУ ПРОГРАМИРОВАНИЮ

### КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ


В труде даются два достаточных условия, для того чтобы линейная и однородная система $n$ неравенств с $n$ неизвестных имела все решения неотрицательные.

Потом этот результат распространяется и на неоднородные системы при помощи теоремы 3, утверждающей следующее:

*Если матрица* $\mathbf{A}$ *удовлетворяет предположениям теоремы* 1 *или* 2, *то все решения* $\widetilde{\mathbf{x}}$ *системы*

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \geqq \mathbf{b}$$

удовлетворяют соотношению $\mathbf{x} \geqq \mathbf{x}$, где $\mathbf{x}$ является решением системы $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Если $\overline{\mathbf{x}} \geqq \mathbf{0}$, то, очевидно, все решения системы (1) неотрицательны.

В труде также показано, что при условиях теоремы 1 или 2, для того чтобы $\overline{\mathbf{x}} \geq 0$ достаточно, чтобы $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$

В последней части труда автор даёт применение к линейному программированию и показывает частную задачу линейного программированию в которой число ограничений можно уменьшить без изменения числа неизвестных.


## SUR QUELQUES SYTÈMES D'INÉGALITÉS ET D'ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX SOLUTIONS NON-NÉGATIVES. APPLICATIONS À LA PROGRAMMATION LINÉAIRE

### RÉSUMÉ


On donne deux conditions suffisantes pour qu'un système linéaire et homogène de $n$ inégalités à $n$ inconnues ait toutes les solutions non-négatives.

Ensuite on étend ce résultat aux système non-homogènes par le théorème 3, qui affirme que :

*Si la matrice* $\mathbf{A}$ *satisfait aux hypothèses des théorèmes* 1 *ou* 2, *alors toutes les solutions* $\widetilde{\mathbf{x}}$ *du système*

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \geqq \mathbf{b} \tag{1}$$

*satisfont á la relation* $\widetilde{\mathbf{x}} \geqq \overline{\mathbf{x}}$ *où* $\overline{\mathbf{x}}$ *est la solution du système* $\mathbf{A}\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$. Si $\overline{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0}$, *alors toutes les solutions du système* (1) *sont évideemmnt non-négatives.*

On motre en outre que dans les conditions du théorème 1 ou 2, pour que $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ il suffit que $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$.

Dans la dernière partie du travail on donne une application à la programmation linéaire et l'on montre un problème particulier de programmation linéaire, où le nombre des restrictions qui interviennent peut être réduit sans modifier le nombre des inconnues.

## BIBLIOGRAFIE


1. Черников С. Н., *Положительные и отрицательные решения системы линейных неравенств*. Матем. сборник, **38**, (**80**), *4*, 479—508 (1956).
2. Dines L. L., *Convex extensions and linear inequalities*. Bull. Amer. Math. Soc., **42**, 353—365 (1936).
3. Эрроу К. Дж., Гурвиц Л., Удзава Х., *Исследования по линейному и нелинейному програмированию*. Изд. Иностр. Литерат., Москва, 1962, стр. 16.
4. Gummer C. F., *Sets of linear equations in positive unknowns*. Amer. Math. Monthly **33**, 488 (1926).
5. Karlin S., *Mathematical methods and theory in games, programming and economics*. Pergamon Press, London-Paris, 1959, vol. I, p. 52.
6. Михельсон В. С., *О знаках решения системы линейных уравнений*. Успехи Матем. Наук, **IX**, *3* (*61*), 163—170 (1954).
7. Negrescu L., Németh Al., Rus T., *Despre soluțiile pozitive ale unui sistem de ecuații liniare*. Studii și cercet. de matem. (Cluj), **XIII**, 1, 123—127 (1962).
8. Siemke E., *Über positive Lösungen homogener linearer Gleichungen*. Math. Ann., **76**, 340—341 (1915).


Primit la 28. XI. 1962.