O PROBLEMĂ DE INTERPOLARE LACUNARĂ CU SOLUŢII ALE ECUAŢIILOR DIFERENŢIALE

DE

OLEG ARAMĂ

(Cluj)

Lucrare prezentată în şedinţa de comunicări din 16 aprilie 1963 a Institutului de calcul al Academiei R.P.R. — Filiala Cluj

Fie dată o ecuaţie diferenţială liniară şi omogenă de ordinul n

$$L_n[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0, \tag{1}$$

avînd coeficienţii continui într-un interval $[a, b)$ şi fie condiţiile bilocale:

$$y(x_1) = \alpha_0,\ \ y'(x_1) = \alpha_1, \ldots, y^{(n-2)}(x_1) = \alpha_{n-2},\ y^{(n-1)}(x_2) = \alpha_{n-1}, \tag{2}$$

unde x_1 şi x_2 sînt valori din intervalul $[a, b)$, iar $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$ sînt numere reale oarecari.

În prima parte a prezentei lucrări arătăm că în ipoteza continuităţii în intervalul $[a, b)$ a coeficienţilor ecuaţiei (1), există un subinterval de forma $[a, a + h_0)$ $(0 < h_0 \leq b - a)$, astfel încît oricare ar fi nodurile x_1 şi x_2 din $[a, a + h_0]$ şi oricare ar fi numerele reale $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$, ecuaţia (1) admite o soluţie şi una singură, care să verifice condiţiile (2) corespunzătoare alegerii făcute. Numărul h_0 se obţine ca rădăcina pozitivă a unei anumite ecuaţii asemănătoare cu aceea stabilită de către Ch. J. de la Vallée Poussin [12] (a se consulta de asemenea lucrarea [11]), cu ocazia studierii problemei interpolării în sensul lui Lagrange, pe cîte n noduri distincte, cu soluţiile ecuaţiilor diferenţiale liniare de ordinul n.

În partea a doua a prezentei lucrări se dă o evaluare *precisă* a lungimii intervalului *maximal* de forma $[a, a + h)$ în care problema (1), (2) are soluţii, în funcţie de marginile superioare ale valorilor absolute ale coeficienţilor ecuaţiei (1). De asemenea, se aduc unele îmbunătăţiri ecuaţiei obţinute în h, care dă lungimea intervalului de interpolare, indicîndu-se un procedeu de calcul care permite obţinerea „celor mai buni" coeficienţi numerici care pot fi luaţi în ecuaţia respectivă. Rezultatele obţinute în această direcţie se aplică apoi la studiul existenţei şi unicităţii soluţiilor unei probleme de interpolare analoage, relativă la ecuaţii diferenţiale neliniare de ordinul n. În ultima parte a lucrării se studiază problema mai generală, cînd în locul condiţiilor de interpolare (2) se consideră condiţiile (2 ν) de la § 7, în care ν reprezintă un număr întreg satisfăcînd inegalităţile $0 \leq \nu \leq n-2$.

În legătură cu problema de interpolare care formează obiectul prezentei lucrări, ţinem să cităm rezultatele obţinute de N. V. Azbelev [1] şi de N. A. Kaşceev [4], cu ocazia studierii limitei exacte de aplicabilitate a teoremei inegalităţilor diferenţiale a lui S. A. Ciaplîghin „de un ordin oarecare k", pentru ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul n $(0 \leq k \leq n-1)$, precum şi rezultatele obţinute de J. Reid în lucrarea [8], cu ocazia studiului unor probleme de neoscilaţie relative la ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul al doilea, autoadjuncte. Într-o lucrare apărută recent (1963), A. Lasota şi Z. Opial [5], utilizînd principiul de maximum al lui Pontriaghin, studiază evaluarea precisă a lungimii intervalului maximal de interpolare, în cazul cînd în locul condiţiilor (2) se consideră condiţiile:

$$y(x_1) = \alpha_0,\ y'(x_1) = \alpha_1, \ldots, y^{(n-2)}(x_1) = \alpha_{n-2},\ y(x_2) = \beta_0. \tag{3}$$

I

1. Vom da la început cîteva definiţii şi leme de care ne vom folosi în cele ce urmează.

DEFINIŢIA 1. *În ipoteza că operatorul diferenţial L_n din (1) are coeficienţii continui în intervalul $[a, b)$ respectiv $[a, b]$, vom spune că acest operator are proprietatea de interpolaţie $\mathcal{I}_n[a, b)$, respectiv $\mathcal{I}_n[a, b]$, dacă oricare ar fi nodurile x_1 şi x_2 $(x_1 < x_2)$ din intervalul $[a, b)$, respectiv $[a, b]$, şi oricare ar fi numerele reale $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$, ecuaţia diferenţială $L_n[y] = 0$ admite o integrală şi una singură $y(x)$, satisfăcînd condiţiile (2).*

DEFINIŢIA 2. *În aceleaşi ipoteze, vom spune că operatorul L_n din (1) are proprietatea de neoscilaţie $\mathcal{N}_n[a, b)$ respectiv $\mathcal{N}_n[a, b]$, dacă oricare ar fi nodurile x_1 şi x_2 $(x_1 < x_2)$ din intervalul $[a, b)$, respectiv $[a, b]$, ecuaţia diferenţială $L_n[y] = 0$ nu admite nici o integrală neidentică nulă $y(x)$, care să satisfacă condiţiile*

$$y(x_1) = y'(x_1) = \ldots = y^{(n-2)}(x_1) = 0;\quad y^{(n-1)}(x_2) = 0. \tag{4}$$

Are loc următoarea lemă, a cărei demonstraţie este imediată:

LEMA 1. *Condiţia necesară şi suficientă ca operatorul L_n cu coeficienţi continui în $[a, b)$, respectiv $[a, b]$, să aibă proprietatea $\mathcal{I}_n[a, b)$, respectiv $\mathcal{I}_n[a, b]$, este ca L_n să aibă proprietatea $\mathcal{N}_n[a, b)$, respectiv $\mathcal{N}_n[a, b]$.*

Lema 2 pe care o vom stabili în continuare, este analoagă unei leme utilizate de către Ch. J. de la Vallée Poussin în lucrarea [12].

LEMA 2. *Dacă în intervalul $[x_1, x_2]$ de lungime $x_2 - x_1 = h$, funcţia $\varphi(x) \not\equiv 0$ admite o derivată de ordinul n $(n \geq 2)$ continuă şi satisface condiţiile*

$$\varphi(x_1) = \varphi'(x_1) = \ldots = \varphi^{(n-2)}(x_1) = 0;\quad \varphi^{(n-1)}(x_2) = 0, \tag{5}$$

atunci au loc inegalităţile

$$\begin{aligned} |\varphi^{(i)}(x)| &< A_{n,i} \cdot h^{n-i} \cdot \mu, \quad x \in [x_1, x_2), \quad i = 0, 1, \ldots, n-2 \\ |\varphi^{(n-1)}(x)| &\leq A_{n,n-i} \cdot h \cdot \mu, \quad x \in [x_1, x_2], \end{aligned} \tag{6}$$

unde $\mu = \max\limits_{[x_1, x_2]} |\varphi^{(n)}(x)|$, *iar*

$$A_{n,i} = \frac{n-i-1}{(n-i)!} \quad (i = 0, 1, \ldots, n-2), \quad A_{n,n-1} = 1. \tag{7}$$

Demonstraţie. Fie $P_n(x)$ polinomul de interpolare de grad n, care satisface condiţiile

$$P_n(x_1) = P_n'(x_1) = \ldots = P_n^{(n-2)}(x_1) = 0;\quad P_n^{(n-1)}(x_2) = 0, \tag{8}$$

$$P_n^{(n)}(x) \equiv 1. \tag{9}$$

Se obţine cu uşurinţă pentru $P_n(x)$ expresia

$$P_n(x) = \frac{1}{n!}(x - x_1)^{n-1}\,[(x - x_1) - n(x_2 - x_1)]. \tag{10}$$

Fie i unul din numerele $0, 1, \ldots, n-2$. Considerăm funcţia

$$\Phi_i(x) = \varphi^{(i)}(x) - \lambda_i P_n^{(i)}(x) \quad (0 \leq i \leq n-2), \tag{11}$$

unde λ_i este o constantă în raport cu x. Fie s un punct arbitrar din intervalul $(x_1, x_2]$. Vom determina pe λ_i astfel încît $\Phi_i(s) = 0$. Această determinare este posibilă, întrucît oricare ar fi $s \in (x_1, x_2]$, are loc relaţia $P_n^{(i)}(s) \neq 0$. Într-adevăr, presupunînd contrariul, că $P_n^{(i)}(s) = 0$, ar rezulta de aici şi din condiţiile (8), prin aplicarea de $n - i$ ori succesiv a teoremei lui Rolle că $P_n^{(n)}(\xi) = 0$, unde $\xi \in (x_1, x_2)$, ceea ce ar contrazice identitatea (9). Se obţine deci

$$\lambda_i = \frac{\varphi^{(i)}(s)}{P_n^{(i)}(s)}.$$

Înlocuind în expresia lui $\Phi_i(x)$ din (11), se obţine:

$$\Phi_i(x) = \varphi^{(i)}(x) - \frac{\varphi^{(i)}(s)}{P_n^{(i)}(s)}\, P_n^{(i)}(x). \tag{12}$$

Funcţia $\Phi_i(x)$ satisface evident condiţiile

$$\Phi_i(x_1) = \Phi_i'(x_1) = \ldots = \Phi_i^{(n-i-2)}(x_1) = 0\,; \quad \Phi_i^{(n-i-1)}(x_2) = 0$$
$$\Phi_i(s) = 0 \quad (x_1 < s \leqq x_2).$$

Aplicînd de $n - i$ ori succesiv funcţiei $\Phi_i(x)$ teorema lui Rolle, se constată existenţa a cel puţin unui punct $\xi \in (x_1, x_2)$, astfel încît $\Phi_i^{(n-i)}(\xi) = 0$. Ţinînd seamă de (12) şi de identitatea (9), această relaţie se va scrie

$$\varphi^{(n)}(\xi) - \frac{\varphi^{(i)}(s)}{P_n^{(i)}(s)} = 0,$$

de unde se obţine formula

$$\varphi^{(i)}(s) = P_n^{(i)}(s) \cdot \varphi^{(n)}(\xi), \quad \xi \in (x_1, x_2).$$

Ţinînd seamă de faptul că s a fost luat arbitrar în $(x_1, x_2]$, obţinem formula de medie

$$\varphi^{(i)}(x) = P_n^{(i)}(x) \cdot \varphi^{(n)}(\xi), \quad x \in [x_1, x_2]. \tag{13}$$

Pentru a calcula valoarea maximă a funcţiei $|P_n^{(i)}(x)|$ în intervalul $[x_1, x_2]$, se observă întîi că $P_n^{(i+1)}(x)$ nu se anulează în nici un punct din intervalul (x_1, x_2), întrucît în caz contrar, prin aplicarea de $n - i - 1$ ori succesiv a teoremei lui Rolle, ar rezulta, ţinînd seamă de condiţiile (8), existenţa unui punct $\xi \in (x_1, x_2)$, astfel încît $P_n^{(n)}(\xi) = 0$. Această egalitate ar contrazice însă identitatea (9). Deci $P_n^{(i+1)}(x) \neq 0$ pentru $x \in (x_1, x_2)$, ceea ce ne arată că $P_n^{(i)}(x)$ este monotonă în intervalul $[x_1, x_2]$. Cum însă $P_n^{(i)}(x_1) = 0$, oricare ar fi $i = 0, 1, \ldots, n - 2$, rezultă că marginea superioară în intervalul $[x_1, x_2]$ a funcţiei $|P_n^{(i)}(x)|$ va fi atinsă pentru $x = x_2$ şi un calcul simplu ne arată că această margine va fi

$$\sup_{x \in [x_1, x_2]} |P_n^{(i)}(x)| = |P_n^{(i)}(x_2)| = \frac{n-i-1}{(n-i)!} \cdot h^{n-i}. \tag{14}$$

Din cele de mai sus rezultă inegalitatea strictă

$$|P_n^{(i)}(x)| < \frac{n-i-1}{(n-i)!} \cdot h^{n-i},$$

valabilă pentru orice $x \in [x_1, x_2)$. Ţinînd seamă de această inegalitate, precum şi de faptul că $\mu \neq 0$ (ceea ce rezultă din ipoteza $\varphi(x) \not\equiv 0$ în intervalul $[x_1, x_2]$, precum şi din (13)), se obţine din formula (13) inegalitatea (6) pentru orice $i = 0, 1, \ldots, n - 2$. Pentru $i = n - 1$ inegalitatea corespunzătoare din (6) se obţine cu uşurinţă, scriind formula creşterilor finite pentru $\varphi^{(n-1)}(x)$ în punctul $x = x_2$ şi apoi ţinînd seamă de egalitatea $\varphi^{(n-1)}(x_2) = 0$.

Observaţii. 1°. Valorile constantelor $A_{n,i}$ care figurează în (6) nu se pot micşora, după cum se constată uşor considerînd pentru $\varphi(x)$ polinomul $P_n(x)$ din (10) şi observînd că inegalitatea (6) se transformă în egalităţi pentru $x = x_2$, dacă $i = 0, 1, \ldots, n - 2$, şi pentru $x = x_1$ dacă $i = n - 1$.

2°. În cazul cînd se presupune că funcţia $\varphi(x)$ satisface condiţii mai generale decît (5), anume condiţiile

$$\varphi(x_1) = \varphi'(x_2) = \ldots = \varphi^{(n-1)}(x_n) = 0,$$

unde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt noduri oarecari dintr-un interval $[a, b]$, inegalităţi de tipul (6) au fost obţinute de S. N. Bernstein [2], iar apoi pentru cazul particular cînd $x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n$, astfel de inegalităţi au fost studiate de A. Iu. Levin [6]. După cum este de aşteptat, în aceste cazuri mai generale se obţin pentru constantele $A_{n,i}$ valori mai mari decît cele care intervin în enunţul lemei 2 din lucrarea de faţă.

2. Vom demonstra acum următoarea teoremă, care asigură existenţa unui interval de forma $[a, a + h)$, în care operatorul L_n din (1) are proprietatea $\mathcal{I}_n$ şi deci proprietatea $\mathcal{N}_n$.

TEOREMA 1. *Fie dat operatorul L_n din* (1), *avînd coeficienţii continui în intervalul $[a, b)$ şi fie*

$$m_i(h) = \max_{x \in [a, a+h]} |p_i(x)| \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{15}$$

h fiind un număr oarecare din intervalul $(0, b - a)$. Fie h_0 rădăcina din intervalul $(0, b - a)$ a ecuaţiei în necunoscuta h:

$$A_{n,0} \cdot m_n(h) \cdot h^n + A_{n,1} \cdot m_{n-1}(h) \cdot h^{n-1} + \ldots + A_{n,n-1} \cdot m_1(h) \cdot h - 1 = 0, \tag{16}$$

unde $A_{n,i}$ reprezintă constantele din (7). *În cazul cînd ecuaţia* (16) *nu are rădăcini în intervalul $(0, b - a)$, se va considera $h_0 = b - a$. Atunci operatorul L_n are proprietatea de interpolaţie $\mathcal{I}_n[a, a + h_0)$* (*deci şi proprietatea de neoscilaţie $\mathcal{N}_n[a, a + h_0)$*).

Demonstraţie. Să presupunem întîi că $h_0 < b - a$, deci că ecuaţia (16) admite o rădăcină h_0 în intervalul $(0, b - a)$. În baza lemei 1, va fi suficient să demonstrăm că în ipotezele adoptate, operatorul L_n are proprietatea $\mathcal{N}_n[a, a + h_0)$. Să presupunem contrariul, că ecuaţia diferenţială (1) ar admite o integrală neidentic nulă $y(x)$, care în două puncte $x_1 < x_2$ din intervalul $[a, a + h_0)$ satisface condiţiile

$$y(x_1) = y'(x_1) = \ldots = y^{(n-2)}(x_1) = 0\,; \quad y^{(n-1)}(x_2) = 0. \tag{17}$$

Vom nota

$$\mu = \max_{x \in [x_1, x_2]} |y^{(n)}(x)|.$$

Ţinînd seamă de egalităţile (17), precum şi de faptul că $y(x) \not\equiv 0$ în intervalul $[x_1, x_2]$, obţinem prin aplicarea lemei 2, inegalităţile

$$|y^{(i)}(x)| \leq A_{n,i} \cdot h^{n-i} \cdot \mu, \quad x \in [x_1, x_2], \quad i = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{18}$$

unde am notat $h = x_2 - x_1$ şi unde $A_{n,i}$ reprezintă constantele date de relaţiile (7).

Pe de altă parte, $y(x)$ fiind o soluţie a ecuaţiei diferenţiale (1), ea verifică în intervalul $[x_1, x_2]$ identitatea

$$y^{(n)}(x) \equiv -p_1(x)y^{(n-1)}(x) - p_2(x)y^{(n-2)}(x) - \ldots - p_n(x)y(x).$$

De aici, luînd valorile absolute ai ambilor membrii şi apoi marginile superioare în intervalul $[x_1, x_2]$ ale tuturor termenilor din membrul al doilea, se obţine următoarea inegalitate valabilă pentru orice $x \in [x_1, x_2]$:

$$|y^{(n)}(x)| \leq \sup_{[x_1, x_2]} |p_1(x)| \cdot \sup_{[x_1, x_2]} |y^{(n-1)}(x)| + \sup_{[x_1, x_2]} |p_2(x)| \cdot \sup_{[x_1, x_2]} |y^{(n-2)}(x)| + \ldots + \sup_{[x_1, x_2]} |p_n(x)| \cdot \sup_{[x_1, x_2]} |y(x)|. \tag{19}$$

Ţinînd seamă de inegalităţile (18), valabile pentru orice $x \in [x_1, x_2]$, din (19) se obţine următoarea inegalitate valabilă pentru orice $x \in [x_1, x_2]$:

$$|y^{(n)}(x)| \leq \mu \cdot A_{n,n-1}\, h \cdot \sup_{[x_1, x_2]} |p_1(x)| + \mu \cdot A_{n,n-2}\, h^2 \cdot \sup_{[x_1, x_2]} |p_2(x)| + \ldots + \mu \cdot A_{n,0}\, h^n \cdot \sup_{[x_1, x_2]} |p_n(x)|.$$

Înlocuind în această inegalitate pe x cu numărul ξ care realizează maximul funcţiei $|y^{(n)}(x)|$ în intervalul $[x_1, x_2]$, inegalitatea de mai sus se transcrie

$$\mu \leq \mu \cdot A_{n,n-1}\, h \cdot \sup_{[x_1, x_2]} |p_1(x)| + \mu \cdot A_{n,n-2} \cdot \sup_{[x_1, x_2]} |p_2(x)| + \ldots + \mu \cdot A_{n,0}\, h^n \cdot \sup_{[x_1, x_2]} |p_n(x)|. \tag{20}$$

Simplificînd ambii membri cu μ (din prima inegalitate care figurează în (18) se constată că $\mu \neq 0$, întrucît prin ipoteză $y(x) \not\equiv 0$ în $[x_1, x_2]$) şi ţinînd seama de definiţia numerelor $m_i(h)$, precum şi de faptul că în cazul inegalităţii (20) are loc prin ipoteză incluziunea $[x_1, x_2] \subset [a, a + h_0)$ şi deci că $h = x_2 - x_1 < h_0$, se obţine a fortiori inegalitatea strictă

$$1 < A_{n,n-1}\, h_0 \cdot m_1(h_0) + A_{n,n-2}\, h_0^2 \cdot m_2(h_0) + \ldots + A_{n,0}\, h_0^n \cdot m_n(h_0). \tag{21}$$

Notînd cu $E(h)$ funcţia de variabila h, reprezentînd primul membru al ecuaţiei (16), inegalitatea (21) ne arată că

$$E(h_0) > 0, \tag{22}$$

ceea ce contrazice faptul că h_0 reprezintă rădăcina din intervalul $(0, b - a)$ a ecuaţiei (16).

Dacă $h_0 = b - a$, demonstraţia teoremei se face de asemenea prin reducere la absurd. Se ajunge întocmai ca şi în cazul precedent la inegalitatea (20) din care se obţine în urma unei simplificări cu $\mu\,(\mu \neq 0)$, inegalitatea

$$1 \leq A_{n,n-1}\, h \cdot m_1(x_2 - a) + A_{n,n-2}\, h^2 \cdot m_2(x_2 - a) + \ldots + A_{n,n}\, h^n \cdot m_n(x_2 - a), \tag{23}$$

unde $h = x_2 - x_1$. A fortiori se obţine din (23) inegalitatea

$$1 \leq A_{n,n-1}(x_2 - a) \cdot m_1(x_2 - a) + A_{n,n-2}(x_2 - a)^2 \cdot m_2(x_2 - a) + \ldots + A_{n,0}(x_2 - a)^n \cdot m_n(x_2 - a),$$

ceea ce ne arată că $E(x_2 - a) \geq 0$. Dar $\lim_{h \to 0+} E(h) = -1 < 0$. De aici, ţinînd seamă de continuitatea funcţiei $E(h)$, rezultă că $E(h)$ se anulează pentru o valoare h_1 satisfăcînd inegalităţile $0 < h_1 \leq x_2 - a < b - a$. Această concluzie este însă în contradicţie cu ipoteza specifică cazului studiat, anume că ecuaţia $E(h) = 0$ nu are nici o rădăcină în intervalul $(0, b - a)$. Rezultă în definitiv afirmaţia teoremei şi în cazul $h_0 = b - a$.

II

3. În continuare ne propunem să dăm o evaluare *precisă* a lungimii intervalului *maximal* de forma $[a, a + h)$, în care un operator diferenţial liniar şi omogen L_n, de forma (1), are proprietatea $\mathcal{H}_n$, în funcţie de marginile superioare ale funcţiilor $|p_i(x)|$ $(i = 1, \ldots, n)$. De asemenea ne propunem să arătăm cum se poate îmbunătăţi ecuaţia în necunoscuta h, (16). Vom studia în ce măsură se pot micşora coeficienţii diferitelor puteri ale lui h, care figurează în (16), în scopul obţinerii unor intervale de interpolare cît mai bune. Vom indica totodată un procedeu de calcul prin care se vor putea obţine sistemele „optimale" de coeficienţi. Ţinem să menţionăm că în cazul interpolării obişnuit pe cîte două noduri, o problemă similară a fost studiată relativ la ecuaţiile diferenţiale liniare şi omogene de ordinul al doilea de către Z. O p i a l în lucrarea [7], şi apoi, pentru aceleaşi ecuaţii, de către D. R i p i a n u în lucrarea [9]. În cazul interpolării de tipul (3), o problemă similară a fost studiată relativ la ecuaţii diferenţiale de ordinul n de către A. L a s o t a şi Z. O p i a l în lucrarea [5].

În scopul studierii problemelor formulate mai sus, vom enunţa în prealabil cîteva proprietăţi ajutătoare, de care ne vom folosi în expunere.

Reamintim întîi că prin funcţia lui Cauchy asociată operatorului L_n din (1) se înţelege soluţia ecuaţiei diferenţiale $L_n[y] = 0$, care satisface condiţiile

$$y(\alpha) = y'(\alpha) = \ldots = y^{(n-2)}(\alpha) = 0, \quad y^{(n-1)}(\alpha) = 1, \tag{24}$$

unde α reprezintă o valoare oarecare din intervalul $[a, b)$. În cele ce urmează vom utiliza pentru această funcţie notaţia $K(x, \alpha)$. Cu această precizare are loc următoarea lemă:

LEMA 3. *Condiţia necesară şi suficientă ca un operator diferenţial liniar şi omogen, L_n, de ordinul n, cu coeficienţi continui într-un interval $[a, b)$, respectiv $[a, b]$, să aibă proprietatea de neoscilaţie $\mathcal{N}_n[a, b)$, respectiv $\mathcal{N}_n[a, b]$* (deci şi $\mathcal{I}_n[a, b)$, resp. $\mathcal{I}_n[a, b]$), *este ca funcţia $\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} K(x, \alpha)$ să fie pozitivă în domeniul triunghiular $a \leq \alpha < x < b$, respectiv $a \leq \alpha < x \leq b$.*

Demonstraţia acestei afirmaţii este imediată, dacă se observă că orice soluţie neidentic nulă $\varphi(x)$ a ecuaţiei diferenţiale (1), satisfăcînd într-un punct $x = \alpha$ $(\alpha \in [a, b))$ condiţiile

$$\varphi(\alpha) = \varphi'(\alpha) = \ldots = \varphi^{(n-2)}(\alpha) = 0,$$

se exprimă cu ajutorul funcţiei lui Cauchy astfel: $\varphi(x) = \varphi^{(n-1)}(\alpha) \times \times K(x, \alpha)$.

Vom demonstra acuma următoarea lemă, a cărei idee aparţine lui N. V. Azbelev şi este enunţată fără demonstraţie şi într-o formă puţin diferită, în lucrarea [4] a lui N. A. K a ş c e e v.

LEMA 4. *Fie date două ecuaţii diferenţiale liniare şi omogene de ordinul n:*

$$L_n^{(1)}[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0 \tag{25}$$

$$L_n^{(2)}[y] = y^{(n)} + q_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + q_n(x)y = 0, \tag{26}$$

ai căror coeficienţi sînt continui într-un interval $[c, d]$ şi satisfac în acel interval inegalităţile

$$p_i(x) \geqq q_i(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \quad x \in [c, d]. \tag{27}$$

În aceste condiţii, dacă operatorul $L_n^{(1)}$ are proprietatea $\mathcal{N}_n[c, d]$ (a se vedea definiţia 2), *atunci şi operatorul $L_n^{(2)}$ are proprietatea $\mathcal{N}_n[c, d]$.*

Demonstraţie. Să presupunem, contrar afirmaţiei lemei, că în ipotezele lemei, operatorul $L_n^{(2)}$ nu ar avea proprietatea $\mathcal{N}_n[c, d]$. Aceasta înseamnă, conform lemei 3, că funcţia $\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} K_2(x, \alpha)$ se anulează în cel puţin un punct din domeniul

$$D: \quad c \leq \alpha < x \leq d \tag{28}$$

al variabilelor x şi α, pe cînd funcţia $\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} K_1(x, \alpha)$ nu se anulează în acest domeniu. Aici am notat prin $K_1(x, \alpha)$, respectiv $K_2(x, \alpha)$, funcţia lui Cauchy asociată operatorului $L_n^{(1)}$, respectiv $L_n^{(2)}$. Fie $x = x_0$ şi $\alpha = \alpha_0$ coordonatele unui punct din domeniul D, în care se anulează funcţia $\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} K_2(x, \alpha)$. În cele ce urmează, pentru simplicitatea scrierii vom utiliza notaţia $K_1(x, \alpha_0) = y_1(x)$ şi $K_2(x, \alpha_0) = y_2(x)$. Au loc deci egalităţile

$$y_1(\alpha_0) = y_1'(\alpha_0) = \ldots = y_1^{(n-2)}(\alpha_0) = 0, \quad y_1^{(n-1)}(\alpha_0) = 1 \tag{29}$$

$$y_2(\alpha_0) = y_2'(\alpha_0) = \ldots = y_2^{(n-2)}(\alpha_0) = 0, \quad y_2^{(n-1)}(\alpha_0) = 1 \tag{30}$$

$$y_2^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad (c \leq \alpha_0 < x_0 \leq d). \tag{31}$$

Fără a restrînge generalitatea raţionamentului, putem presupune că x_0 este cea mai mică rădăcină din intervalul $[\alpha_0, d]$ a funcţiei $y_2^{(n-1)}(x)$. Vor avea deci loc inegalităţile

$$y_1^{(n-1)}(x) > 0 \quad \text{pentru} \quad x \in [\alpha_0, d], \tag{32}$$

$$y_2^{(n-1)}(x) > 0 \quad \text{pentru} \quad x \in [\alpha_0, x_0). \tag{33}$$

Vom arăta acum că au loc de asemenea inegalităţile

$$y_2(x) > 0, \; y_2'(x) > 0, \ldots, y_2^{(n-2)}(x) > 0 \text{ pentru } x \in (\alpha_0, x_0]. \tag{34}$$

Într-adevăr, să presupunem contrarul, că pentru un indice i $(0 \leq i \leq \leq n - 2)$ şi pentru o valoare $\xi \in (\alpha_0, x_0]$ ar avea loc egalitatea $y_2^{(i)}(\xi) = 0$. De aici, ţinînd seamă de egalităţile (30), ar rezulta prin aplicarea de $n - i - 1$ ori succesiv a teoremei lui Rolle, că funcţia $y_2^{(n-1)}(x)$ se anulează cel puţin o dată în intervalul (α_0, ξ), deci şi în intervalul (α_0, x_0). Această situaţie ar contrazice însă ipoteza că x_0 este cea mai mică rădăcină din intervalul $(\alpha_0, d]$ a funcţiei $y_2^{(n-1)}(x)$. Deoarece numărul i a fost presupus oarecare din numerele $0, 1, \ldots, n - 2$, rezultă în definitiv inegalităţile (34).

Cu aceste precizări, vom demonstra în continuare că pentru orice $x \in [\alpha_0, x_0]$, are loc inegalitatea

$$y_2^{(n-1)}(x) \geqq y_1^{(n-1)}(x), \quad x \in [\alpha_0, x_0]. \tag{35}$$

Într-adevăr, notînd cu $\varphi(x) = y_2(x) - y_1(x)$ şi ţinînd seamă de faptul că $y_1(x)$ este o soluţie a ecuaţiei diferenţiale (25), vom putea scrie identitatea

$$L_n^{(1)}[\varphi(x)] = L_n^{(1)}[y_2(x)], \quad x \in [c, d]. \tag{36}$$

Apoi, întrucît au loc în intervalul $[\alpha_0, x_0]$ inegalităţile (33), (34) şi (27), rezultă inegalitatea

$$L_n^{(1)}[y_2(x)] \geqq L_n^{(2)}[y_2(x)], \quad x \in [\alpha_0, x_0]. \tag{37}$$

Prin compunerea relaţiilor (36) şi (37) şi ţinînd seamă de faptul că $y_2(x)$ este o soluţie a ecuaţiei diferenţiale (26), se obţine inegalitatea

$$L_n^{(1)}[\varphi(x)] \geq 0, \quad x \in [\alpha_0, x_0]. \tag{38}$$

Din faptul că soluţiile $y_1(x)$ şi $y_2(x)$ verifică în punctul $x = \alpha_0$ aceleaşi condiţii ale lui Cauchy, (29) respectiv (30), rezultă pentru funcţia $\varphi(x)$ condiţiile :

$$\varphi(\alpha_0) = \varphi'(\alpha_0) = \ldots = \varphi^{(n-2)}(\alpha_0) = \varphi^{(n-1)}(\alpha_0) = 0.$$

Ne vom folosi acum de următoarea identitate cunoscută :

$$\varphi(x) \equiv \int_{\alpha_0}^{x} K_1(x, \alpha) L_n^{(1)}[\varphi(\alpha)] d\alpha, \quad x \in [\alpha_0, d]. \tag{39}$$

Derivînd ambii membri de $n-1$ ori în raport cu x şi ţinînd seamă de relaţiile (24) pe care le satisface funcţia lui Cauchy $K_1(x, \alpha)$, obţinem din (39) identitatea

$$\varphi^{(n-1)}(x) \equiv \int_{\alpha_0}^{x} \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} K_1(x, \alpha) \cdot L_n^{(1)}[\varphi(\alpha)] d\alpha, \quad x \in [\alpha_0, d]. \tag{40}$$

Dar s-a presupus (prin ipoteză) la începutul demonstraţiei că funcţia $\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} K_1(x, \alpha)$ nu se anulează în triunghiul $D: c \leq \alpha < x \leq d$ al variabilelor x şi α. Evident că în acest caz are loc inegalitatea

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} K_1(x, \alpha) > 0, \quad (x, \alpha) \in D.$$

De aici şi din (38) rezultă, în baza identităţii (40), că $\varphi^{(n-1)}(x) \geq 0$ pentru orice $x \in [\alpha_0, x_0]$, de unde rezultă inegalitatea (35). Din această inegalitate şi din (31) rezultă că $y_1^{(n-1)}(x_0) \leq 0$ $(\alpha_0 < x_0 \leq d)$, ceea ce este în contradicţie cu inegalitatea (32). Această contradicţie provine din ipoteza falsă adoptată la începutul demonstraţiei, anume că operatorul $L_n^{(2)}$ nu ar avea proprietatea $\mathcal{H}_n[c, d]$. Rezultă în definitiv afirmaţia lemei 4.

*

În continuare, fie L_n un operator diferenţial de forma (1), avînd coeficienţii $p_i(x)$ continui şi mărginiţi în intervalul $[a, b)$. Fie M_i nişte constante astfel încît

$$|p_i(x)| \leq M_i, \quad x \in [a, b), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{41}$$

Lema stabilită anterior ne dă posibilitatea obţinerii unei evaluări *precise*, în funcţie de numerele M_i, a lungimii subintervalului maximal de forma

$[a, a + h)$, conţinut în $[a, b)$, în care operatorul L_n are proprietatea de neoscilaţie $\mathcal{H}_n$ (deci şi proprietatea de interpolare $\mathcal{I}_n$). În acest sens, se poate stabili următoarea teoremă :

TEOREMA 2. *Considerăm alături de operatorul L_n care satisface condiţiile formulate mai sus, următorul operator diferenţial*

$$L_n^*[y] = y^{(n)} + M_1 y^{(n-1)} + \ldots + M_n y, \tag{42}$$

ai cărui coeficienţi M_i sînt constante care verifică inegalităţile (41). *Fie $\eta^*(x)$ soluţia ecuaţiei diferenţiale $L_n^*[y] = 0$, satisfăcînd condiţiile*

$$\eta^*(0) = \eta^{*\prime}(0) = \ldots = \eta^{*(n-2)}(0) = 0, \quad \eta^{*(n-1)}(0) = 1.$$

Fie ρ cea mai mică rădăcină pozitivă a ecuaţiei $\eta^{*(n-1)}(x) = 0$ (în cazul cînd funcţia $\eta^{*(n-1)}(x)$ nu se anulează în $(0, \infty)$, se consideră în mod convenţional $\rho = \infty$) *şi fie $H = \min\{\rho, b - a\}$. În aceste ipoteze operatorul L_n va avea proprietatea $\mathcal{H}_n[a, a + H)$* (deci şi proprietatea $\mathcal{I}_n[a, a + H)$).

Demonstraţie. Fie $K^*(x, \alpha)$ funcţia lui Cauchy asociată operatorului L_n^*. Evident că $\eta^*(x) = K^*(x, 0)$. Întrucît însă prin ipoteză, funcţia $\eta^{*(n-1)}(x)$ nu se anulează în intervalul $[0, H)$, şi întrucît $\eta^{*(n-1)}(0) = 1$, rezultă inegalitatea strictă $\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} K^*(x, 0) > 0$, pentru $x \in [0, H)$. De aici, ţinînd seamă de faptul că operatorul L_n^* din (42) are coeficienţi constanţi, ar rezulta că funcţia de două variabile x şi α, $\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} K^*(x, \alpha)$ este pozitivă în domeniul triunghiular $a \leq \alpha < x < a + H$. La această concluzie se ajunge îndată, observînd că operatorul L_n^*, avînd coeficienţii constanţi, rămîne neschimbat dacă se efectuează o translaţie asupra variabilei independente x. De aici rezultă identitatea $K^*(x, \beta) \equiv K^*(x - \beta + \alpha, \alpha)$ etc.

Din pozitivitatea funcţiei $\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} K^*(x, \alpha)$ în domeniul $a \leq \alpha < x < a + H$, ar rezulta în baza lemei 3, că operatorul L_n^* are proprietatea $\mathcal{H}_n[a, a + H)$. Pe de altă parte, între coeficienţii operatorilor L_n şi L_n^* au loc pentru orice $x \in [a, b)$, deci şi pentru orice $x \in [a, a + H)$ inegalităţile (41). Din compararea operatorilor L_n şi L_n^* care figurează în (1), respectiv în (42), se obţin următoarele concluzii :

1°. Între coeficienţii lor au loc relaţiile (41).

2°. Operatorul L_n^* din (42) are proprietatea $\mathcal{H}_n[a, a + H)$.

Astfel, condiţiile lemei 4 sînt îndeplinite, dacă se consideră acolo $L_n^{(1)} = L_n^*$ şi $L_n^{(2)} = L_n$, şi dacă se consideră în locul intervalului $[c, d]$ care figurează în enunțul lemei 4, intervalul $[a, a+H-\varepsilon]$, unde ε este un număr pozitiv oarecare, satisfăcînd inegalitatea $\varepsilon < H$. Conform lemei 4, rezultă că L_n are proprietatea $\mathcal{N}_n[a, a+H-\varepsilon]$ și întrucît ε poate fi luat oricît de mic, rezultă pentru L_n proprietatea $\mathcal{N}_n[a, a+H)$, q.e.d.

4. În scopul studierii celeilalte probleme formulată la începutul paragrafului precedent, referitoare la îmbunătățirea coeficienților ecuației (16) în necunoscuta h, introducem următoarele notații:

Fiind dat operatorul diferențial L_n din (1), avînd coeficienții continui în intervalul $[a, b)$, vom nota cu $\mathcal{H}[L_n]$ mulțimea numerelor h $(0 < h < b-a)$, care au proprietatea:

1°. *Dacă* $h \in \mathcal{H}[L_n]$, *atunci ecuația diferențială* $L_n[y] = 0$ *are cel puțin o soluție neidentic nulă* $y(x)$, *care satisface condițiile*

$$y(a) = y'(a) = \ldots = y^{(n-2)}(a) = 0; \quad y^{(n-1)}(a+h) = 0. \tag{43}$$

2°. *Dacă* $y(x)$ *este o soluție neidentic nulă a ecuației* $L_n[y] = 0$, *satisfăcînd condițiile* (43), *în care* h *este astfel încît* $0 < h < b - a$, *atunci* $h \in \mathcal{H}[L_n]$.

În cazul cînd operatorul L_n din (1) are proprietatea de neoscilație $\mathcal{N}_n[a, b)$, mulțimea $\mathcal{H}[L_n]$ este evident vidă. În caz contrar, mulțimea $\mathcal{H}[L_n]$ nu este vidă. Conform teoremei 1 stabilite anterior (în cazul cînd $\mathcal{H}[L_n]$ nu este vidă), are loc inegalitatea

$$\inf \mathcal{H}[L_n] \geqq h_0, \tag{44}$$

unde h_0 este rădăcina din intervalul $(0, b-a)$ a ecuației (16). Se constată îndată că marginea inferioară care figurează în (44), în cazul cînd mulțimea $\mathcal{H}[L_n]$ nu este vidă, este atinsă, și ea este egală cu diferența $\rho - a$, unde ρ reprezintă cea mai mică rădăcină din intervalul $[a, b)$ a ecuației $\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} K(x, a) = 0$. Aici prin $K(x, a)$ s-a notat soluția $y(x)$ a ecuației diferențiale $L_n[y] = 0$, care satisface condițiile

$$y(a) = y'(a) = \ldots = y^{(n-2)}(a) = 0, \quad y^{(n-1)}(a) = 1.$$

Vom nota în continuare cu $\mathcal{L}_n$ mulțimea tuturor operatorilor diferențiali liniari și omogeni de ordinul n, de forma (1), cu coeficienți continui în intervalul $[a, b)$. Evident că un operator oarecare L_n din $\mathcal{L}_n$ este determinat dacă se dau coeficienții săi $p_1(x), \ldots, p_n(x)$.

Vom nota cu $\mathcal{L}_n^*$ submulțimea tuturor operatorilor diferențiali liniari și omogeni de ordinul n, cu coeficienți constanți în intervalul $[a, b)$. Evident că are loc relația de incluziune $\mathcal{L}_n^* \subset \mathcal{L}_n$.

Fiind dat un operator L_n din clasa $\mathcal{L}_n$, avînd coeficienții $p_1(x), \ldots, p_n(x)$, vom nota cu

$$m_i(h; L_n) = \max_{x \in [a, a+h]} |p_i(x)| \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{45}$$

Funcțiile $m_i(h; L_n)$ sînt definite pentru orice $L_n \in \mathcal{L}_n$ și pentru orice $h \in (0, b-a)$. Cu aceste notații și precizări, considerăm inegalitatea

$$a_n m_n(h; L_n) \cdot h^n + a_{n-1} m_{n-1}(h; L_n) \cdot h^{n-1} + \ldots + a_1 m_1(h; L_n) \cdot h - 1 \geqq 0, \tag{46}$$

în care a_i sînt constante nenegative. Problema pe care ne propunem s-o studiem se poate formula astfel:

Să se determine toate sistemele de numere nenegative $a_1, \ldots, a_n$ astfel încît:

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Inegalitatea (44) să fie verificată pentru orice } h \in \mathcal{H}[L_n], \\ \textit{oricare ar fi } L_n \in \mathcal{L}_n, \textit{ deci oricare ar fi sistemul de coeficienți} \\ \{p_i(x)\} \textit{ al operatorului } L_n \textit{ considerat.} \end{array}\right\} \tag{47}$$

Teorema 1 stabilită în această lucrare ne furnizează un astfel de sistem de numere $\{a_i\}$, anume sistemul $\{a_k = A_{n,n-k}\}$ unde $A_{n,k}$ reprezintă constantele din (7). Acest sistem de coeficienți $\{a_k\}$, după cum se va vedea în cele următoare, nu este „cel mai bun". Se poate pune astfel și problema alegerii din mulțimea tuturor sistemelor de numere $\{a_k\}$ care satisfac condițiile (47), a acelora, care sînt „optimale". În scopul studierii acestei probleme, stabilim următoarea teoremă:

TEOREMA 3. *Condiția necesară și suficientă ca un sistem de numere* $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *să satisfacă inegalitatea* (46) *pentru orice* $L_n \in \mathcal{L}_n$ *și pentru orice* $h \in \mathcal{H}_n[L_n]$, *este ca acel sistem* $\{a_1, \ldots, a_n\}$ *să satisfacă inegalitatea* (46) *pentru orice operator diferențial liniar și omogen de ordinul n, cu coeficienți constanți* L_n^* $(L_n^* \in \mathcal{L}_n^*)$ *și pentru orice* $h \in \mathcal{H}[L_n^*]$.

Demonstrație. Necesitatea condiției exprimate de teoremă este evidentă. Să demonstrăm suficiența condiției. Presupunem deci că $\{a_1^*, a_2^*, \ldots, a_n^*\}$ este un astfel de sistem de numere nenegative încît inegalitatea (46) este satisfăcută pentru orice operator diferențial liniar și omogen de ordinul n, cu coeficienți constanți L_n^* $(L_n^* \in \mathcal{L}_n^*)$. Să presupunem, contrar afirmației teoremei, că ar exista un operator $L_n \in \mathcal{L}_n$ și relativ la acest operator, un număr $h \in \mathcal{H}[L_n]$[1] astfel încît relația (46) în care s-a înlocuit $a_i = a_i^*$

[1]) Prin aceasta se presupune implicit că mulțimea $\mathcal{H}[L_n]$ nu este vidă, deci că funcția $\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} K(x, a)$ corespunzătoare operatorului L_n se anulează cel puțin într-un punct din intervalul (a, b).

$(i = 1, 2, \ldots, n)$ să nu fie verificată pentru operatorul L_n şi pentru numărul h corespunzător. Atunci va avea loc inegalitatea strictă

$$a_n^* m_n(h; L_n) h^n + a_{n-1}^* m_{n-1}(h; L_n) h^{n-1} + \ldots + a_1^* m_1(h; L_n) h - 1 < 0. \quad (48)$$

Presupunem că operatorul L_n în cauză are expresia

$$L_n[y] = y^{(n)} + q_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + q_{n-1}(x) y' + q_n(x) y. \quad (49)$$

Conform definiţiei mulţimii $\mathcal{H}[L_n]$, numărul $h \in \mathcal{H}[L_n]$ va fi de forma $h = \rho - a$, unde ρ reprezintă o rădăcină din intervalul (a, b) a funcţiei $\left.\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} K(x, \alpha)\right|_{\alpha = a}$. Aici $K(x, \alpha)$ reprezintă funcţia lui Cauchy asociată operatorului L_n. Vom folosi pentru simplicitatea scrierii notaţia $K(x, a) = \eta(x)$. Funcţia $\eta(x)$ este deci o soluţie a ecuaţiei diferenţiale $L_n[y] = 0$, satisfăcînd condiţiile :

$$\begin{aligned} &\eta(a) = \eta'(a) = \ldots = \eta^{(n-2)}(a) = 0, \quad \eta^{(n-1)}(a) = 1 \\ &\eta^{(n-1)}(a + h) = 0 \quad (0 < h < b - a), \end{aligned} \quad (50)$$

unde h este numărul care figurează şi în inegalitatea (48). Fără a restrînge generalitatea demonstraţiei, vom putea presupune că rădăcina $\rho = a + h$ în cauză, este cea mai mică dintre rădăcinile din intervalul (a, b) ale funcţiei $\eta^{(n-1)}(x)$, întrucît în caz contrar, inegalitatea (48) va fi a fortiori verificată pentru numărul h_1 corespunzător celei mai mici rădăcini a funcţiei $\eta^{(n-1)}(x)$, din intervalul (a, b).

Să asociem acum operatorului L_n din (49), operatorul diferenţial liniar şi omogen, cu coeficienţi constanţi

$$L_n^*[y] = y^{(n)} + m_1(h; L_n) y^{(n-1)} + m_2(h; L_n) y^{(n-1)} + \ldots + m_n(h; L_n) y, \quad (51)$$

în expresia căruia numărul $h = \rho - a$ reprezintă numărul ce intervine în (48) şi (50).

Fie $K^*(x, \alpha)$ funcţia lui Cauchy asociată operatorului L_n^*. Vom utiliza de asemenea notaţia $\eta^*(x) = K^*(x, a)$. Evident că funcţia $\eta^*(x)$ verifică condiţiile

$$\eta^*(a) = \eta^{*\prime}(a) = \ldots = \eta^{*(n-1)}(a) = 0, \quad \eta^{*(n-1)}(a) = 1. \quad (52)$$

Vom demonstra că funcţia $\eta^{*(n-1)}(x)$ se anulează cel puţin o dată în intervalul $(a, a + h]$, h fiind numărul care figurează în relaţiile (48) şi (50), precum şi în expresia (51) a operatorului $L_n^*[y]$. Într-adevăr, să presupunem prin absurd că funcţia $\eta^{*(n-1)}(x)$ nu se anulează în $(a, a + h]$. Cum $a + h < b$, rezultă că va exista un număr $\varepsilon > 0$, suficient de mic, astfel încît funcţia $\eta^{*(n-1)}(x)$ să continue să rămînă diferită de zero în intervalul mai mare, $(a, a + h + \varepsilon)$. Atunci din condiţiile (52) pe care le satisface $\eta^*(x)$ în punctul $x = a$, ar rezulta inegalitatea strictă

$$\eta^{*(n-1)}(x) > 0 \quad \text{pentru } x \in [a, a + h + \varepsilon).$$

De aici, ţinînd seamă de faptul că operatorul L_n^* din (51) are coeficienţii constanţi, ar rezulta că funcţia $\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} K^*(x, \alpha)$ este pozitivă în domeniul triunghiular

$$a \leq \alpha < x < a + h + \varepsilon.$$

şi în baza lemei 3, că operatorul L_n^* are proprietatea $\mathcal{N}_n[a, a + h + \varepsilon)$, deci şi proprietatea $\mathcal{N}_n[a, a + h]$. Pe de altă parte, se observă că între coeficienţii operatorilor L_n şi L_n^* din (49), resp. (51), au loc pentru orice $x \in [a, a + h]$ inegalităţile

$$q_i(x) \leq m_i(h; L_n) = \max_{x \in [a, a+h]} |q_i(x)| \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \quad x \in [a, a + h]. \quad (53)$$

Din compararea operatorilor L_n şi L_n^* care figurează în (49), resp. (51), s-ar obţine următoarele concluzii :

1°. Între coeficienţii lor au loc relaţiile (53).

2°. Operatorul L_n^* are proprietatea $\mathcal{N}_n[a, a + h]$.

Astfel, condiţiile lemei 4 sînt îndeplinite, dacă se consideră acolo $L_n^{(1)} = L_n^*$ şi $L_n^{(2)} = L_n$, şi dacă se consideră în locul intervalului $[c, d]$ care figurează în enunţul lemei 4, intervalul $[a, a + h]$. Aplicînd lema 4, s-ar obţine în cazul nostru că şi operatorul L_n are proprietatea $\mathcal{N}_n[a, a + h]$. Aceasta ar fi însă în contradicţie cu existenţa unei soluţii $\eta(x)$ a ecuaţiei diferenţiale $L_n[y] = 0$, satisfăcînd condiţiilor (50). Această contradicţie provine din ipoteza făcută anterior, că funcţia $\eta^{*(n-1)}(x)$ nu s-ar anula în intervalul $(a, a + h]$. Rezultă în definitiv că funcţia $\eta^{*(n-1)}(x)$ se anulează cel puţin o dată în intervalul $(a, a + h]$. Fie $\rho^* = a + h^*$ o rădăcină din intervalul $(a, a + h]$ a funcţiei $\eta^{*(n-1)}(x)$. Evident că $0 < h^* \leq h$. De aici şi din inegalitatea (48), rezultă a fortiori inegalitatea

$$\begin{aligned} a_n^* m_n(h; L_n) h^{*n} + a_{n-1}^* m_{n-1}(h; L_n) h^{*n-1} + \ldots + \\ + a_1^* m_1(h; L_n) h^* - 1 < 0. \end{aligned} \quad (54)$$

Ţinînd însă seamă de faptul că operatorul $L_n^*[y]$ din (51) are coeficienţii constanţi, egali respectiv cu $m_i(h; L_n)$ $(i = 1, \ldots, n)$, vom putea scrie în baza formulei de definiţie (45), egalităţile

$$m_i(h; L_n) = m_i(h^*; L_n^*) \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Înlocuind în (54), obţinem

$$a_n^* m_n(h^*; L_n^*) h^{*n} + a_{n-1}^* m_{n-1}(h^*; L_n^*) h^{*n-1} + \ldots + a_1^* m_1(h^*; L_n^*) h^* - 1 < 0.$$

Această inegalitate ne arată că pentru sistemul de coeficienţi $\{a_1^*, \ldots, a_n^*\}$ există un operator diferenţial L_n^*, liniar şi omogen, de ordinul n, cu coeficienţi constanţi, şi totodată un număr $h^* \in \mathcal{H}[L_n^*]$, astfel încît inegalitatea (46) în care s-au înlocuit a_i cu a_i^*, nu este verificată. Aceasta contrazice însă ipoteza adoptată la începutul demonstraţiei, că sistemul de coeficienţi $\{a_1^*, \ldots, a_n^*\}$ este astfel încît inegalitatea (46) este satisfăcută pentru orice operator diferenţial liniar şi omogen de ordinul n, cu coeficienţi constanţi.

Rezultă în definitiv suficienţa condiţiei exprimate de teoremă.

Observaţie. Din teorema stabilită anterior, rezultă îndată că un sistem de coeficienţi nenegativi $\{a_1, \ldots, a_n\}$ care verifică inegalitatea (46) pentru orice $h \in \mathcal{H}[L_n]$, oricare ar fi $L_n \in \mathcal{L}_n$, nu depinde de intervalul $[a, b)$ în care se presupun continui coeficienţi operatorilor diferenţiali din clasa $\mathcal{L}_n$. Această afirmaţie rezultă din constatarea că un operator diferenţial liniar şi omogen cu coeficienţii constanţi se transformă tot într-un operator diferenţial liniar şi omogen cu coeficienţi constanţi, dacă asupra variabilei independente x se aplică o transformare de forma $X = \lambda(x - x_0)$. Un sistem de numere $\{a_1, \ldots, a_n\}$ cu proprietate formulată mai sus, depinde însă de numărul n şi de tipul problemei de interpolare considerate. Referitor la acesta, în cele ce urmează ne vom folosi de următoarea terminologie:

DEFINIŢIA 3. *Vom spune că un sistem de coeficienţi nenegativi* $\{a_1, \ldots, a_n\}$ *este admisibil în raport cu proprietatea de neoscilatie* $\mathcal{N}_n$ (a se vedea definiţia 2), *dacă inegalitatea* (46) *în care se consideră* $a = 0$ *şi* $b = \infty$, *este verificată pentru orice* $h \in \mathcal{H}[L_n^*]$, *oricare ar fi operatorul diferenţial liniar şi omogen de ordinul* n, L_n^*, *cu coeficienţi constanţi, în intervalul* $[0, \infty)$.

O consecinţă imediată a teoremei 3 o constituie următoarea teoremă:

TEOREMA 4. *Fie dat un operator diferenţial liniar şi omogen* L_n, *de forma* (1), *avînd coeficienţii continui într-un interval* $[x_1, x_2]$ *şi fie* $\{a_1, \ldots, a_n\}$ *un sistem admisibil relativ la proprietatea de neoscilaţie* $\mathcal{N}_n$. *O condiţie suficientă ca ecuaţia diferenţială* $L_n[y] = 0$ *să admită pentru orice sistem dat de numere reale* $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2}, \alpha_{n-1})$ *o soluţie şi una singură* $y(x)$, *satisfăcînd condiţiile* (2), *este ca operatorul diferenţial* L_n *să satisfacă inegalitatea*

$$a_n m_n[x_2 - x_1; L_n](x_2 - x_1)^n + a_{n-1} m_{n-1}[x_2 - x_1; L_n](x_2 - x_1)^{n-1} + \ldots + \\ + a_1 m_1[x_2 - x_1; L_n](x_2 - x_1) - 1 < 0. \quad (55)$$

Aici în conformitate cu formula (45), *s-a notat*

$$m_i(h; L_n) = \max_{x \in [x_1, x_1 + h]} |p_i(x)|, \quad 0 < h \leqq x_2 - x_1, \quad (56)$$

unde $p_i(x)$ *reprezintă coeficienţii operatorului* L_n *considerat.*

Demonstraţie. Dacă se consideră mulţimea $\mathcal{H}[L_n]$ definită la începutul paragrafului 4, relativ la operatorul L_n şi relativ la intervalul închis $[x_1, x_2]$, atunci relaţia (55) ne arată că numărul $h = x_2 - x_1$ nu poate aparţine mulţimii $\mathcal{H}[L_n]$, întrucît în baza teoremei 3 toate numerele din $\mathcal{H}[L_n]$ satisfac o inegalitate de sens contrar inegalităţii (55), anume inegalitatea (46) în care însă $m_i(h; L_n)$ sînt definite în conformitate cu formula (56). De aici rezultă că ecuaţia diferenţială $L_n[y] = 0$ nu admite nici o soluţie $y(x)$ neidentic nulă, satisfăcînd în punctele x_1 şi x_2 condiţiile (4) ceea ce demonstrează afirmaţia teoremei 4.

5. Vom arăta acum că problema determinării tuturor sistemelor admisibile de coeficienţi $\{a_1, \ldots, a_n\}$ relative la proprietatea de neoscilaţie $\mathcal{N}_n$ revine la aflarea extremelor unei funcţii reale de n variabile, luînd valori complexe, funcţia în cauză depinzînd de asemenea de n parametri reali şi nenegativi.

În baza definiţiei 3, un sistem de n numere nenegative $a_1, \ldots, a_n$ este *admisibil* în raport cu proprietatea de neoscilaţie $\mathcal{N}_n$, dacă inegalitatea (46) în care se consideră $a = 0$ şi $b = \infty$, este verificată pentru orice $h \in \mathcal{H}[L_n^*]$, oricare ar fi operatorul diferenţial liniar şi omogen, de ordinul n, L_n^* avînd coeficienţii constanţi în intervalul $[0, \infty)$. Fie

$$L_n^*[y] = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y$$

un astfel de operator cu coeficienţi constanţi. Notînd cu $r_1, r_2, \ldots, r_n$ rădăcinile polinomului caracteristic asociat operatorului L_n^*, vom putea să exprimăm coeficienţii săi p_i în funcţie de rădăciniile r_j. Vom avea deci $p_i = p_i(r_1, r_2, \ldots, r_n)$. Ţinînd seama de formula de definiţie (45), vom avea

$$m_i(h; L_n) = \sup_{x \in [0, \infty]} |p_i| = |p_i(r_1, r_2, \ldots, r_n)|. \quad (57)$$

Fie $\eta^*(x)$ soluţia ecuaţiei $L_n^*[y] = 0$, care verifică în punctul $x = 0$ condiţiile

$$\eta^*(0) = \eta^{*\prime}(0) = \ldots = \eta^{*(n-2)}(0) = 0, \quad \eta^{*(n-1)}(0) = 1. \quad (58)$$

Fie ρ cea mai mică rădăcină (reală) pozitivă (dacă există), a ecuaţiei $\eta^{*(n-1)}(x) = 0$. Evident că ρ este o funcţie de $r_1, \ldots, r_n$. Vom scrie $\rho = \rho(r_1, \ldots, r_n)$. În cazul cînd ecuaţia $\eta^{*(n-1)}(x) = 0$ nu are rădăcini pozitive, atunci vom considera prin convenţie $\rho = \infty$. Cu acestea, inegalitatea (46) devine:

$$\Phi(r_1, \ldots, r_n; a_1, \ldots, a_n) = a_n |p_n(r_1, \ldots, r_n)| \rho^n(r_1, \ldots, r_n) + \\ + a_{n-1} |p_{n-1}(r_1, \ldots, r_n)| \rho^{n-1}(r_1, \ldots, r_n) + \ldots \\ \ldots + a_1 |p_1(r_1, \ldots, r_n)| \rho(r_1, \ldots, r_n) - 1 \geqq 0. \quad (59)$$

Pentru ca sistemul $\{a_1, \ldots, a_n\}$ să fie admisibil, este necesar şi suficient ca inegalitatea (59) să fie verificată oricare ar fi numerele complexe $r_1, \ldots, r_n$. Această observaţie ne arată că pentru a obţine toate sistemele admisibile $\{a_1, \ldots, a_n\}$, este suficient să calculăm

$$\inf_{(r_1, \ldots, r_n)} \Phi(r_1, \ldots, r_n; a_1, \ldots, a_n) = M(a_1, \ldots, a_n) \tag{60}$$

şi apoi să punem condiţia ca această margine inferioară să fie nenegativă. Numerele $a_1, \ldots, a_n$ vor trebui deci să satisfacă inegalitatea

$$M(a_1, \ldots, a_n) \geqq 0. \tag{61}$$

Această inegalitate defineşte în spaţiul variabilelor $a_1, \ldots, a_n$ un domeniu $\mathcal{D}_n$. În baza teoremei 1, domeniul $\mathcal{D}_n$ conţine punctul de coordonate $a_k = A_{n, n-k}$ unde $A_{n,k}$ sînt date în (7). În problema de interpolare studiată în acest articol, ne interesează obţinerea de coeficienţi admisibili pe cît posibil ,,mai mici" (pentru ca inegalitatea (55) care asigură posibilitatea interpolării de tipul (2) să fie cît mai puţin restrictivă). Evident că un punct interior al domeniului $\mathcal{D}_n$ nu ne va furniza un sistem admisibil optimal. Astfel de sisteme se vor obţine considerînd puncte ale frontierei mulţimii $\mathcal{D}_n$. Referitor la domeniul $\mathcal{D}_n$ putem face următoarea precizare:

LEMA 5. *Oricare ar fi $n = 2, 3, \ldots$, domeniul $\mathcal{D}_n$ al sistemelor $\{a_1, \ldots, a_n\}$ admisibile în raport cu problema de interpolare* (2), *este convex.*

Demonstraţie. Într-adevăr, fie $\{a_1, \ldots, a_n\}$ şi $\{b_1, \ldots, b_n\}$ două sisteme admisibile. Vrem să arătăm că şi sistemul

$$\{\lambda a_1 + (1-\lambda) b_1, \ \lambda a_2 + (1-\lambda) b_2 \ \ldots, \ \lambda a_n + (1-\lambda) b_n\}$$

este admisibil, oricare ar fi numărul $\lambda \in [0, 1]$. Fie în acest scop L_n^* un operator oarecare, diferenţial liniar şi omogen de ordinul n, cu coeficienţi constanţi într-un interval $[a, b)$. Fie $\mathcal{H}[L_n^*]$ mulţimea de numere h, definită la începutul paragrafului 4. Va trebui să arătăm că oricare ar fi $h \in \mathcal{H}[L_n^*]$, are loc următoarea inegalitate, analoagă inegalităţii (46):

$$\varphi(\lambda) = [\lambda a_n + (1-\lambda) b_n] \cdot m_n(h; L_n^*) \cdot h^n + [\lambda a_{n-1} + (1-\lambda) b_{n-1}] \times$$
$$\times m_{n-1}(h; L_n^*) \cdot h^{n-1} + \ldots + [\lambda a_1 + (1-\lambda) b_1] \cdot m_1(h; L_n^*) \cdot h - 1 \geqq 0. \tag{62}$$

Dar deoarece $\{a_1, \ldots, a_n\}$ şi $\{b_1, \ldots, b_n\}$ constituie sisteme admisibile, rezultă că sînt adevărate inegalităţile

$$a_n \cdot m_n(h; L_n^*) \cdot h^n + a_{n-1} \cdot m_{n-1}(h; L_n^*) \cdot h^{n-1} + \ldots +$$
$$+ a_1 \cdot m_1(h; L_n^*) \cdot h - 1 \geqq 0 \tag{63}$$

$$b_n \cdot m_n(h; L_n^*) \cdot h^n + b_{n-1} \cdot m_{n-1}(h; L_n^*) \cdot h^{n-1} + \ldots +$$
$$+ b_1 \cdot m_1(h; L_n^*) \cdot h - 1 \geqq 0. \tag{64}$$

Considerînd funcţia $\varphi(\lambda)$ definită în (62), relaţiile (63) şi (64) ne arată că $\varphi(1) \geqq 0$ şi $\varphi(0) \geqq 0$. Cum $\varphi(\lambda)$ este un polinom de gradul 1 în raport cu λ, rezultă că $\varphi(\lambda) \geqq 0$ oricare ar fi $\lambda \in [0, 1]$ şi deci că are loc inegalitatea (62). Cum operatorul L_n^* este oarecare din clasa $\mathcal{L}_n^*$ a operatorilor diferenţiali liniari şi omogeni cu coeficienţi constanţi, rezultă afirmaţia lemei 5.

În lucrarea [10], D. Ripianu determină efectiv domeniul $\mathcal{D}_n$ în cazul particular cînd $n = 2$, punînd în evidenţă sistemele admisibile optimale.

III

6. Lemele 2 şi 4 precum şi teorema 2, stabilite anterior, îşi găsesc aplicaţii în studiul următoarei probleme polilocale referitoare la ecuaţii diferenţiale neliniare.

Pentru ecuaţia diferenţială

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \quad x_1 \leqq x \leqq x_2, \tag{65}$$

se caută soluţia care satisface condiţiile

$$y(x_1) = \alpha_0, \ y'(x_1) = \alpha_1, \ \ldots, \ y^{(n-2)}(x_1) = \alpha_{n-2},$$
$$y^{(n-1)}(x_2) = \alpha_{n-1}. \tag{66}$$

Teorema 5 pe care o stabilim în continuare, se referă la unicitatea problemei (65), (66), demonstraţia ei bazîndu-se pe afirmaţia lemei 4 (respectiv teoremei 2); teoremele 6 şi 7 pe care de asemenea le stabilim în continuare, constituie aplicaţii ale lemei 2.

TEOREMA 5. *Presupunem că sînt îndeplinite condiţiile:*

1°. *Funcţia $f(x, y_0, \ldots, y_{n-1})$ este continuă în raport cu $x \in [x_1, x_2]$ şi satisface în raport cu variabilele $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ condiţia*

$$|f(x, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) - f(x, \bar{y}_0, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_{n-1})| \leqq \sum_{i=0}^{n-1} P_i(x)\, |y_i - \bar{y}_i|, \tag{67}$$
$$x \in [x_1, x_2],$$

unde $P_i(x)$ sînt funcţii continue şi nenegative în intervalul $[x_1, x_2]$, astfel încît

$$\sum_{i=0}^{n-2} P_i(x) \neq 0, \quad x \in [x_1, x_2]. \tag{68}$$

2°. *Operatorul diferenţial liniar*

$$L_n[y] = y^{(n)} + P_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \ldots + P_1(x) y' + P_0(x) y \tag{69}$$

are proprietatea de neoscilaţie $\mathcal{N}_n[x_1, x_2]$ (a se vedea definiţia 2 de la § 1).

În aceste ipoteze, ecuația diferențială (65) nu poate admite decît cel mult o singură soluție satisfăcînd condițiile (66).

Demonstrație. Să presupunem că în condițiile teoremei, ecuația (65) ar admite două soluții distincte $y_1(x)$ și $y_2(x)$, satisfăcînd condițiile (66). Atunci funcția $z(x) = y_2(x) - y_1(x)$ satisface condițiile

$$z(x_1) = z'(x_1) = \ldots = z^{(n-2)}(x_1) = 0 \quad z^{(n-1)}(x_2) = 0. \tag{70}$$

Se observă că $z^{(n-1)}(x_1) \neq 0$, întrucît în caz contrar ar rezulta, în baza condițiilor (70), că $y_1(x)$ și $y_2(x)$ satisfac în punctul x_1 aceleași condiții ale lui Cauchy, și în baza inegalității (67) ar rezulta (conform unui rezultat cunoscut) identitatea $y_1(x) \equiv y_2(x)$ pentru $x \in [x_1, x_2]$.

Fie ρ cea mai mică rădăcină din intervalul $[x_1, x_2]$ a ecuației $z^{(n-1)}(x) = 0$. Evident că $x_1 < \rho \leq x_2$. Au loc deci relațiile

$$\begin{gathered} z^{(n-1)}(x) \neq 0, \quad x \in [x_1, \rho) \\ z^{(n-1)}(\rho) = 0. \end{gathered} \tag{71}$$

În intervalul (x_1, ρ), nici una dintre funcțiile $z(x), z'(x), \ldots, z^{(n-2)}(x)$ nu se poate anula, întrucît în caz contrar, dacă de exemplu $z^{(i)}(\xi) = 0$, unde $x_1 < \xi < \rho$, în baza egalităților (70) ar rezulta prin aplicarea de $n - i - 1$ ori succesiv a teoremei lui Rolle funcției $z^{(i)}(x)$, că $z^{(n-1)}(x)$ se anulează cel puțin o dată în intervalul (x_1, ξ), ceea ce ar contrazice prima relație din (71). De aici, ținînd seamă de relațiile (70) și (71), se constată cu ușurință că

$$\begin{gathered} \operatorname{sgn} z(x) = \operatorname{sgn} z'(x) = \ldots = \operatorname{sgn} z^{(n-2)}(x) = \operatorname{sgn} z^{(n-1)}(x) \neq 0, \\ x \in (x_1, \rho), \end{gathered} \tag{72}$$

și că

$$\operatorname{sgn} z(\rho) = \operatorname{sgn} z'(\rho) = \ldots = \operatorname{sgn} z^{(n-2)}(\rho) \neq 0. \tag{73}$$

Întrucît prin ipoteză funcțiile $P_i(x)$ care figurează în (67) sînt nenegative și satisfac inegalitatea (68), rezultă din (72) și (73)

$$\sum_{i=0}^{n-1} P_i(x)\, z^{(i)}(x) \neq 0 \quad x \in [x_1, \rho]. \tag{74}$$

Cu aceste precizări, considerăm identitatea evidentă

$$E_n[z] = z^{(n)}(x) + \sum_{i=0}^{n-1} p_i(x)\, z^{(i)}(x) \equiv 0, \quad x \in [x_1, \rho], \tag{75}$$

unde s-a notat

$$p_i(x) = -P_i(x)\, z^{(n)}(x) \left[\sum_{j=0}^{n-1} P_j(x)\, z^{(j)}(x)\right]^{-1} \quad (i = 0, \ldots, n-1). \tag{76}$$

Funcțiile $p_i(x)$ sînt continue, întrucît prin ipoteză $P_i(x)$ sînt continue și întrucît are loc relația (74).

Să arătăm acum că au loc relațiile

$$|p_i(x)| \leq P_i(x), \quad x \in [x_1, \rho] \quad (i = 0, \ldots, n-1). \tag{77}$$

Într-adevăr, din faptul că $y_1(x)$ și $y_2(x)$ sînt soluții ale ecuației diferențiale (65), rezultă că

$$z^{(n)}(x) = y_2^{(n)}(x) - y_1^{(n)}(x) = f(x, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(n-1)}) - f(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}).$$

De aici, în baza ipotezei 1° a teoremei în cauză, se obține inegalitatea

$$|z^{(n)}(x)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} P_i(x)\, |z^{(i)}(x)|, \quad x \in [x_1, \rho].$$

Întrucît însă funcțiile $P_i(x)$ sînt nenegative în $[x_1, x_2]$ și întrucît au loc relațiile (72) și (73), această inegalitate se poate transcrie astfel:

$$|z^{(n)}(x)| \leq \left|\sum_{i=0}^{n-1} P_i(x)\, z^{(i)}(x)\right|, \quad x \in [x_1, \rho]. \tag{78}$$

Luînd în (76) valorile absolute ale ambilor membri și înlocuind apoi pe $|z^{(n)}(x)|$ cu expresia care figurează în membrul al doilea al inegalității (78), se obține, în urma unei simplificări, inegalitatea (77).

În definitiv am obținut următorul rezultat:

Funcția $z(x)$ constituie în intervalul $[x_1, \rho]$ o soluție a ecuației diferențiale liniare și omogene $E_n[z] = 0$ din (75), verificînd în punctele $x = x_1$ și $x = \rho$ condițiile de anulare (70) și (71).

Pe de altă parte, din compararea operatorilor diferențiali E_n din (75) și L_n din (69) se constată următoarele:

1. Acești operatori sînt liniari și omogeni de ordinul n, de formă normală; coeficienții lor sînt funcții continue în intervalul $[x_1, \rho]$ și satisfac în acest interval inegalitățile

$$p_i(x) \leq P_i(x) \quad (i = 0, \ldots, n-1),$$

care rezultă de altfel din (77), ținînd seamă de faptul că funcțiile $P_i(x)$ sînt (prin ipoteză) nenegative în $[x_1, x_2]$.

2. Operatorul L_n are (prin ipoteză) proprietatea de neoscilație $\mathcal{N}_n[x_1, x_2]$, deci și proprietatea $\mathcal{N}_n[x_1, \rho]$.

De aici, în baza lemei 4, rezultă că și operatorul E_n din (75) are proprietatea de neoscilație $\mathcal{N}_n[x_1, \rho]$. Această concluzie este însă în contradicție cu faptul că ecuația diferențială $E_n[z] = 0$ admite, după cum ne arată identitatea (75), soluția neidentic nulă $z(x) = y_2(x) - y_1(x)$, care în punctele $x = x_1$ și $x = \rho$ satisface condițiile de anulare (70) și (71). Contradicția provine din ipoteza falsă adoptată la început, că $y_1(x)$ și $y_2(x)$

ar constitui soluţii distincte în intervalul $[x_1, x_2]$ ale ecuaţiei diferenţiale (65), satisfăcînd condiţiile (66). Rezultă în definitiv afirmaţia teoremei.

CONSECINŢĂ. *Fie* $\{a_1, \ldots, a_n\}$ *un sistem admisibil, relativ la proprietatea de neoscilaţie* $\mathcal{N}_n$ (a se vedea definiţia 3). *Presupunem că este îndeplinită condiţia* 1° *din enunţul teoremei* 5, *precum şi inegalitatea*

$$a_n \cdot P_0 \cdot h^n + a_{n-1} \cdot P_1 \cdot h^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot P_{n-1} \cdot h - 1 < 0, \qquad (79)$$

unde s-a notat $h = x_2 - x_1$ *şi*

$$P_i = \sup_{x \in [x_1, x_2]} P_i(x) \quad (i = 0, \ldots, n-1).$$

În aceste condiţii, soluţia problemei (65), (66), *în cazul cînd există, este unică.*

Această afirmaţie rezultă îndată, observînd că inegalitatea (79) asigură în baza teoremei 4, proprietatea de neoscilaţie $\mathcal{N}_n[x_1, x_2]$ a operatorului L_n din (69). Astfel şi condiţia 2° din enunţul teoremei 5 fiind îndeplinită, rezultă în baza acestei teoreme afirmaţia făcută mai sus.

7. În continuare, vom stabili două teoreme referitoare la existenţa soluţiilor problemei (65), (66).

TEOREMA 6. *Presupunem că sînt îndeplinite condiţiile* :

1°. *Funcţia* $f(x, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$ *este continuă în raport cu* $x \in [x_1, x_2]$ *şi satisface în domeniul* $-\infty < y_i < +\infty$ $(i = 0, \ldots, n-1)$ *condiţia* (67), *în care* P_i *se presupun constante* (nenegative).

2°. *Are loc inegalitatea*

$$\sum_{i=0}^{n-1} A_{n,i} \cdot P_i \cdot (x_2 - x_1)^{n-i} < 1, \qquad (80)$$

în care $A_{n,i}$ *sînt constantele definite în* (7).

În aceste condiţii, problema (65), (66) *admite o soluţie unică.*

Demonstraţia acestei teoreme o facem după o metodă utilizată de G. A. Bessmertnîh şi A. Iu. Levin [3], în studiul existenţei şi unicităţii soluţiilor unor probleme polilocale de tip Lagrange-Hermite la ecuaţii diferenţiale.

Fie $\mathcal{M} = \mathcal{M}(x_1, x_2; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-2}, \alpha_{n-1})$ mulţimea tuturor funcţiilor avînd derivată de ordinul n continuă în $[x_1, x_2]$ şi satisfăcînd condiţiile (66). Se defineşte pentru orice $\varphi(x) \in \mathcal{M}$, operatorul B, precum urmează : $B\varphi$ reprezintă soluţia $y(x)$ a ecuaţiei diferenţiale

$$y^{(n)} = f[x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x)],$$

satisfăcînd condiţiile (66). Evident că acest operator transformă mulţimea $\mathcal{M}$ în ea însăşi, sau într-o parte a ei. Introducînd în $\mathcal{M}$ metrica

$$\rho(y, z) = \max_{x \in [x_1, x_2]} |y^{(n)}(x) - z^{(n)}(x)| \quad (y(x), z(x) \in \mathcal{M}),$$

$\mathcal{M}$ devine un spaţiu metric complet, iar operatorul B apare în acest spaţiu un operator de contracţie. Într-adevăr, în baza definiţiei acestui operator, are loc egalitatea

$$\rho(By, Bz) = \max_{x \in [x_1, x_2]} |f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) - f(x, z, z, \ldots, z^{(n-1)})|.$$

Aplicînd în membrul al doilea inegalitatea lui Lipschitz, se obţine

$$\rho(By, Bz) \leq \max_{x \in [x_1, x_2]} \sum_{i=0}^{n-1} P_i |y^{(i)}(x) - z^{(i)}(x)|. \qquad (81)$$

Dar întrucît funcţiile $y(x)$ şi $z(x)$ satisfac condiţiile (66), rezultă că diferenţa $\delta(x) = y(x) - z(x)$ satisface condiţiile

$$\delta(x_1) = \delta'(x_1) = \ldots = \delta^{(n-2)}(x_1) = 0, \quad \delta^{(n-1)}(x_2) = 0, \qquad (82)$$

şi în baza lemei 2, se obţin următoarele delimitări :

$$|y^{(i)}(x) - z^{(i)}(x)| \leq A_{n,i} \cdot (x_2 - x_1)^i \cdot \max |y^{(n)}(x) - z^{(n)}(x)|$$
$$(i = 0, 1, \ldots, n-1),$$

valabile oricare ar fi $x \in [x_1, x_2]$. Înlocuind în (81), obţinem

$$\rho(By, Bz) \leq \max_{x \in [x_1, x_2]} |y^{(n)}(x) - z^{(n)}(x)| \sum_{i=0}^{n-1} P_i A_{n,i} (x_2 - x_1)^{n-i} = q \cdot \rho(y, z), \qquad (83)$$

unde s-a notat $q = \sum_{i=0}^{n-1} A_{n,1} \cdot P_i \cdot (x_2 - x_1)^{n-i}$. Ţinînd seamă de inegalitatea (80) din care rezultă $q < 1$, relaţia (83) ne arată că operatorul B este un operator de contracţie în spaţiul $\mathcal{M}$.

În consecinţă, operatorul B va admite în mulţimea $\mathcal{M}$ un punct fix, de unde rezultă existenţa şi unicitatea soluţiei problemei (65), (66). Astfel, teorema este demonstrată.

Observaţie. Întrucît operatorul B este un operator de contracţie pe mulţimea $\mathcal{M}$, rezultă că în condiţiile teoremei 6, pentru a afla soluţia problemei (65), (66), se poate aplica metoda aproximaţiilor succesive. Rapiditatea de convergenţă a aproximaţiilor succesive către soluţie va fi cel puţin egală cu aceea a unei serii geometrice de raţie q.

*

Dacă ne limităm numai la existenţa soluţiei problemei (65), (66), atunci este suficient ca în locul condiţiei lui Lipschitz să considerăm o condiţie privind modul de creştere al funcţiei $f(x, y_0, \ldots, y_{n-1})$. Are loc în acest sens următoarea teoremă :

TEOREMA 7. *Dacă funcţia* $f(x, y_0, \ldots, y_{n-1})$ *este continuă în domeniul* $D: x_1 \leq x \leq x_2, \ -\infty < y_i < +\infty \ (i = 0, 1, \ldots, n-1)$, *şi verifică în acest domeniu inegalitatea*

$$|f(x, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})| \leq P + P_0|y_0| + P_1|y_1| + \ldots + P_{n-1}|y_{n-1}|, \quad (84)$$

în care $P, P_0 \ldots P_{n-1}$ *sînt constante astfel încît să fie verificată inegalitatea* (80), *atunci problema* (65), (66) *admite cel puţin o soluţie.*

Metoda de demonstraţie pe care o utilizăm este analoagă unei metode utilizate de G. A. Bessmertnîh şi A. Iu. Levin în lucrarea [3]. Fie $R(x)$ polinomul de gradul $n-1$ care satisface condiţiile (66) şi fie

$$p = \max_{x \in [x_1, x_2]} \sum_{i=0}^{n-1} P_i |R^{(i)}(x)|.$$

Notăm cu $\mathcal{S}$ sfera cu centrul în $R(x)$ şi de rază $\frac{P+p}{1-q}$ din spaţiul $\mathcal{M}$ (considerat în cadrul demonstraţiei teoremei 6). Aici $q = \sum_{i=0}^{n-1} A_{n,i} \cdot P_i \cdot (x_2 - x_1)^{n-i}$.

Să considerăm din nou operatorul B definit anterior şi să arătăm că acest operator transformă sfera $\mathcal{S}$ în ea însăşi. Într-adevăr, dacă $y(x) \in \mathcal{M}$ şi $\rho(y, R) \leq \frac{P+p}{1-q}$, atunci

$$\rho(By, R) = \max_{x \in [x_1, x_2]} |f(x, y, \ldots, y^{(n-1)})| \leq P + \max_{x \in [x_1, x_2]} \sum_{i=0}^{n-1} P_i |y^{(i)}| =$$

$$= P + \max_{x \in [x_1, x_2]} \sum_{i=0}^{n-1} P_i |(y - R)^{(i)} + R^{(i)}| \leq P + p + \max_{x \in [x_1, x_2]} \sum_{i=0}^{n-1} P_i |(y - R)^{(i)}|. \quad (85)$$

Ţinînd seamă de faptul că $y \in \mathcal{M}$ şi de definiţia mulţimii $\mathcal{M}$, se constată că diferenţa $\delta(x) = y(x) - R(x)$ satisface condiţiile (82), de unde în baza lemei 2 rezultă

$$|\delta^{(i)}(x)| \leq A_{n,i} \cdot \max_{x \in [x_1, x_2]} |\delta^{(n)}(x)|, \quad x \in [x_1, x_2] \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1),$$

adică

$$|y^{(i)}(x) - R^{(i)}(x)| \leq A_{n,i} \cdot \rho(y, R), \quad x \in [x_1, x_2].$$

Înlocuind în (85), obţinem

$$\rho(By, R) \leq P + p + q \cdot \rho(y, R) \leq P + p + q \frac{P+p}{1-q} = \frac{P+p}{1-q},$$

ceea ce demonstrează afirmaţia că operatorul B transformă sfera $\mathcal{S}$ în ea însăşi.

Pe de altă parte, din continuitatea funcţiei $f(x, y_0, \ldots, y_{n-1})$ în domeniul D, rezultă complet-continuitatea operatorului B în mulţimea $\mathcal{M}$. De

aici, în baza principiului lui Schauder, operatorul B va admite cel puţin un punct fix, ceea ce înseamnă că problema (65), (66) are cel puţin o soluţie $y(x)$, satisfăcînd condiţia

$$|y^{(n)}(x)| \leq \frac{P+p}{1-q}, \quad x \in [x_1, x_2]. \quad (86)$$

Observaţie. Din (86), în baza lemei 2, rezultă următoarele evaluări:

$$|y^{(i)}(x) - R^{(i)}(x)| \leq A_{n,i} \frac{P+p}{1-q}(x_2 - x_1)^{n-i}, \quad x \in [x_1, x_2] \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1.) \quad (87)$$

IV

7. În acest paragraf vom extinde unele rezultate obţinute mai sus, la alte tipuri de probleme bilocale. Fie ν un număr întreg satisfăcînd condiţia $0 \leq \nu \leq n-2$ şi pe care îl fixăm în cele ce urmează. Considerăm în locul condiţiilor (2), următoarele condiţii

$$y(x_1) = \alpha_0, \ y'(x_1) = \alpha_1, \ldots, y^{(n-2)}(x_1) = \alpha_{n-2}, \quad (2\nu)$$
$$y^{(\nu)}(x_2) = \alpha_{n-1} \quad (x_1 < x_2),$$

unde x_1 şi x_2 sînt valori din intervalul $[a, b)$, iar $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$ sînt numere reale oarecari. Evident că dacă $\nu = n-1$, problema bilocală (2ν) se reduce la problema (2) studiată anterior. Considerăm următoarele definiţii:

DEFINIŢIA 1ν. *În ipoteza că operatorul diferenţial* L_n *din* (1) *are coeficienţii continui în intervalul* $[a, b]$, *respectiv* $[a, b]$, *vom spune că acest operator are proprietatea de interpolaţie* $\mathcal{I}_n^{(\nu)}[a, b)$, *resp.* $\mathcal{I}_n^{(\nu)}[a, b]$, *dacă oricare ar fi numerele reale* $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$, *ecuaţia diferenţială* $L_n[y] = 0$ *admite o soluţie şi una singură* $y(x)$, *satisfăcînd condiţiile* (2ν).

DEFINIŢIA 2ν. *Vom spune că operatorul* L_n *din* (1) *are proprietatea de neoscilaţie* $\mathcal{N}_n^{(\nu)}[a, b)$, *resp.* $\mathcal{N}_n^{(\nu)}[a, b]$, *dacă oricare ar fi nodurile* x_1 *şi* x_2 ($x_1 < x_2$) *din* $[a, b)$, *resp. din* $[a, b]$, *ecuaţia* $L_n[y] = 0$ *nu are nici o soluţie neidentic nulă* $y(x)$ *care să verifice condiţiile*

$$y(x_1) = y'(x_1) = \ldots = y^{(n-2)}(x_1) = 0; \quad y^{(\nu)}(x_2) = 0. \quad (4\nu)$$

Se stabilesc cu uşurinţă următoarele leme:

LEMA 1ν. *Condiţia necesară şi suficientă ca un operator* L_n *de formă* (1), *cu coeficienţi continui în* $[a, b)$, *resp.* $[a, b]$ *să aibă proprietatea* $\mathcal{I}_n^{(\nu)}[a, b)$ *resp.* $\mathcal{I}_n^{(\nu)}[a, b]$, *este ca* L_n *să aibă proprietatea* $\mathcal{N}_n^{(\nu)}[a, b)$ *respectiv* $\mathcal{N}_n^{(\nu)}[a, b]$.

Lema 2ν pe care o enunţăm mai jos, este analoagă lemei 2 de la nr. 1.

LEMA 2ν. *Dacă în intervalul* $[x_1, x_2]$ *de lungime* $h = x_2 - x_1$, *funcţia* $\varphi(x) \not\equiv 0$ *admite o derivată de ordinul* n $(n \geq 2)$ *continuă şi satisface condiţiile*

$$\varphi(x_1) = \varphi'(x_1) = \ldots = \varphi^{(n-2)}(x_1) = 0, \quad \varphi^{(\nu)}(x_2) = 0, \tag{5ν}$$

atunci au loc inegalităţile

$$|\varphi^{(i)}(x)| < A_{n,i}^{(\nu)} \cdot h^{n-i} \cdot \mu, \quad x \in [x_1, x_2), \quad i = 0, 1, \ldots, \nu - 1, \tag{6$_1\nu$}$$

$$|\varphi^{(j)}(x)| \leq A_{n,j}^{(\nu)} \cdot h^{n-j} \cdot \mu, \quad x \in [x_1, x_2], \quad j = \nu, \nu + 1, \ldots, n - 1, \tag{6$_2\nu$}$$

unde $\mu = \max\limits_{[x_1, x_2]} |\varphi^{(n)}(x)|$ *şi unde*

$$A_{n,i}^{(\nu)} = \frac{\nu - i}{(n-i)!\,(n-\nu)}, \quad i = 0, 1, \ldots, \nu - 1, \tag{7$_1\nu$}$$

$$A_{n,\nu}^{(\nu)} = \frac{(n-\nu-1)^{n-\nu-1}}{(n-\nu)!\,(n-\nu)^{n-\nu}}, \tag{7$_2\nu$}$$

$$A_{n,j}^{(\nu)} = \frac{1}{(n-j)!}, \quad j = \nu + 1, \ldots, n - 1. \tag{7$_3\nu$}$$

În vederea stabilirii inegalităţilor $(6_1\nu)$, se procedează la fel ca în demonstrarea lemei 2 de la nr. 1. Se obţine întocmai ca acolo, formula de medie

$$\frac{d^i\varphi(x)}{dx^i} = \frac{d^i P_{n,\nu}(x)}{dx^i} \cdot \left(\frac{d^n\varphi(x)}{dx^n}\right)_{x=\xi}, \quad \xi \in (x_1, x_2), \tag{13ν}$$

valabilă pentru $x \in [x_1, x_2]$, $i = 0, \ldots, \nu - 1$. În această formulă $P_{n,\nu}(x)$ reprezintă polinomul de gradul n, care verifică condiţiile

$$\left.\begin{aligned} P_{n,\nu}(x_1) = P'_{n,\nu}(x_1) = \ldots = P_{n,\nu}^{(n-2)}(x_1) = 0, \quad P_{n,\nu}^{(\nu)}(x_2) = 0, \\ P_{n,\nu}^{(n)}(x) \equiv 1 \end{aligned}\right\} \tag{8ν}$$

şi care, după cum se constată uşor, are expresia

$$P_{n,\nu}(x) = \frac{1}{n!}(x - x_1)^{n-1}\left[x - \frac{nx_2 - \nu x_1}{n - \nu}\right]. \tag{10}$$

Notînd $h = x_2 - x_1$, se obţine întocmai ca în cazul lemei 2, inegalitatea strictă

$$\left|\frac{d^i P_{n,\nu}}{dx^i}\right| < \frac{\nu - i}{(n-i)!\,(n-\nu)} \cdot h^{n-i}, \quad x \in [x_1, x_2),$$

de unde, ţinînd seamă de (13ν), se obţin inegalităţile $(6_1\nu)$.

Inegalităţile $(6_2\nu)$ rezultă din delimitările date de G. A. Bessmertnîh şi A. Iu. Levin în lucrarea [3].

Cu ajutorul lemei 2 se stabilesc următoarele teoreme:

TEOREMA 1ν. *Fie dat operatorul diferenţial* L_n *din* (1), *avînd coeficienţii continui în intervalul* $[a, b)$ *şi fie* h_0 *rădăcina din intervalul* $(0, b - a)$ *a ecuaţiei în necunoscuta* h:

$$A_{n,0}^{(\nu)} \cdot m_n(h) \cdot h^n + A_{n,1}^{(\nu)} \cdot m_{n-1}(h) \cdot h^{n-1} + \ldots + A_{n,n-1}^{(\nu)} \cdot m_1(h) \cdot h - 1 = 0, \tag{16ν}$$

unde $A_{n,i}^{(\nu)}$ *reprezintă constantele din* $(7_1\nu)$ — $(7_3\nu)$ *şi unde* $m_i(h)$ *sînt funcţiile definite în* (15). *În cazul cînd ecuaţia* (16ν) *nu are rădăcini în* $(0, b - a)$, *se va considera* $h_0 = b - a$. *Atunci operatorul* L_n *are proprietatea* $\mathcal{I}_n^{(\nu)}[a, a + h_0)$ (deci şi proprietatea $\mathcal{H}_n^{(\nu)}[a, a + h_0)$).

Demonstraţia acestei teoreme se face întocmai ca şi demonstraţia teoremei 1.

Teoremele 6 şi 7 se menţin de asemenea adevărate, dacă în enunţurile lor se înlocuiesc condiţiile (66) cu condiţiile (2ν) şi dacă se înlocuiesc constantele $A_{n,i}$ din (7), cu $A_{n,i}^{(\nu)}$ din $(7_1\nu)$ — $(7_3\nu)$.

În vederea relativizării însă a teoremelor 2—5, vom presupune, referitor la ecuaţia diferenţială (1), că în intervalul $[a, b)$, $p_1(x) \equiv \ldots \equiv p_{n-\nu-1}(x) \equiv 0$ şi deci că ecuaţia (1) are forma

$$L_n^{(\nu)}[y] = y^{(n)} + p_{n-\nu}(x)\, y^{(\nu)} + p_{n-\nu+1}(x)\, y^{(\nu-1)} + \ldots + p_n(x)\, y = 0, \tag{1ν}$$

numărul ν fiind precizat la începutul acestui paragraf. Cu această particularizare, refăcînd raţionamentele utilizate în § 3 — § 6, se constată că lema 4, precum şi teoremele 2—5, se menţin adevărate, dacă peste tot se înlocuieşte operatorul L_n cu $L_n^{(\nu)}$, proprietatea $\mathcal{I}_n$, resp. $\mathcal{H}_n^{(\nu)}$ cu $\mathcal{I}_n^{(\nu)}$, resp. $\mathcal{H}_n^{(\nu)}$ şi de asemenea dacă se mai fac următoarele modificări:

1. Numărul ρ care figurează în enunţul teoremei 2 se înlocuieşte cu numărul $\rho^{(\nu)}$ reprezentînd cea mai mică rădăcină pozitivă a ecuaţiei $\frac{d^\nu}{dx^\nu}\eta^*(x) = 0$, unde $\eta^*(x)$ reprezintă soluţia ecuaţiei diferenţiale cu coeficienţi constanţi

$$L^{(\nu)*}[y] = y^{(n)} + M_{n-\nu} y^{(\nu)} + \ldots + M_n y = 0, \tag{42ν}$$

satisfăcînd condiţiile

$$\eta^*(0) = \eta^{*\prime}(0) = \ldots = \eta^{*(n-2)}(0) = 0, \quad \eta^{*(n-1)}(0) = 1.$$

2. Mulţimile $\mathcal{L}_n$, $\mathcal{L}_n^*$ şi $\mathcal{H}[L^n]$, care figurează în enunţul teoremei 3, se vor înlocui cu mulţimile $\mathcal{L}_n^{(\nu)}$, $\mathcal{L}^{(\nu)*}$ şi $\mathcal{H}^{(\nu)}[L_n^{(\nu)}]$ definite precum urmează: $\mathcal{L}_n$, resp. $\mathcal{L}_n^{(\nu)*}$ reprezintă mulţimea tuturor operatorilor diferenţiali, de forma (1ν), avînd coeficienţii continui, resp. constanţi în $[a, b)$.

Fie L_n un operator diferenţial de forma (1). Prin $\mathscr{H}^{(\nu)}[L_n]$ vom înţelege mulţimea numerelor h $(0 < h < b - a)$, caracterizată prin următoarele proprietăţi :

1°. Dacă $h \in \mathscr{H}^{(\nu)}[L_n]$, atunci ecuaţia diferenţială corespunzătoare $L_n[y] = 0$ are cel puţin o soluţie neidentic nulă $y(x)$, care verifică condiţiile

$$y(a) = y'(a) = \ldots = y^{(n-2)}(a) = 0, \quad y^{(\nu)}(a + h) = 0. \tag{43ν}$$

2°. Dacă $y(x)$ este o soluţie neidentic nulă a ecuaţiei $L_n[y] = 0$, verificînd condiţiile (43ν), în care h este astfel încît $0 < h < b - a$, atunci $h \in \mathscr{H}^{(\nu)}[L_n]$.

3. Noţiunea de sistem admisibil de coeficienţi în raport cu proprietatea $\mathscr{N}_n$, noţiune care intervine în enunţul teoremei 4 precum şi al lemei 5, se relativizează în raport cu proprietatea $\mathscr{N}_n^{(\nu)}$, ţinînd seamă de definiţia 3.

Observaţie. Fiind dat un operator diferenţial L_n de forma (1), fie $K(x,\alpha)$ funcţia lui Cauchy asociată acestui operator. Analog afirmaţiei lemei 3, se constată cu uşurinţă că proprietatea $\mathscr{N}_n^{(\nu)}[a, b)$ a operatorului L_n este echivalentă cu inegalitatea $\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} K(x, \alpha) > 0$ pentru orice punct (x, α) aparţinînd domeniului D : $a \leq \alpha < x < b$. Conform unui rezultat obţinut de N. A. Kaşceev [4], îndeplinirea acestei inegalităţi în domeniul D constituie condiţia necesară şi suficientă de aplicabilitate a teoremei inegalităţilor diferenţiale ,,de ordinul ν'', în sensul lui N. V. Azbelev [1]. Astfel, afirmaţiile teoremelor 1ν — 4ν, precum şi afirmaţia lemei 4ν ne furnizează informaţii referitoare la aplicabilitatea teoremei inegalităţilor diferenţiale, de ordinul ν, în cazul operatorilor diferenţiali liniari, de forma (1), respectiv (1ν).

ЗАДАЧА ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ С РЕШЕНИЯМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Пусть $L_n[y] = 0$ линейное и однородное дифференциальное уравнение порядка n, вида (1), с непрерывными коэффициентами на интервале $[a, b)$. Говорим, что оператор L_n обладает свойством интерполяции $\mathscr{I}_n[a, b)$, если какими ни выбрали бы узлы $x_1, x_2 \in [a, b)$ $(x_1 < x_2)$ и какими ни выбрали бы действительные числа $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$, уравнение $L_n[y] = 0$ допускает единственное решение для сделанного выбора, удовлетворяющее условиям (2). Свойство $\mathscr{I}_n[a, b)$ равносильно со следующим свойством неколеблемости, которое обозначается через $\mathscr{N}_n[a, b)$:

каким образом не выбрали бы узлы x_1 $x_2 \in [a, b)$, $(x_1 < x_2)$, уравнение $L_n[y] = 0$ не допускает ни одного решения нетождественно равного нулю $y(x)$, которое удовлетворяло бы условиям (4). Согласно результату из [4], удовлетворение этому свойству является необходимым и достаточным условием применимости теоремы дифференциальных неравенств ,,порядка $n - 1$'', С. А. Чаплыгина (смотри труд [1]).

В настоящем труде достигаются следующие результаты:

ТЕОРЕМА 1. *Оператор L_n обладает свойством $\mathscr{I}_n[a, a + h_0)$, причем h_0 является корнем из интервала $(0, b - a)$ уравнения (16) с неизвестной h, где $A_{n,i}$ -постоянные, определенные в (7), а $m_i(h)$ являются функциями от h, даннымми выражениями (15).*

ТЕОРЕМА 2. *При предположение что коэффициенты оператора L_n непрерывны и ограничены на интервале $[a, b)$, рассматривается оператор сравнения L_n^*, с выражением (42), где коэффициенты M_i являются постоянными, удовлетворяя соотношениям (41). Пусть ρ наименьший положительный корень уравнения $\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} K^*(x, 0) = 0$, где $K^*(x, \alpha)$ представляет собой функцию Коши, присоединенную оператору L_n^*. При этих предположениях, оператор L_n обладает свойством $\mathscr{I}_n[a, a + H)$, где $H = \min\{\rho, b - a\}$.*

Далее, пусть $\mathscr{H}[L_n]$, множество чисел h $(0 < h < b - a)$, определяемое следующим образом:

1°. Если $h \in \mathscr{H}[L_n]$, то уравнение $L_n[y] = 0$ имеет по крайней мере одно нетождественно равное нулю решение $y(x)$, которое удовлетворяет условиям (43). 2°. Если $y(x)$ является нетождественно равным нулю решением уравнения $L_n[y] = 0$, удовлетворяющим условиям (43), где $0 < h < b - a$, то $h \in \mathscr{H}[L_n]$.

Пусть $\mathscr{L}_n$ множество всех дифференциальных операторов вида (1), с непрерывными коэффициентами на $[a, b)$, а $\mathscr{L}^*$-подмножество операторов из $\mathscr{L}_n$, с постоянными коэфициентами на $[a, b)$. Рассматривается неравенство (46), где $m_i(h; L_n)$ даются соотношениями (45), а a_i являются неотрицательными постоянными. Автор стремится установить все системы чисел $\{a_1, \ldots, a_n\}$, так, чтобы неравенство (46) было удовлетворено для любых $h \in \mathscr{H}[L_n]$, какой не был бы $L_n \in \mathscr{L}_n$. Получается:

ТЕОРЕМА 3. *Необходимым и достаточным условием для того, чтобы система чисел $\{a_1, \ldots, a_n\}$ удовлетворяла неравенству (46) для любых $L_n \in \mathscr{L}_n$ и для любых $h \in \mathscr{H}[L_n]$, является то, чтобы эта система удовлетворяла условиям (46) для любого оператора $L_n^* \in \mathscr{L}_n^*$ и для любого $h \in \mathscr{H}[L_n^*]$.*

Систему чисел $\{a_1, \ldots, a_n\}$ удовлетворяющих условиям теоремы 3 мы называем *допустимой системой*. Легко убедиться втом, что такая система не зависит от интервала $[a, b)$, а только от числа n и от типа рассматриваемой задачи интерполирования. Автор показывает, что множество всех допустимых систем, относительно свойства $\mathcal{J}_n$ образует в пространстве переменных $a_1, \ldots, a_n$ выпуклую область, граничные точки которой дают нам в некотором смысле *оптимальные* допустимые системы. Показывается ещё, что задача определения всех допустимых систем относительно свойства $\mathcal{J}_n$ сводится к определению экстремальных значений действительной функции от n комплексных переменных.

Теоремы 5, 6, 7 касаются существования и единичности решения двухместной задачи (65), (66), относительно нелинейных дхфференциальных уравнений. Например, получается:

ТЕОРЕМА 5. *Предполагаем что*: 1°. *функция* $f(x, y_0, \ldots, y_{n-1})$ *непрерывна относительно* $x \in [x_1, x_2]$ *и относительно переменных* $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$, *удовлетворяет условию* (67), *где* $P_i(x)$ *непрерывные и неотрицательные на* $[x_1, x_2]$ *функции, так, чтобы имело место соотношение* (68). 2°. *Оператор* L_n *из* (69) *обладает свойством неколеблемости* $\mathcal{N}_n[x_1, x_2]$. *При таких условиях, уравнение* (65) *может допукать толко одно решение, удовлетворяющее условиям* (66).

В §7 обобщаются все эти результаты для того случая, когда вместо условий интерполяции (2), имеются в виду условия (2ν), где ν целое число удовлетворяющее неравенствам $0 \leq \nu \leq n-2$.

UN PROBLÈME D'INTERPOLATION LACUNAIRE AVEC DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

RÉSUMÉ

Soit $L_n[y] = 0$ une équation différentielle linéaire et homogène d'ordre n, de la forme (1), ayant les coefficients continus dans un intervalle $[a, b)$. On dit que l'opérateur L_n possède la propriété d'interpolation $\mathcal{J}_n[a, b)$, lorsque, quel que soit le choix des noeuds $x_1, x_2 \in [a, b)$ $(x_1 < x_2)$ et quel que soit le choix des nombres réels $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$, l'équation $L_n[y] = 0$ admet une solution et une seule pour le choix opéré, vérifiant les conditions (2). La propriété $\mathcal{J}_n[a, b)$ est équivalente à la propriété suivante de non oscillation que l'on note par $\mathcal{N}_n[a, b)$: quel que soit le choix des noeuds $x_1, x_2 \in [a, b)$, $(x_1 < x_2)$, l'équation $L_n[y] = 0$ n'admet aucune solution non identiquement nulle $y(x)$ qui satisfasse aux conditions (4). Conformément à un résultat de [4], l'existence de cette propriété constitue la condition nécessaire et suffisante pour que le théorème des inégalités différentielles ,,d'ordre $n - 1$'' de S. A. Tchaplyguine soit applicable (consulter le travail [1]).

Dans le présent travail on obtient les résultats suivants :

THÉORÈME 1. *L'opérateur* L_n *possède la propriété* $\mathcal{J}_n[a, a + h_0)$, *le nombre* h_0 *représentant la racine de l'intervalle* $(0, b - a)$ *de l'équation dans l'inconnue* h, (16), *où* $A_{n,i}$ *sont les constantes définies dans* (7), *et* $m_i(h)$ *sont des fonctions de* h, *ayant les expressions* (15).

THÉORÈME 2. *Dans l'hypothèse que les coefficients de l'opérateur* L_n *sont continus et bornés dans l'intervalle* $[a, b]$, *on considère l'opérateur de comparaison* L_n^*, *ayant l'expression* (42), *où les coefficients* M_i *sont constantes qui vérifient les relations* (41). *Soit* ρ *la plus petite racine positive de l'équation* $\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} K^*(x, 0) = 0$, *où* $K^*(x, \alpha)$ *représente la fonction de Cauchy associée à l'opérateur* L_n^*. *Dans ces hypothèses, l'opérateur* L_n *possède la propriété* $\mathcal{J}_n[a, a + H)$, *où* $H = \min\{\rho, b - a\}$.

Soit encore $\mathcal{H}[L_n]$ l'ensemble des nombres h $(0 < h < b - a)$, défini de la sorte : 1°. Si $h \in \mathcal{H}[L_n]$, alors l'équation $L_n[y] = 0$ a au moins une solution non identiquement nulle $y(x)$, qui satisfait aux conditions (43). 2°. Si $y(x)$ est une solution non identiquement nulle de l'équation $L_n[y] = 0$, satisfaisant aux conditions (43) où $0 < h < b - a$, alors $h \in \mathcal{H}[L_n]$. Soit $\mathcal{L}_n$ l'ensemble de tous les opérateurs différentiels de la forme (1), aux coefficients continus dans $[a, b)$, et $\mathcal{L}_n^*$ le sous-ensemble des opérateurs de $\mathcal{L}_n$, qui ont les coefficients constants dans $[a, b)$. On considère l'inégalité (46), où $m_i(h; L_n)$ sont donnés par les relations (45), et a_i sont des constantes non négatives. On cherche à déterminer tous les systèmes de nombres $\{a_1, \ldots, a_n\}$, tels que l'inégalité (46) soit vérifiée pour tout $h \in \mathcal{H}[L_n]$, quel que soit $L_n \in \mathcal{L}_n$. On obtient le théorème suivant :

THÉORÈME 3. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un système de nombres* $\{a_1, \ldots, a_n\}$ *satisfasse à l'inégalité* (46) *pour tout* $L_n \in \mathcal{L}_n$ *et pour tout* $h \in \mathcal{H}[L_n]$, *est que ce système satisfasse à l'inégalité* (46) *pour n'importe quel opérateur* $L_n^* \in \mathcal{L}^*$ *et pour n'importe quel* $h \in \mathcal{H}[L_n^*]$.

Nous appelons *système admissible*, un système de nombres $\{a_1, \ldots, a_n\}$ qui vérifie les conditions du théorème 3. On constate aisément qu'un tel système ne dépend pas de l'intervalle $[a, b)$, mais seulement du nombre n et du type du problème d'interpolation considéré. On montre que l'ensemble de tous les systèmes admissibles concernant la propriété $\mathcal{J}_n$ forme dans l'espace des variables $a_1, \ldots, a_n$ un domaine convexe, dont les points-frontière fournissent les systèmes admissibles *optimaux*. On montre aussi que le problème de la détermination de tous les systèmes admissibles concernant la propriété $\mathcal{J}_n$ revient à trouver les extrêmes d'une fonction réelle de n variables complexes.

Les théorèmes 5, 6, 7 se réfèrent à l'existence et à l'unicité de la solution du problème bilocal (65), (66) concernant des équations différentielles non linéaires. On obtient par exemple le théorème suivant :

THÉORÈME 5. *Supposons que* : 1°. *La fonction* $f(x, y_0, \ldots, y_{n-1})$ *est continue par rapport à* $x \in [x_1, x_2]$ *et satisfait par rapport aux variables* $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ *à la condition* (67), *où* $P_i(x)$ *représente des fonctions continues et non négatives dans* $[x_1, x_2]$, *telle que la relation* (68) *ait lieu.* 2°. *L'opérateur* L_n *de* (69) *possède la propriété de non oscillation* $\mathcal{N}_n[x_1, x_2]$. *Dans ces conditions, l'équation* (65) *ne peut admettre qu'une solution au plus, satisfaisant aux conditions* (66).

Au § 7 on étend tous ces résultats au cas où, au lieu des conditions d'interpolation (2), on considère les conditions (2ν), où ν représente un nombre entier satisfaisant aux inégalités $0 \leq \nu \leq n-2$.

BIBLIOGRAFIE

1. Азбелев Н. В., *О границах применимости теоремы С. А. Чаплыгина.* Доклады Акад. Наук СССР, **89**, *4*, 589—591 (1953).
2. Бернштейн С. Н., *О некоторых свойствах циклически монотонных функций.* Изв. Акад. Наук СССР, Серия мат., **14**, 381—404 (1950).
3. Бессмертных Г. А., Левин А. Ю., *О некоторых оценках дифференцируемых функций одной переменной.* Доклады Акад. Наук СССР, **144**, *3*, 471—474 (1952).
4. Кащеев Н. А., *Точная граница применимости теоремы С. А. Чаплыгина для линейного уравнения.* Доклады Акад. Наук СССР, **111**, *5*, 937—940 (1956).
5. Lasota A., Opial Z., *L'application du principe de Pontriaguine à l'évaluation de l'intervalle d'existence et d'unicité des solutions d'un problème aux limites.* Bull. de l'Acad. Polon. des Sci., Ser. des sci. math, a tr. et phys., XI, *2*, 41—46 (1963).
6. Левин А. Ю., *О некоторых оценках дифференцируемой функции.* Доклады Акад. Наук СССР, **138**, *1*, 37—38 (1961)
7. Opial Z., *Sur une inegalité de Ch. de la Vallée Poussin dans la théorie de l'équation différentielle linéaire du second ordre.* Annales Polonici Mathem., **6**. 87—91 (1959).
8. Reid J., *A comparaison theorem for selfadjoint differential eqations of second order.* Annals of Math., **65**, *1*, 197—212 (1957).
9. Ripianu D., *Asupra inegalității lui De la Vallée Poussin în cazul ecuațiilor diferențiale de ordinul al doilea.* Studii și cercet. de matem. (Cluj), XIV, *1*, (1963).
10. — *O problemă de minimum din teoria interpolării.* Studii și cercet. de matem. (Cluj), XIV, *2*, (1963).
11. Sansone G., *Equazioni differenziali nel campo reale* (parte prima), Bologna, 1948.
12. Vallée Poussin Ch. J. (de la), *Sur l'équation diff rentielle du second ordre. Détermination d'une int grale par deux valeurs assig ées. Extension aux équations d'ordre n.* Journ. de math. pures et appl., **8** (9), 125—144 (1929).

Primit la 11. IV. 1963.