

Poziția planului (π') față de planul (π) depinde de 3 parametri; are în general 3 grade de libertate. Punînd condiția ca un punct $P_{4,5}$ din cîmpul (z_4, z_5) să coincidă cu un punct M'_1 de pe curba C'_1 , realizăm un contact de poziție care micșorează cu 2 unități numărul gradelor de libertate, iar condiția ca dreapta D' din planul (π') să fie paralelă cu dreapta (D) din planul (π) micșorează cu încă o unitate numărul gradelor de libertate. Așadar, contactele de poziție ale planului (π'), față de planul (π), sînt:

$$M'_1 \equiv P_{4,5}; \quad D' \parallel D \quad (3)$$

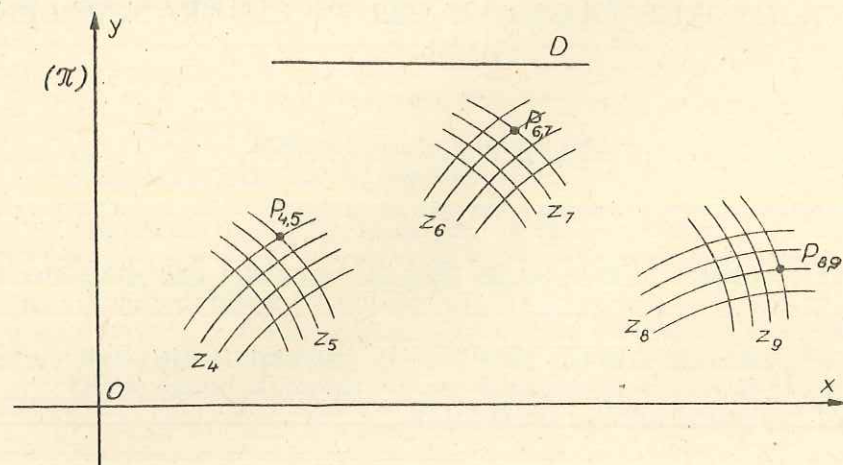


Fig. 1

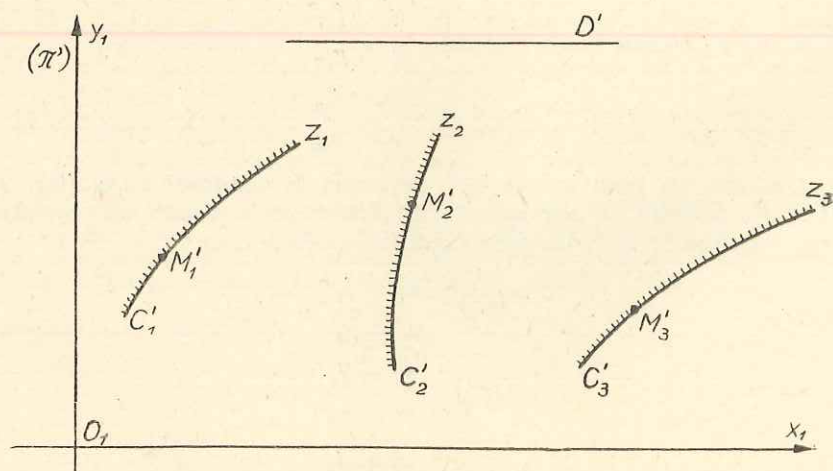


Fig. 2

Contactele de rezolvare sînt în acest caz date de

$$M'_2 \equiv P_{6,7}; \quad M'_3 \equiv P_{8,9} \quad (4)$$

Exprimînd analitic cele 3 contacte, se găsește sistemul de ecuații cu 9 variabile ce poate fi rezolvat cu o asemenea nomogramă, sub forma:

$$\begin{aligned} f_1 - f_{45} &= f_2 - f_{67} = f_3 - f_{89} \\ g_1 - g_{45} &= g_2 - g_{67} = g_3 - g_{89}. \end{aligned} \quad (5)$$

Așadar, un sistem de ecuații ce conține 9 variabile, care poate fi pus sub forma (5), se poate rezolva cu o nomogramă cu transparent orientat de forma indicată în fig. 1 și fig. 2.

În cazul cînd în planul (π) cîmpurile binare sînt înlocuite cu scări (fig. 3 și fig. 4) ale căror suport au ecuațiile:

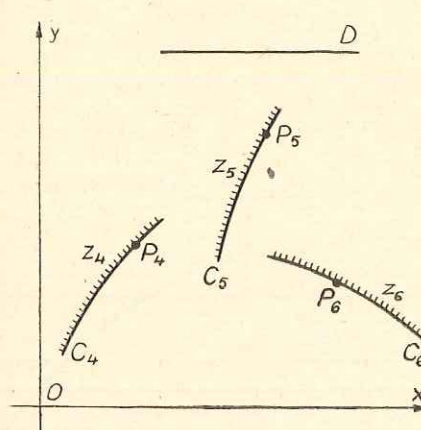


Fig. 3

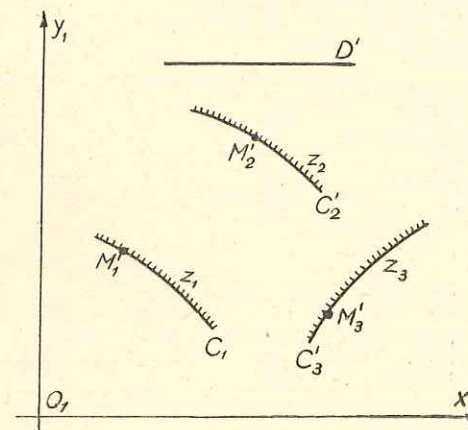


Fig. 4

$(C_4) \quad x = f_4$	$(C'_1) \quad x_1 = f_1$	(6)
$y = g_4$	$y_1 = g_1$	
$(C_5) \quad x = f_5$	$(C'_2) \quad x_1 = f_2$	
$y = g_5$	$y_1 = g_2$	
$(C_6) \quad x = f_6$	$(C'_3) \quad x_1 = f_3$	
$y = g_6$	$y_1 = g_3$	

atunci o asemenea nomogramă rezolvă un sistem de ecuații cu 6 necunoscute, care poate fi pus sub forma

$$\begin{aligned} f_1 - f_4 &= f_2 - f_5 = f_3 - f_6 \\ g_1 - g_4 &= g_2 - g_5 = g_3 - g_6. \end{aligned} \quad (7)$$

În continuare ne vom ocupa mai îndeaproape de sistemele de ecuații cu 4 necunoscute, mai des întâlnite în tehnică. Dacă un asemenea sistem poate fi pus sub forma

$$\begin{aligned} f_3 - f_1 &= f_4 - f_2 \\ g_3 - g_1 &= g_4 - g_2 \end{aligned} \quad (8)$$

atunci acest sistem poate fi rezolvat cu o nomogramă cu transparent orientat, unde în planul fix (π) se trasează scările variabilelor z_1 și z_2 (fig. 5) cu suporturile (C_1) și (C_2), care au ecuațiile

$$\begin{aligned} (C_1) \quad x &= f_1 \\ y &= g_1 \end{aligned} \quad \begin{aligned} (C_2) \quad x &= f_2 \\ y &= g_2 \end{aligned} \quad (9)$$

iar în planul mobil (π') se trasează scările variabilelor z_3 și z_4 (fig. 6) suporturile

$$\begin{aligned} (C_3) \quad x_1 &= f_3 \\ y_1 &= g_3 \end{aligned} \quad \begin{aligned} (C_4) \quad x_1 &= f_4 \\ y_1 &= g_4 \end{aligned} \quad (10)$$

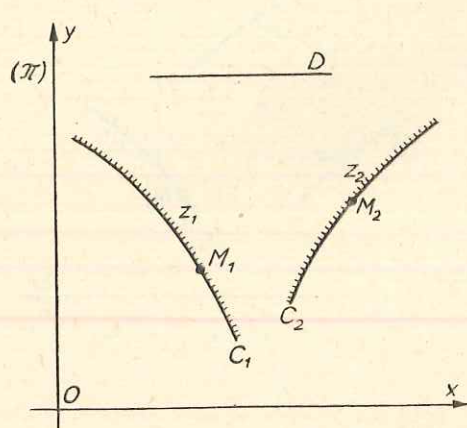


Fig. 5

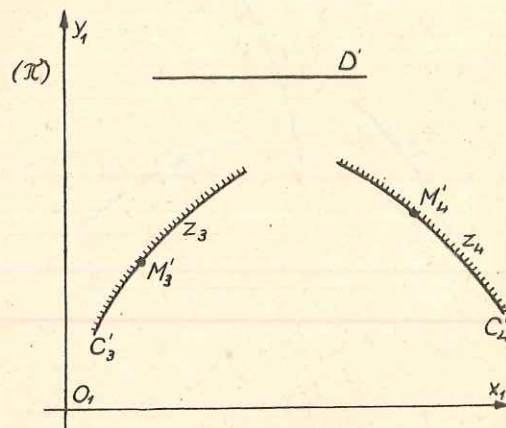


Fig. 6

Contactele de poziție sînt realizate în acest caz prin condiția de paralelism a dreptei (D') din planul (π') cu dreapta (D) din planul (π) și prin condiția ca un punct M'_3 de pe curba (C'_3) să fie în contact cu un punct M_1 de pe curba (C_1)

$$M'_3 \equiv M_1,$$

iar contactul de rezolvare este dat deci de

$$M'_4 \equiv M_4.$$

Într-un articol [6], D. G. L a p t e v a își propune să rezolve sistemul

$$\begin{aligned} f_2(v) &= f_1(u) + f_3(w) \\ f_2(v) &= \varphi_1(u) + f_4(t) \end{aligned} \quad (11)$$

cu ajutorul unei nomograme cu contact de tangentă cu o singură aliniere. Noi reluăm acest sistem și arătăm că împreună cu o clasă mai largă de sisteme admite de asemenea o reprezentare simplă cu ajutorul nomogramei cu transparent orientat indicată mai sus.

Pentru aceasta, scriem sistemul (11) sub forma (8) și avem:

$$\begin{aligned} f_3 + f_1 &= 0 + f_2 \\ 0 - \varphi_1 &= f_4 - f_2 \end{aligned}$$

cu suportul scării pentru variabila (u) dat de ecuațiile

$$\begin{aligned} (u) \quad x &= -f_1 \\ y &= \varphi_1 \end{aligned}$$

iar pentru variabila (v) de ecuațiile

$$\begin{aligned} (v) \quad x &= -f_2 \\ y &= f_2 \end{aligned}$$

ambele variabile fiind reprezentate în planul fix (π) (fig. 7).

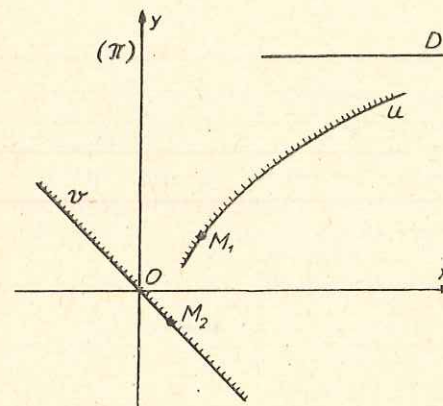


Fig. 7.

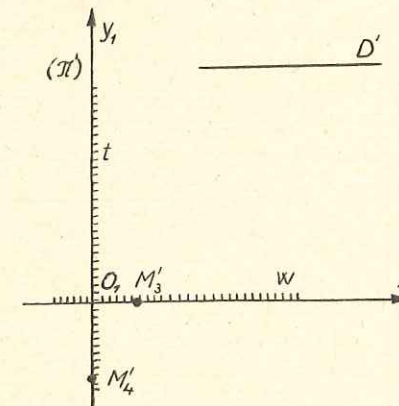


Fig. 8

Observăm că scara variabilei (u) se află pe o curbă, iar scara variabilei (v) pe bisectoarea a 2-a a sistemului oxy . Analog, în planul (π') avem pentru variabilele (w) și (t) scările ale căror suport are ecuațiile

$$\begin{aligned} (w) \quad x_1 &= f_3 \\ y_1 &= 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} (t) \quad x_1 &= 0 \\ y_1 &= f_4 \end{aligned}$$

adică sînt tocmai axele de coordonate (fig. 8).

Contactul de poziție este realizat de

$$M'_3 \equiv M_1; \quad D' \parallel D,$$

iar contactul de rezolvare este

$$M'_4 \equiv M_2.$$

Cu alte cuvinte, fiind date valorile variabilelor u și w , se pot găsi valorile corespunzătoare ale variabilelor v și t .

Pentru evitarea erorilor de contact și citire a rezultatului, este necesar ca scările corespunzătoare să se taie sub unghiuri mai mari ca 20° . În acest scop se aplică celor 2 plane (π) și (π') o transformare afină, definită de relațiile

$$\begin{aligned} x &= a_0 + \mu_x(\delta_x \varphi_1 - f_1) \\ y &= b_0 + \mu_y(\varphi_1 - \delta_y f_1) \\ x &= a_0 + a + \mu_x(\delta_x f_2 - f_2) \\ y &= b_0 + b + \mu_y(f_2 - \delta_y f_2) \end{aligned} \quad (12)$$

pentru planul (π) și

$$\begin{aligned} x_1 &= a'_0 + \mu_x f_3 \\ y_1 &= b'_0 + \mu_y \delta_y f_3 \\ x_1 &= a'_0 + a + \mu_x \delta_x f_4 \\ y_1 &= b'_0 + b + \mu_y f_4 \end{aligned} \quad (13)$$

pentru planul (π') , în care parametrii ce apar în aceste relații se determină în funcție de datele problemei respective, în așa fel ca noile scări, scările suporturilor transformate, să fie cât mai simple și precise în utilizare. În acest fel reprezentăm cele 2 plane cu scările respective în afara oricărui sistem de referință, deoarece acesta poate fi ales, pentru fiecare problemă aparte, în funcție de transformările (12) și (13) și avem fig. 9 și fig. 10.

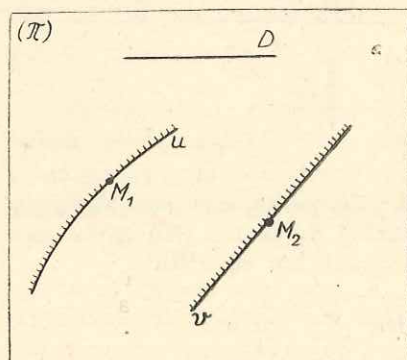


Fig. 9

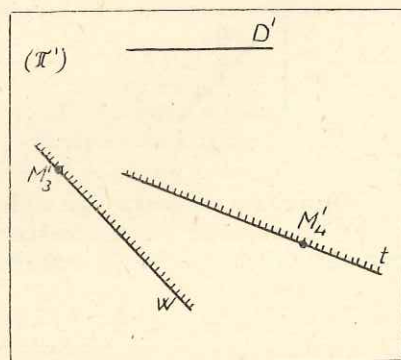


Fig. 10

Dacă sistemul (11) îl generalizăm sub forma

$$\begin{aligned} f_2(v) &= f_1(u) + f_3(w) \\ \varphi_2(v) &= \varphi_1(u) + f_4(t), \end{aligned} \quad (14)$$

atunci este evident faptul că nomograma acestui sistem se obține din nomograma sistemului (11) (fig. 9 și 10) prin înlocuirea scării variabilei (v) ce avea suportul rectiliniu, printr-o scară cu suport curbiliniu, ale cărei ecuații sînt: (fig. 11 și 12):

$$x = -f_2; \quad y = \varphi_2$$

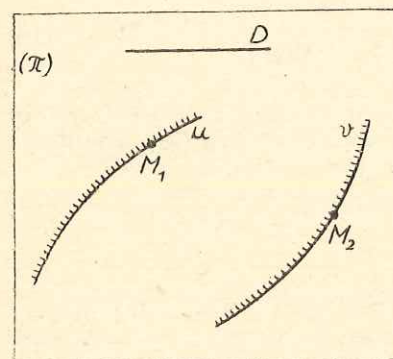


Fig. 11

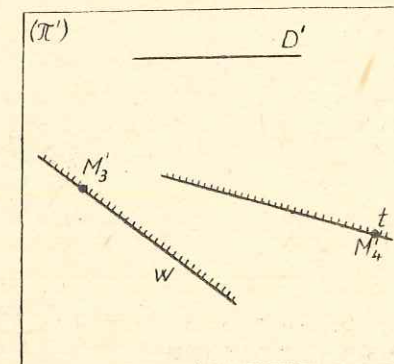


Fig. 12

În fine, sistemul

$$\begin{aligned} f_2(v) &= f_1(u) \cdot f_3(w) \\ \varphi_2(v) &= \varphi_1(u) \cdot f_4(t) \end{aligned} \quad (15)$$

prin aplicarea logaritmilor este transformat în sistemul

$$\begin{aligned} \log f_2(v) &= \log f_1(u) + \log f_3(w) \\ \log \varphi_2(v) &= \log \varphi_1(u) + \log f_4(t) \end{aligned} \quad (16)$$

care este evident de forma (14). În acest caz în planul fix (π) avem scările variabilelor u și v ale căror suporturi au ecuațiile

$$\begin{aligned} (u) \quad x &= -\log f_1 \\ x &= \log \varphi_1 \end{aligned} \quad \begin{aligned} (v) \quad x &= -\log f_2 \\ y &= \log \varphi_2 \end{aligned}$$

iar în planul (π') scările variabilelor w și t , ale căror suporturi au ecuațiile

$$\begin{aligned} (w) \quad x_1 &= \log f_3 \\ y_1 &= 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} (t) \quad x_1 &= 0 \\ y_1 &= \log f_4 \end{aligned}$$

Observăm că aceste scări au suporturi analoge cu cele ale nomogramei sistemului (14).

Transformările afine (12) și (13) efectuate asupra planului (π), respectiv (π') devin în acest caz

$$\begin{aligned} x &= a_0 + \mu_x(\delta_x \log \varphi_1 - \log f_1) \\ y &= b_0 + \mu_y(\log \varphi_1 - \delta_y \log f_1) \\ x &= a_0 + a + \mu_x(\delta_x \log f_2 - \log f_2) \\ y &= b_0 + b + \mu_y(\log \varphi_2 - \delta_y \log \varphi_2) \end{aligned} \quad (17)$$

pentru planul (π) și

$$\begin{aligned} x_1 &= a'_0 + \mu_x \log f_3; & x_1 &= a'_0 + a + \mu_x \delta_x \log f_4 \\ y_1 &= b'_0 + \mu_y \delta_y \log f_2; & y_1 &= b'_0 + b + \mu_y \log f_4 \end{aligned} \quad (18)$$

pentru planul (π'), în care parametrii ce apar în aceste transformări se determină pentru fiecare problemă dată, în așa fel ca scările variabilelor u și w , respectiv v și t , să se taie sub un unghi mai mare ca 20° .

Să ne fixăm acum atenția asupra sistemului

$$\begin{aligned} f_2(v) &= f_1(u) + f_3(w) \\ \varphi_2(v) &= f_1(u)f_4(t) + g_4(t) \end{aligned} \quad (19)$$

în care a doua ecuație din sistem este ecuația lui Cauchy. Scriind acest sistem sub forma

$$\begin{aligned} f_2 - 0 &= f_1 + f_3 \\ \varphi_2 - 0 &= f_1 f_4 + g_4 + 0 \end{aligned} \quad (20)$$

observăm că se poate rezolva de asemenea cu o nomogramă cu transparent orientat, în care în planul fix (π) avem pentru variabila v o scară al cărei suport are ecuațiile parametrice

$$\begin{aligned} (v) \quad x &= f_2 \\ y &= \varphi_2 \end{aligned}$$

ar pentru variabilele u și t un câmp binar, exprimat analitic de ecuațiile

$$\begin{aligned} (u, t) \quad x &= f_1 \\ y &= f_1 f_4 + g_4 \end{aligned}$$

adică două familii de drepte, una paralelă cu axa oy , pentru variabila u , iar cealaltă, pentru t , o familie de drepte oarecare (f.g. 13). În planul mobil (π') avem un punct fix, originea și scara variabilei (w), al cărei suport are ecuațiile parametrice (fig. 14)

$$\begin{aligned} (w) \quad x_1 &= f_3 \\ y_1 &= 0. \end{aligned}$$

Desigur că și în acest caz, printr-o transformare afină, convenabil aleasă, poziția scărilor și a câmpului binar poate fi astfel determinată, încât scările corespunzătoare să se taie sub unghiuri mai mari de 20° .

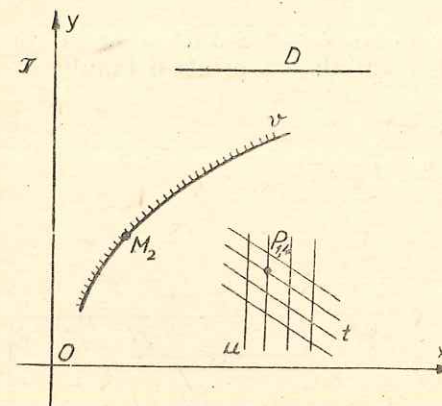


Fig. 13

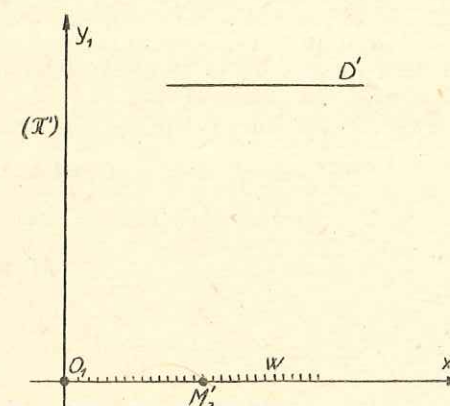


Fig. 14

Contactul de poziție se determină dându-se o valoare a variabilei v și punând condiția ca punctul M_2 , corespunzător acestei valori, să coincidă cu punctul fix O_1 din planul mobil — și prin paralelismul dreptei D' cu dreapta D .

$$O_1 \equiv M_2; \quad D' \parallel D.$$

În acest caz scara variabilei w se va întretaia cu câmpul (u, t), realizând contactul de rezolvare

$$M'_3 \equiv P_{1,4}.$$

Cu alte cuvinte, dându-se variabila v și una dintre variabilele u, w, t se pot găsi celelalte două.

Dacă sistemul (19) ia forma particulară

$$\begin{aligned} f_2(v) &= f_1(u) + f_3(w) \\ \varphi_2(v) &= f_1(u) \cdot f_4(t) + g_4(t), \end{aligned} \quad (21)$$

nomograma acestui sistem este aceeași cu a sistemului (19), cu singura deosebire că scara variabilei v are de data aceasta un suport rectiliniu.

O generalizare a sistemului (19) o obținem prin sistemul

$$\begin{aligned} f_2(v) &= f_1(u) + f_3(w) \\ \varphi_2(v) &= \varphi_1(u)f_4(t) + g_4(t), \end{aligned} \quad (22)$$

în care de data aceasta câmpul binar din planul (π) este exprimat analitic de

$$(u, t) \quad \begin{aligned} x &= f_1 \\ y &= \varphi_1 f_4 + g_4 \end{aligned}$$

adică în planul (π) variabila u este reprezentată și de data aceasta tot printr-o familie de drepte paralele, pe cînd variabila t printr-o familie de curbe (fig. 15 și fig. 16).

Contactul de poziție este și în acest caz

$$Q' \equiv M_2; \quad D' \parallel D$$

iar contactul de rezolvare este dat de

$$M'_3 \equiv P_{1,4}.$$

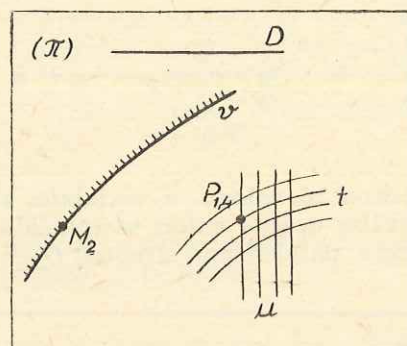


Fig. 15

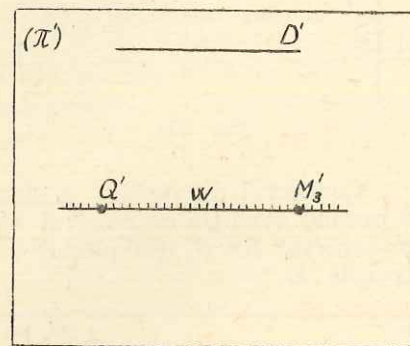


Fig. 16

Dacă ambele ecuații ale sistemului sînt de tip Cauchy

$$\begin{aligned} f_1(u) &= f_2(v) h_3(w) + l_3(w) \\ \varphi_2(v) &= \varphi_1(u) f_4(t) + g_4(t), \end{aligned} \quad (23)$$

atunci, scriind acest sistem sub forma

$$\begin{aligned} f_1(u) + 0 &= f_2(v) h_3(w) + l_3(w) + 0 \\ \varphi_1(u) f_4(t) + g_4(t) + 0 &= \varphi_2(v) + 0, \end{aligned}$$

putem trasa în planul fix (π) câmpurile binare (u, t) și (v, w) , exprimate analitic de

$$\begin{aligned} (u, t) \quad \begin{aligned} x &= f_1(u) \\ y &= \varphi_1(u) f_4(t) + g_4(t) \end{aligned} \\ (v, w) \quad \begin{aligned} x &= f_2(v) h_3(w) + l_3(w) \\ y &= \varphi_2(v) \end{aligned} \end{aligned} \quad (24)$$

iar în planul (π') , 2 puncte fixe M'_1 și M'_2 (fig. 17 și 18).

Pentru folosirea acestei nomograme să presupunem mai întîi că sînt date valorile variabilelor v și w , deci că se cunoaște punctul $P_{2,3}$; în acest caz contactul de poziție este realizat de

$$M'_1 \equiv P_{2,3}; \quad D' \parallel D$$

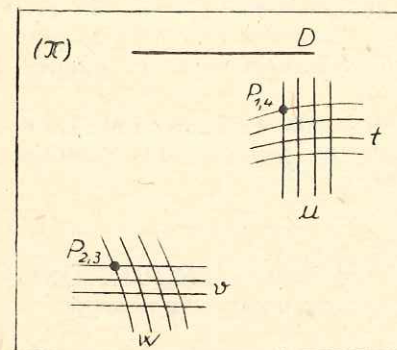


Fig. 17

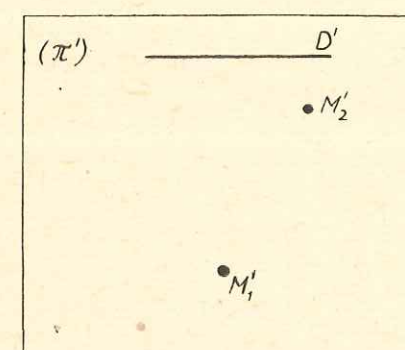


Fig. 18

iar contactul de rezolvare de

$$M'_2 \equiv P_{1,4}.$$

Dacă sînt date valorile variabilelor u și t , atunci contactul de poziție este realizat de

$$M'_2 \equiv P_{1,4}; \quad D' \parallel D$$

ar contactul de rezolvare de

$$M'_1 \equiv P_{2,3}$$

Așa dar, cunoscînd valorile variabilelor v și w se pot găsi cu această nomogramă valorile corespunzătoare ale variabilelor u și t , care verifică sistemul (23), sau cunoscînd valorile variabilelor u și t se pot determina valorile corespunzătoare pentru variabilele v și w .

În fine, dacă avem sistemul

$$\begin{aligned} f_2(v) &= f_1(u) h_3(w) + l_3(w) \\ \varphi_2(v) &= \varphi_1(u) f_4(t) + g_4(t), \end{aligned} \quad (25)$$

atunci explicitînd funcția $f_1(u)$ și notînd

$$\frac{1}{h_3(w)} = m_3(w); \quad -\frac{l_3(w)}{h_3(w)} = n_3(w),$$

obținem sistemul echivalent

$$\begin{aligned} f_1(u) &= f_2(v) m_3(w) + n_3(w) \\ \varphi_2(u) &= \varphi_1(u) f_4(t) + g_4(t) \end{aligned} \quad (26)$$

care este de forma (23) și care deci se poate rezolva cu o nomogramă asemănătoare cu nomograma acestui sistem.

ИЗОБРАЖЕНИЕ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ПРИ ПОМОЩИ НОМОГРАММ СОРИЕНТИРОВАННЫМ ТРАНСПАРАНТОМ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В этом труде авторы, исходя от решения системы уравнений при помощи номограммы с касательным соприкосновением с одним выравниванием [6], решают эту систему при помощи номограммы с ориентированным транспарантом.

Потом этот метод распространяется ещё к 6 типам систем двух уравнений с четырьмя неизвестными, которые можно решать при помощи номограмм с ориентированным транспарантом.

LA REPRÉSENTATION DE QUELQUES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS À L'AIDE DES NOMOGRAMMES À TRANSPARENT ORIENTÉ

RÉSUMÉ

Dans ce travail, les auteurs, partant de la résolution d'un système d'équations à l'aide d'un nomogramme à contact de tangence avec un seul alignement [6], résolvent ce système au moyen d'un nomogramme à transparent orienté.

Puis ils étendent cette méthode à six autres types de systèmes de deux équations à 4 inconnues, dont la résolution est fournie par un nomogramme à transparent orienté.

BIBLIOGRAFIE

1. Бал Л., Канонические формы для уравнений с четырьмя и пятью переменными. *Mathematica*, 1 (24), 2, 193—197 (1959).
2. Bal L., *Nomograme cu transparent orientat pentru ecuații cu 4 și 5 variabile*. Studii și cercet. de matem. (Cluj), VII, 196—176 (1957).
3. — *Quelques types de nomogrammes tangentiels*. *Mathematica*, 2 (25), 2, 201—210 (1960).
4. Хованский Г. С., Некоторые вопросы практической номографии. *Вычислительная математика*, 4, 3—103 (1959).
5. — *Исследование возможностей преобразования номограмм с прозрачным ориентированным транспарантом*. *Вычислительная математика*, 7, 133—151 (1961).
6. Лаптева Д. Г., О проективном преобразовании номограмм из выравненных точек с прямолинейной ответной шкалой. *Вычислительная математика*, 4, 150—159 (1959).
7. Rado F., Bal L., Gergely E., Ionescu Gh., *Lucrările consfătuirii de geometrie diferențială din 9—12 iunie 1955*, Acad. R.P.R. — Baza Timișoara, 1955, 361—366

REPREZENTAREA UNEI SISTEME FUNCTIONALE LA O SCALA DE TRANSPARENT

DE LASCU BAL
și GH. D. IONESCU

Se consideră sistemul de două ecuații funcționale

$$\begin{vmatrix} f(x) & f(y) = h & \dots & f(z) = m \\ f(x) = h & f(y) = h & \dots & f(z) = h + h \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(x) = m & f(y) = h + h & \dots & f(z) = h \end{vmatrix} = 0 \quad (1)$$

unde $f(x)$ este o funcție definită și continuă pe o scală, iar h și m sunt constante. Funcțiile funcționale $f(x)$ și $f(y)$ sunt definite pentru $x = 0$ și $y = 0$, iar pentru z avem de $f(z) = h$ și $f(z) = h + h$. Se $f(z)$ se determină din cele două funcționale de mai sus prin intermediul unei funcții de tranziție funcționale.

$$h_1 f(x) = h_2 f(y) = h_3 \dots = h_n f(z) = h \quad (2)$$

unde $h_1, h_2, h_3, \dots, h_n$ sunt constante pentru care $h_1 f(x), h_2 f(y), \dots, h_n f(z)$ sunt funcții funcționale de h , care se pot scrie sub forma $h_1 f(x) = h, h_2 f(y) = h, \dots, h_n f(z) = h$. Se $f(z)$ se determină din cele două funcționale de mai sus prin intermediul unei funcții de tranziție funcționale.

Funcția $f(z)$ este definită pe scala de tranziție.

$$f(z) = \begin{cases} h \\ h + h \end{cases}$$

Funcția $f(z)$ este definită pe scala de tranziție.