REDUCEREA UNEI ECUAŢII FUNCŢIONALE LA O ECUAŢIE DIFERENŢIALĂ

DE

FLORIN CONSTANTINESCU

(Cluj)

În această lucrare se studiază ecuaţia funcţională

$$\begin{vmatrix} f(x) & f(x+h) & \dots & f(x+nh) \\ f(x+h) & f(x+2h) & \dots & f(x+\overline{n+1}h) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(x+nh) & f(x+\overline{n+1}h) & \dots & f(x+2nh) \end{vmatrix} = 0 \tag{1}$$

unde $f(x)$ este o funcţie definită şi continuă pe axa reală, iar x şi h mărim variabile. Ecuaţia funcţională (1) a mai fost studiată pentru $n = 3$ în [2], sau pentru n oarecare în [1] şi [4]. În [1] se demonstrează că ecuaţia funcţională de mai sus este echivalentă cu o familie de ecuaţii funcţionale

$$a_0(h)\, f(x) + a_1(h)\, f(x+h) + \dots + a_n(h)\, f(x+nh) = 0 \tag{2}$$

pentru orice x şi $h \in (0, H)$, H fiind un număr pozitiv iar $a_0(h), a_1(h), \dots, a_n(h)$ funcţii continue de h, care nu se anulează simultan pentru nici o valoare a lui h din intervalul considerat. Funcţiile $a_0(h), a_1(h), \dots, a_n(h)$ depind de funcţia $f(x)$ şi se exprimă cu valorile lui $f(x)$ pe nodurile echidistante $0, h, 2h, \dots, nh$.

Pentru cele ce urmează să notăm :

$$f_1(x) = \int_0^x f(s)ds. \tag{3}$$

Funcţia $f_1(x)$ este derivabilă pe toată axa reală.

Conform notației (3), vom avea

$$\int_0^x f(s+ph)ds = \int_{ph}^{x+ph} f(s)ds = \int_0^{x+ph} f(s)ds - \int_0^{ph} f(s)ds = f_1(x+ph) - f_1(ph).$$

Integrînd ecuația (2) între limitele 0 și x, obținem

$$a_0(h)f_1(x) + \ldots + a_p(h)f_1(x+ph) + \ldots + a_n(h)f_n(x+nh) =$$
$$= a_0(h)f_1(0) + \ldots + a\,(h)f_1(ph) + \ldots + a\,(h)f\,(nh). \qquad (4)$$

Să mai notăm

$$F_1(x, \lambda_1) = \frac{f_1(x+\lambda_1) - f_1(x)}{\lambda_1}, \quad \text{unde } \lambda_1 \neq 0. \qquad (5)$$

Funcția $F_1(x, \lambda_1)$ este și ea derivabilă în raport cu x. Apoi, dată fiind derivabilitatea lui $f_1(x)$, este asigurată existența limitei

$$\lim_{\lambda_1 \to 0} F_1(x, \lambda_1) = F_1(x, 0) = f'_1(x) = f(x)$$

pentru orice x. Ecuația integrată (4) se scrie cu ajutorul funcției $F_1(x, \lambda_1)$ în modul următor:

$$a_0(h)F_1(x, \lambda) + \ldots + a_p(h)F_1(x+ph, \lambda_1) + \ldots + a_n(h)F_n(x+nh, \lambda_1) = 0 \qquad (6)$$

Mai departe notăm

$$f_2(x, \lambda_1) = \int_0^x F_1(s, \lambda_1)ds \qquad (7)$$

$$F_2(x, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{f_2(x+\lambda_2, \lambda_1) - f_2(x,\lambda)}{\lambda_2}; \quad \lambda_2 \neq 0. \qquad (8)$$

Funcțiile $f_2(x, \lambda_1)$, $F_2(x, \lambda_1, \lambda_2)$ sînt de două ori derivabile, ceea ce asigură existența limitei

$$\lim_{\lambda_2 \to 0} F_2(x, \lambda_1, \lambda_2) = F_2(x, \lambda_1, 0) = f'_2(x, \lambda_1) = F_1(x, \lambda_1).$$

Integrînd ecuația (6) și ținînd seama de (8), obținem

$$a_0(h)F_2(x, \lambda_1, \lambda_2) + \ldots + a_p(h)F_2(x+ph, \lambda_1, \lambda_2) + \ldots +$$
$$+ a_n(h)F_2(x+nh, \lambda_1, \lambda_2) = 0. \qquad (9)$$

Continuînd în același mod, vom construi în definitiv funcțiile

$$f_{2n+1}(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_2\,) = \int_0^x F_{2n}(s, \lambda_1, \ldots, \lambda_2)ds \qquad (10)$$

$$F_{2n+1}(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2n+1}) = \frac{f_{2n+1}(x+\lambda_{2n+1}, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2n}) - f_{2n+1}, \ldots, \lambda_{2n})}{\lambda_{2n+1}} \qquad (11)$$

Funcțiile $f_{2n+1}(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2n})$, $F_{2n+1}(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2n+1})$ sînt de $2n+1$ ori derivabile în raport cu x și există limita

$$\lim_{\lambda_{2n+1} \to 0} F_{2n+1}(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2n+1}) = F_{2n+1}(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2n+0}) = f_{2n+1}(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2n}) =$$
$$= F_{2n}(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2n}).$$

Funcția $F_{2n+1}(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2n+1})$ satisface ecuația funcțională

$$a_0(h)F_{2n+1}(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2n+1}) + \ldots + a_p(h)F_{2n+1}(x+ph, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2n+1}) + \ldots +$$
$$+ a\,(h)F_{2n+1}(x+nh, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2n+1}) = 0. \qquad (12)$$

Avînd în vedere cele spuse la începutul acestei lucrări, ecuația (12) este echivalentă cu ecuația

$$\begin{vmatrix} F_{2n+1}(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2n+1}) & F_{2n+1}(x+h, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2n+1}) \ldots & F_{2n+1}(x+nh, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2n+1}) \\ F_{2n+1}(x+h, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2n+1}) & F_{2n+1}(x+2h, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2n+1}) \ldots & F_{2n+1}(x+n+1, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2n+1}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ F_{2n+1}(x+nh, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2n+1}) & F_{2n+1}(x+nMh, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2n+1}) \ldots & F_{2n+1}(x+2nh, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2n+1}) \end{vmatrix} = 0 \qquad (13)$$

Prin operații elementare asupra determinantului din primul membru al ecuației (13), obținem succesiv

$$\begin{vmatrix} F_{2n+1}(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2n+1}) & F_{2n+1}(x+h, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2n+1}) \ldots & F_{2n+1}(x+nh, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2n+1}) \\ \Delta_1(0, 1) & \Delta_1(1, 2) \quad \ldots & \Delta_1(n, n+1) \\ \Delta_2(0, 1, 2) & \Delta_2(1, 2, 3) \quad \ldots & \Delta_2(n, n+1, n+2) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \Delta_n(0, 1, \ldots, n) & \Delta_n(1, 2, \ldots, n+1) \ldots & \Delta\,(n, n+1, \ldots, 2n) \end{vmatrix} = 0 \qquad (14)$$

$$\begin{vmatrix} F_{2n+1}(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2n+1}) & \Delta_1(0, 1) \quad \ldots & \Delta_n(0, 1, \ldots, n) \\ \Delta_1(0, 1) & \Delta_2(0, 1, 2) \quad \ldots & \Delta_n(0, 1, \ldots, n+1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \Delta_n(0, 1, \ldots, n) & \Delta_{nM}(0, 1, \ldots, n+1) \ldots & \Delta_2\,(0, 1, \ldots, 2n) \end{vmatrix} = 0 \qquad (15)$$

unde am notat cu $\Delta_m(k, k+1, \ldots, k+m)$ diferența divizată de ordinul m a funcției $F_{2n+1}(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2n+1})$ pe nodurile $x + kh$, $x + \overline{k+1}\,h, \ldots, x + \overline{k+m}\,h$.

$$\Delta_m(k, k+1, \ldots, k+m) = [x + kh, x + \overline{k+1}\,h, \ldots, x + \overline{k+m}\,h\,; F_{2n+1}] \qquad (16)$$

Trecînd la limita pentru $h \to 0$, găsim că soluţiile ecuaţiei funcţionale (13) se găsesc printre integralele ecuaţiei diferenţiale

$$\begin{vmatrix} F_{2n+1}(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2n+1}) & F'_{2n+1}(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2n+1}) \ldots & F^{(n)}_{2n+1}(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2n+1}) \\ F'_{2n+1}(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2n+1}) & F''_{2n+1}(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2n+1}) \ldots & F^{(nM)}_{2n+1}(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2n+1}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ F^{(n)}_{2n+1}(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2n+1}) & F^{(n+1)}_{2n+1}(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2n+1}) \ldots & F^{(2n)}_{2n+1}(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2n+1}) \end{vmatrix} = 0 \tag{17}$$

Această ecuaţie a fost studiată [3]. Dacă ne referim numai la *forma* integralelor ecuaţiei (17), ea este echivalentă cu a familie de ecuaţii diferenţiale

$$\begin{aligned} F^{(n)}_{2n+1}(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2n+1}) + A_1 F^{(n-1)}_{2n+1}(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2n+1}) + \ldots, + \\ + A_n F_{2n+1}(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2n+1}) = 0 \end{aligned} \tag{18}$$

coeficienţii $A_1, A_2, \ldots, A_n$ fiind numere reale arbitrare pentru orice valori ale parametrilor $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2n+1}$. Acest lucru înseamnă că pentru orice $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2n+1}$, funcţia $F_{2n+1}(x, \lambda, \ldots, \lambda_{2n+1})$ este de forma $\sum\limits_k P_k(x)\, e^{r_k x}$, unde $P_k(x)$ sînt polinoame de grad cel mult $n-1$ cu coeficienţi numere reale oarecari, iar r_k numere complexe oarecari. Invers, orice funcţie de forma (19) satisface ecuaţia funcţională (12) (rezultă din [4] sau prin verificare directă), deci mulţimea funcţiilor de forma (19) epuizează soluţiile ecuaţiei funcţionale (12). Urmează că şi pentru $\lambda_{2n+1} = 0, \lambda_{2n} = 0 \ldots \lambda_1 = 0$, funcţia $F_{2n+1}(x, 0, \ldots, 0)$ este de aceeaşi formă. Însă pentru $\lambda_{2n+1} = 0$, $\lambda_{2n} = 0, \ldots, \lambda_1 = 0$,

$$F_{2n+1}(x, 0, \ldots, 0) = f(x), \tag{20}$$

iar ecuaţia funcţională (12) se transformă în ecuaţia funcţională (2).

În concluzie, mulţimea soluţiilor funcţionale (1) şi (2) coincide cu mulţimea soluţiilor familiei de ecuaţii diferenţiale

$$f^{(n)}(x) + A_1 f^{(n-1)}(x) + \ldots + A_n f(x) = 0 \tag{21}$$

cu coeficienţi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ numere reale arbitrare.

ПРИВЕДЕНИЕ ФУНКЙИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В труде исследуется функциональное уравнение (1) при предположении, что неизвестная функция $f(x)$ определена и непрерывна на действительной оси, x и h являясь переменными величинами. Множество решений функционального уравнения (1) совпадает со множеством режений семейства дифференциальных уравнений (21), где коэффициенты $A_1, A_3, \ldots, A_n$-дийствительные произвольные числа.

LA RÉDUCTION D'UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE À UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

RÉSUMÉ

Dans ce travail, on étudie l'équation fonctionnelle (1) dans l'hypothèse que la fonction inconnue $f(x)$ est définie et continue sur l'axe réel, x et h étant des grandeurs variables. L'ensemble des solutions de l'équation fonctionnelle (1) coincide avec l'ensemble des solutions de la famille d'équations différentielles (21), où les coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des nombres réels arbitraires.

BIBLIOGRAFIE

1. Ghircoiaşiu N., Roşcău H., *Integrarea unei ecuaţii funcţionale*. Studii şi cercet. de matem. (Cluj), XIII. *2*, 57–67 (1962).
2. Ionescu D. V., *Sur une équation fonctionnelle*. Mathematica, **1(24)**, *1*, 11–26 (1959).
3. — *Integrarea unei ecuaţii diferenţiale*. Studii şi cercet. de matem. (Cluj), VIII, *2*, 275–289 (1957).
4. Radó F., *Caracterizarea mulţimii integralelor tuturor ecuaţiilor diferenţiale liniare omogene cu coeficienţi constanţi, de ordin dat*. Studii şi cercet. de matem. (Cluj), XIII, *2*, 135–150 (1962).

Primit la 28. V. 1962.