O GENERALIZARE A TEOREMEI CONTRACȚIEI ÎN CLASA S DE FUNCȚII UNIVALENTE

DE

PETRU T. MOCANU

Comunicare prezentată în ședința din 26 februarie 1957 a Filialei Cluj a Academiei R. P. R.

1. Să considerăm clasa S a funcțiilor

$$f(z)=z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots$$

olomorfe și univalente în cercul unitate $|z|<1$.

Relativ la această clasă se cunoaște următoarea teoremă a lui Koebe, denumită *teorema contracției* :

Dacă $|z|=r<1$, atunci pentru orice $f(z)\varepsilon S$ avem

$$\frac{r}{(1+r)^2}\leqq|f(z)|\leqq\frac{r}{(1-r)^2}$$

egalitatea fiind adevărată dacă, și numai dacă

$$f(z)=\frac{z}{(1+e^{i\alpha}z)^2},\qquad \alpha \text{ real.}$$

Se poate demonstra această teoremă bazîndu-ne pe metoda variațională. Avantajul constă în aceea că metoda folosită este aplicabilă la cazul mai general cînd în locul cercului $|z|=r$ se consideră o curbă închisă Jordan conținînd originea în interior. În acest mod se poate obține o generalizare a teoremei lui Koebe.

2. *Punerea problemei.* Fie o curbă închisă Jordan de ecuație

$$\rho=\rho(\varphi)\qquad 0\leqq\varphi\leqq2\pi\qquad \rho(0)=\rho(2\pi)$$

situată în cercul unitate și conținînd originea în interior (se presupune că această curbă este stelară în raport cu originea). Această curbă va fi transformată de o funcție oarecare $w=f(z)\varepsilon S$ într-o curbă Jordan C_ϱ în planul w conținînd originea în interior și de ecuație

$$w=f(\rho(\varphi)e^{i\varphi}). \tag{1}$$

Să considerăm în planul w semiaxa

$$\mathcal{I}(e^{-i\gamma}w)=0$$

care pornește din origine, făcînd unghiul γ cu direcția pozitivă a axei reale și care se mai poate scrie :

$$e^{-i\gamma}w-e^{i\gamma}\overline{w}=0. \tag{2}$$

Punctele de intersecție ale curbei C_ϱ cu semiaxa $\mathcal{I}(e^{-i\gamma}w)=0$ se obțin rezolvînd ecuația în φ

$$e^{-i\gamma}f(\rho(\varphi)e^{i\gamma})-e^{i\varphi}\overline{f(\rho(\varphi)e^{i\varphi})}=0 \tag{3}$$

și înlocuind rădăcinile acestei ecuații în (1). Dintre aceste rădăcini vom alege acea rădăcină $\varphi=\varphi_0$ pentru care

$$|w_0| = |f(\rho(\varphi)e^{i\varphi_0})|$$

este minim.

În acest mod, pentru $\rho(\varphi)$ și $\gamma(0\leqslant\gamma<2\pi)$ dați, se definește funcționala

$$R[f]= |f(\rho(\varphi_0)e^{i\varphi_0})| = \min_{\nu} |f(\rho(\varphi_\nu)e^{i\varphi_\nu})|$$

unde φ_ν sînt rădăcinile ecuației (3).

Să notăm

$$R_1= \inf_{f\varepsilon S} R[f], \qquad R_2= \sup_{f\varepsilon S} R[f].$$

Evident că $R_1\geqslant0$ și deoarece clasa S este o familie normală — deci funcțiile $f\varepsilon S$ sînt uniform mărginite în domeniul închis interior curbei $\rho=\rho(\varphi)$ — rezultă că $R_2<+\infty$.

Pe de altă parte, deoarece clasa S este compactă, rezultă că există cel puțin o funcție $f_1(z)\varepsilon S$ așa ca

$$R[f_1]=R_1$$

și cel puțin o funcție $f_2(z)\varepsilon S$ așa ca

$$R[f_2]=R_2.$$

Deci avem chiar $R_1= \min\limits_{f\varepsilon S} S[f]$ și $R_2= \max\limits_{f\varepsilon S} R[f]$.

Problema pe care ne-o punem este de a găsi în clasa S acele funcții $w=f(z)$ pentru care

$$R[f]=R$$

unde R este una din valorile extreme R_1 sau R_2.

3. *Condiția necesară pentru extrem.* Fie $w=f(z)\varepsilon S$ o funcție extremală, pentru care

$$R[f]=R_1 \; |f(\rho(\theta)e^{i\theta})|$$

(unde θ este acea soluție a ecuației (3) pentru care $|f(\rho(\theta)e^{i\theta})|$ este minim).

Avem deci $\qquad f(\rho(\theta)e^{i\theta})=R_1e^{i\gamma}$

și $\qquad R_1^2= R^2[f]=f(\rho(\theta)e^{i\theta})\overline{f(\rho(\theta)e^{i\theta})}$.

Fie

$$f^*(z)=f(z)+\lambda A(z;\ \xi;\ \Psi)+0(\lambda^2), \qquad \lambda>0$$

o variație a funcției $f(z)$. Se știe [1] că pentru o anumită expresie a lui $A(z;\ \xi;\Psi)$ pe care o vom preciza (ξ fiind un parametru arbitrar $|\xi|<1$ și Ψ real) și pentru λ suficient de mic, funcția $f^*(z)$ aparține și ea clasei S (formula lui Schiffer).

Înlocuind în ecuația (3) pe $f(z)$ cu $f^*(z)$, obținem ecuația

$$e^{-i\gamma}f(\rho(\varphi)e^{i\varphi})-e^{i\gamma}\overline{f(\rho(\varphi)e^{i\varphi})}+\lambda(e^{-i\gamma}A_\varphi-e^{i\gamma}\overline{A}_\varphi)+0(\lambda^2)=0 \tag{4}$$

unde $\qquad A_\varphi=A(\rho(\varphi)e^{i\varphi};\ \xi\ ;\ \Psi)$.

Ecuația (4) va avea o soluție θ^*, care va fi o variație a soluției θ a ecuației (3), deci

$$\theta^*=\theta+\lambda h+0(\lambda^2), \quad h = \left.\frac{\partial\theta^*}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=0} \tag{5}$$

Pentru a-l afla pe h vom înlocui (5) în (4), vom deriva identitatea obținută în raport cu λ și vom face $\lambda=0$. Obținem

$$e^{i(\theta-\gamma)}l(\rho'+i\rho)h-e^{i(\gamma-\theta)}\overline{l}(\rho'-i\rho)h+e^{-i\gamma}A-e^{i\gamma}\overline{A}=0$$

unde $\quad l=f'(\ ;\rho(\theta)e^{i\theta}),\ A=A_\theta,\ \rho=\rho(\theta)$ și $\rho'= \left.\dfrac{d\rho}{d\varphi}\right|_{\varphi=\theta}$

Deci

$$h = \frac{i\,(e^{-i\gamma}A-e^{i\gamma}\overline{A})}{p} \tag{6}$$

unde $p=e^{i(\theta-\gamma)}l(\rho-i\rho')+e^{i(\gamma-\theta)}\overline{l}(\rho+i\rho')$.

Pe de altă parte avem

$$R^2[f^*]=f^*(\rho(\theta)^*e^{i\theta^*})\overline{f^*(\rho(\theta)e^{i\theta^*})}=R_1^2+2\lambda\mathcal{R}\{R_1e^{-i\gamma}[le^{i\theta}(\rho'+i\rho)h+A]\}+0(\lambda^2).$$

Din cauza extremalității funcției $f(z)$, trebuie să avem

$$\mathcal{R}\{e^{-i\gamma}[le^{i\theta}(\rho'+i\rho)h+A]\}\geqslant0. \tag{7}$$

Înlocuind pe h cu expresia sa dată de (6), sîntem conduși la condiția necesară pentru ca f să fie extremală :

$$\mathcal{R}\left\{\frac{1}{p}\,\overline{l}e^{-i\theta}(\rho+i\rho')A\right\} \geqq 0. \tag{8}$$

În mod analog deducem : pentru ca f să fie o funcție extremală pentru care

$$R[f]=R_2,$$

trebuie ca

$$\mathcal{R}\left\{\frac{1}{p}\,\bar{l}e^{-i\theta}(\rho+i\rho')A\right\}\leqq 0.$$

4. Se poate arăta, ca şi în [1], că funcţiile extremale — atît în cazul minimului, cît şi în cazul maximului — transformă cercul unitate în domenii fără puncte exterioare. Pentru aceasta, este suficient să presupunem că domeniul transformat de o funcţie extremală $w=f(z)$ are un punct exterior w_0 şi să considerăm funcţia de variaţie

$$f^*(z)=f(z)+\lambda e^{i\Psi}\frac{f^2(z)}{f(z)-w_0},\quad \lambda>0 \text{ şi } \Psi \text{ real}.$$

5. *Stabilirea ecuaţiei diferenţiale.* Pentru a stabili ecuaţia diferenţială pe care o satisfac funcţiile extremale, să considerăm funcţia de variaţie în cazul cînd [1]

$$A(z;\xi,\Psi)=e^{i\Psi}E(z,\xi)-e^{i\Psi}f(z)\left[\frac{f(\xi)}{\xi f'(\xi)}\right]^2-e^{i\Psi}F(z,\xi)\xi\left[\frac{f(\xi)}{\xi f(\xi)}\right]^2+e^{-i\Psi}G(z,\xi)\xi\left[\frac{\bar{f}(\xi)}{\xi f'(\xi)}\right]^2$$

$$(|\xi|<1, \text{ şi } \Psi \text{ real})$$

unde

$$E(z,\xi)=\frac{f^2(z)}{f(z)-f(\xi)},\quad F(z,\xi)=\frac{zf'(z)}{z-\xi},\quad G(z,\xi)=\frac{z^2f'(z)}{1-\bar{\xi}z}.$$

În cazul minimului, condiţia (7) devine

$$\mathcal{R}\left\{\frac{e^{i\Psi}}{p}\left[E\omega-R_1e^{i\gamma}\left(\frac{w}{\xi w'}\right)^2\omega-F\xi\left(\frac{w}{\xi w'}\right)\omega+\bar{G}\xi\left(\frac{w}{\xi w'}\right)^2\bar{\omega}\right]\right\}\geqq 0$$

unde

$$E=E(\rho(\theta)e^{i\theta},\xi)=\frac{R_1^2e^{2i\gamma}}{R_1e^{i\gamma}-w}$$

$$F=F(\rho(\theta)e^{i\theta},\xi)=\frac{\rho e^{i\theta}l}{\rho e^{i\theta}-\xi}$$

$$\bar{G}=\bar{G}(\rho(\theta)e^{i\theta},\xi)=\frac{\rho^2e^{-2i\theta}\bar{l}}{1-\rho e^{-i\theta}\xi}$$

$$w=f(\xi),\quad \omega=e^{i\theta}\bar{l}(\rho+i\rho').$$

Deoarece Ψ este arbitrar, trebuie ca paranteza dreaptă să se anuleze. Considerînd pe ξ ca variabil în cercul $|\xi|<1$, obţinem ecuaţia diferenţială pe care trebuie să o satisfacă funcţia extremală $w=f(\xi)$ şi anume:

$$\left(\frac{w}{\xi w'}\right)^2[R_1e^{i\gamma}\omega+F\omega\xi-\bar{G}\bar{\omega}\xi]=E\omega.$$

Se vede imediat că în cazul maximului condiţia (8) conduce la aceeaşi ecuaţie diferenţială, unde R_1 se înlocuieşte cu R_2.

După un calcul elementar obţinem că orice funcţie extremală $w=f(z)\in S$ (pentru care $R[f]=R$, unde R are una din cele două valori extreme) satisface ecuaţia difeernţială

$$\left(\frac{\xi w'}{w}\right)^2\frac{R^2e^{i(2\gamma-\theta)}(\rho+i\rho')}{Re^{i\gamma}-w}=\frac{a+b\xi+c\xi^2}{(\rho e^{i\theta}-\xi)(1-\rho e^{-i\theta}\xi)} \tag{9}$$

unde
$$a=Re^{i\gamma}\rho(\rho+i\rho')$$
$$b=\rho l[\rho 1-\rho^2)+i\rho'(1+\rho^2)]-Re^{i(\gamma-\theta)}(1+\rho^2)(\rho+i\rho')$$
$$c=Re^{i(\gamma-2\theta}\rho(\rho+i\rho')-2i\rho^2\rho' le^{-i\theta}.$$

6. *Studiul ecuaţiei diferenţiale.* Deoarece din teoria ecuaţiilor diferenţiale rezultă că ecuaţia diferenţială (9) este satisfăcută şi pentru $|\xi|=1$, putem afirma că orice funcţie extremală $w=f(\xi)$ transformă cercul unitate, în intregul plan cu tăieturi, într-un număr finit de arce analitice. Fie k, $|k|=1$ un punct pe cercul unitate, căruia îi corespunde o extremitate a unei tăieturi. Evident că în punctul $\xi=k$ derivata w' trebuie să se anuleze, deci w'^2 va avea pe $\xi=k$ cel puţin ca rădăcină dublă. Rezultă că ecuaţia

$$a+b\xi+c\xi^2=0$$

trebuie să aibă rădăcina dublă $\xi=k$, deci trebuie ca

$$b^2-4ac=\rho^2l^2[\rho(1-\rho^2)+i\rho'(1+\rho^2)]^2-2\rho lRe^{i(\gamma-\theta)}(1+\rho^2)(\rho+i\rho')[\rho(1-\rho^2)+$$
$$+i\rho'(1+\rho^2)]+R^2e^{2i(\gamma-\theta)}(1+\rho^2)^2(1+i\rho')^2-4R^2e^{2i(\gamma-\theta)}\rho^2(\rho+i\rho')^2+$$
$$+8iRe^{i(\gamma-\theta)}\rho^3\rho' l(\rho+i\rho')=0.$$

De unde obţinem ecuaţia de gradul 2 în $Re^{i(\gamma-\theta)}$

$$(1-\rho^2)^2(\rho+i\rho')^2R^2e^{2i(\gamma-\theta)}-2l(1-\rho^2)(\rho+i\rho')[\rho(1+\rho^2)+i\rho'(1-\rho^2)]Re^{i(\gamma-\theta)}+$$
$$+\rho^2l^2[\rho(1-\rho^2)+i\rho'(1+\rho^2)]^2=0.$$

Rezolvînd această ecuaţie, obţinem

$$Re^{i(\gamma-\theta)}=\frac{\rho l[\rho(1+\rho^2)+i\rho'(1-\rho^2)\pm 2\rho\sqrt{\rho^2+\rho'^2}]}{(1-\rho^2)(\rho+i\rho')}.$$

Pentru R căpătăm două valori

$$R_1=\frac{\rho l[\sqrt{\rho+i\rho'}+\rho\sqrt{\rho-i\rho'}]}{(1-\rho^2)(\rho+i\rho')}e^{i(\theta-\gamma)}$$

şi

$$R_2=\frac{\rho l[\sqrt{\rho+i\rho'}-\rho\sqrt{\rho-i\rho'}]^2}{(1-\rho^2)(\rho+i\rho')}e^{i(\theta-\gamma)}$$

Vom vedea că prima valoare corespunde minimului lui $R[f]$ iar a doua maximului.

Dacă luăm $R=R_1$ şi eliminăm pe l, coeficienţii a,b,c primesc forma:

$$a=R_1e^{i\gamma}\rho(\rho+i\rho')$$

$$b=-2\frac{R_1e^{i(\gamma-\theta)}(\rho+i\rho')\rho[2\rho^2+(1+\rho^2)\sqrt{\rho^2+\rho'^2}]}{\rho(1+\rho^2)+2\rho\sqrt{\rho^2+\rho'^2}+i\rho'(1-\rho^2)}$$

$$c=\frac{R_1e^{i(\gamma-2\theta)}(\rho+i\rho')\rho\,[\rho(1+\rho^2)+2\rho\sqrt{\rho^2+\rho'^2}-i\rho'(1-\rho^2)]}{\rho(1+\rho^2)+2\rho\sqrt{\rho^2+\rho'^2}+i\rho'(1-\rho^2)}$$

In acest caz avem

$$k=-\frac{b}{2c}=\frac{2\rho^2+(1+\rho^2)\sqrt{\rho^2+\rho'^2}}{\rho(1+\rho^2)+2\rho\sqrt{\rho^2+\rho'^2}-i\rho'(1-\rho^2)}e^{i\theta}$$

Se verifică imediat că

$$\left|\frac{2\rho^2+(1+\rho^2)\sqrt{\rho^2+\rho'^2}}{\rho(1+\rho^2)+2\rho\sqrt{\rho^2+\rho'^2}-i\rho'(1-\rho^2)}\right|=1.$$

Deci putem să scriem

$$k=\bar{q}_1e^{i\theta}$$

unde

$$q_1=\frac{\rho\,(1+\rho^2+2\sqrt{\rho^2+\rho'^2})}{2\rho^2+(1+\rho^2)\sqrt{\rho^2+\rho'^2}}-i\frac{\rho'(1-\rho^2)}{2\rho^2+(1+\rho^2)\sqrt{\rho^2+\rho'^2}},\quad |q_1|=1$$

Ecuaţia diferenţială (9) devine în acest caz

$$\left(\frac{\xi w'}{w}\right)^2\frac{R_1^2e^{i(2\gamma-\theta)}(\rho+i\rho')}{R_1e^{i\gamma}-w}=\frac{c(\xi-k)^2}{(\rho e^{i\theta}-\xi)(1-\rho e^{-i\theta}\xi)}$$

sau extrăgînd rădăcina patrată

$$\frac{w'\sqrt{R_1e^{i\gamma}}}{w\sqrt{R_1e^{i\gamma}-w}}=\frac{\sqrt{\rho}\,e^{-i\frac{\theta}{2}}\sqrt{c_1}\,(\xi-k)}{\xi\sqrt{H(\xi)}}$$

unde

$$H(\xi)=\rho e^{i\theta}-(1+\rho^2)\xi+\rho e^{-i\theta}\xi^2$$

$$c=c_1R_1e^{i(\gamma-2\theta)}\rho(\rho+i\rho')$$

$$c_1=\frac{\rho(1+\rho^2)+2\rho\sqrt{\rho^2+\rho'^2}-i\rho(1-\rho^2)}{\rho(1+\rho^2)+2\rho\sqrt{\rho^2+\rho'^2}+i\rho(1-\rho^2)}=\frac{[\rho(1+\rho^2)+2\rho\sqrt{\rho^2+\rho'^2}-i\rho'(1-\rho^2)]^2}{|\rho(1+\rho^2)+2\rho\sqrt{\rho^2+\rho'^2}-i\rho'(1-\rho)^2|}=q_1^2.$$

Deci obţinem ecuaţia cu variabile separate

$$\frac{\sqrt{R_1e^{i\gamma}}\,dw}{w\sqrt{R_1e^{i\gamma}-w}}=\frac{\sqrt{\rho}\,e^{-i\frac{\theta}{2}}\rho_1(\xi-k)d\xi}{\xi\sqrt{H(\xi)}}.$$

Integrînd această ecuaţie, căpătăm relaţia

$$\frac{\sqrt{R_1e^{i\gamma}}-\sqrt{R_1e^{i\gamma}-w}}{\sqrt{R_1e^{i\gamma}}+\sqrt{R_1e^{i\gamma}-w}}=C(\xi) \tag{10}$$

unde

$$\log C(\xi)=\int_{\rho e^{i\theta}}^{\xi}\frac{\sqrt{\rho}\,e^{-\frac{i\theta}{2}}q_1(\xi-k)d\xi}{\xi\sqrt{H(\xi)}}=\log\left[\frac{1+\rho^2-2\rho e^{-i\theta}\xi-2\sqrt{\rho e^{-i\theta}H(\xi)}}{1-\rho^2}\right]^{q_1}-$$

$$-\log\frac{(1-\rho^2)\xi}{2\rho e^{i\theta}+2\sqrt{\rho e^{i\theta}H(\xi)}-(1+\rho^2)\xi}$$

deci

$$C(\xi)=\frac{[1+\rho^2-2\rho e^{-i\theta}\xi-2\sqrt{\rho e^{-i\theta}H(\xi)}]^{q_1}[2\rho e^{i\theta}+2\sqrt{\rho e^{i\theta}H(\xi)}-(1+\rho^2)\xi]}{\xi(1-\rho^2)^{1+q_1}}. \tag{11}$$

Rezolvînd ecuaţia (10) în raport cu w, obţinem

$$w=4R_1e^{i\gamma}\frac{C(\xi)}{[1+C(\xi)]^2}\cdot \tag{12}$$

Funcţia $\xi C(\xi)$ are în origine următoarea dezvoltare

$$\xi C(\xi)=\frac{4\rho(1-\rho)^{q_1-1}}{(1+\rho)^{q_1+1}}e^{i\theta}+C_1\xi+C_2\xi^2+\ldots$$

Din (12) rezultă că funcţia extremală $w=f(\xi)$ are dezvoltarea

$$w=4R_1e^{i\gamma}\left[\frac{(1+\rho)^{q_1+1}}{4\rho(1-\rho)^{q_1-1}}e^{-i\theta}\xi+C_1'\xi+C_2'\xi^2+\ldots\right]$$

Punînd condiţia $w'(0)=1$ obţinem

$$R_1=\frac{\rho(1-\rho)^{q_1-1}}{(1+\rho)^{q_1+1}}e^{i(\theta-\gamma)}=\frac{\rho}{1-\rho^2}e^{q_1\log\frac{1-\rho}{1+\rho}}\cdot e^{i(\theta-\gamma)}$$

Mai putem scrie încă

$$R_1=\frac{\rho}{1-\rho^2}\left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^{\frac{\rho(1+\rho^2)+2\sqrt{\rho^2+\rho'^2}}{2\rho^2+(1+\rho^2)\sqrt{\rho^2+\rho'^2}}}\cdot e^{i\left(\theta-\gamma-\frac{\rho'(1-\rho^2)}{2\rho^2+(1+\rho^2)\sqrt{\rho^2+\rho'^2}}\log\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)}$$

Deoarece R_1 este real, rezultă că θ trebuie să verifice următoarea ecuaţie

$$\gamma=\theta-\frac{\rho'(\theta)[1-\rho^2(\theta)]}{2\rho^2(\theta)+[1+\rho^2(\theta)]\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}}\log\frac{1-\rho(\theta)}{1+\rho(\theta)} \tag{13}$$

şi deci

$$R_1=\frac{\rho(\theta)}{1-\rho^2(\theta)}\left(\frac{1-\rho(\theta)}{1+\rho(\theta)}\right)^{\frac{\rho(\theta)\,[1+\rho^2(\theta)+2\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\,]}{2\rho^2(\theta)+[1+\rho^2(\theta)]\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}}} \tag{14}$$

(θ este acea rădăcină a ecuaţiei (13) pentru care R_1 este minim). Dacă luăm $R=R_2$, eliminînd pe l obţinem în mod cu totul analog

$$k=\bar{q}_2 e^{i\theta}$$

unde

$$q_2=\frac{\rho\left(1+\rho^2-2\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\right)}{2\rho^2-(1+\rho^2)\sqrt{\rho^2+\rho'^2}}-i\,\frac{\rho'(1-\rho^2)}{2\rho^2-(1+\rho^2)\sqrt{\rho^2+\rho'^2}},\quad |q_2|=1.$$

Ecuaţia diferenţială se scrie în acest caz

$$\frac{\sqrt{R_2e^{i\gamma}}\,dw}{w\sqrt{R_2e^{i\gamma}-w}}=\frac{\sqrt{\rho}\;e^{-i\frac{\theta}{2}}\,q_2(\xi-k)\,d\xi}{\xi\sqrt{H(\xi)}}.$$

Prin integrare obţinem funcţia extremală

$$w=4R_2e^{i\gamma}\frac{D(\xi)}{[1+D(\xi)]^2} \tag{15}$$

unde

$$D(\xi)=\frac{\left[1+\rho^2-2\rho e^{-i\theta}\xi-2\sqrt{\rho e^{-i\theta}H(\xi)}\right]^{q_2}\left[2\rho e^{i\theta}+2\sqrt{\rho e^{i\theta}H(\xi)}-(1+\rho^2)\xi\right]}{\xi(1-\rho^2)^{1+q_2}}$$

Ca şi mai înainte, rezultă relaţiile

$$\gamma=\theta-\frac{\rho'(\theta)\,[1-\rho^2(\theta)]}{2\rho^2(\theta)-[1+\rho^2(\theta)]\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}}\log\frac{1-\rho(\theta)}{1+\rho(\theta)} \tag{16}$$

$$R_2=\frac{\rho(\theta)}{1-\rho^2(\theta)}\left(\frac{1-\rho(\theta)}{1+\rho(\theta)}\right)^{\frac{\rho(\theta)\left[1+\rho^2(\theta)-2\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^1(\theta)}\right]}{2\rho^2(\theta)-[1+\rho^2(\theta)]\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}}}. \tag{17}$$

(θ este soluţia ecuaţiei (16) pentru care R_2 este maxim).
Deoarece

$$\frac{\rho\left[1+\rho^2+2\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\right]}{2\rho^2+(1+\rho^2)\sqrt{\rho^2+\rho'^2}}>\frac{\rho\left[1+\rho^2-2\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\right]}{2\rho^2-(1+\rho^2)\sqrt{\rho^2+\rho'^2}}$$

iar

$$\frac{1-\rho}{1+\rho}<1,$$

rezultă că $R_1<R_2$, deci R_1 este valoarea minimă a funcţionalei $R[f]$, iar R_2 cea maximă.

Se verifică imediat că dacă $\rho'=0$, adică $\rho(\theta)=r$, obţinem rezultatul cunoscut din teorema lui Koebe:

$$R_1=\frac{r}{(1+r)^2}\quad \text{şi}\quad R_2=\frac{r}{(1-r)^2}.$$

În cazul minimului funcţia extremală este dată de (12) cu R_1 şi θ definiţi de (13) şi (14), iar în cazul maximului funcţia extremală este dată de (15) cu R_2 şi θ definiţi de (16) şi (17) (bineînţeles, avînd în vedere specificările amintite).

Dacă acum vom considera pe θ variabil între 0 şi 2π, ecuaţiile (13) şi (14) vor defini parametric o curbă Γ_1 care nu trece prin origine. Fie Δ_1 acea componentă a complementului curbei Γ_1 în raport cu planul w, care conţine originea. Evident că Δ_1 este un domeniu.

Să notăm cu $\Delta_1^*(0)$ cel mai mare domeniu stelat în raport cu originea, care este conţinut în domeniul Δ_1.

Fie d domeniul interior curbei $\rho=\rho(\theta)$. Este clar că $\Delta_1^*(0)$ va fi conţinut în orice imagine D a domeniului d prin funcţiile $f(z)\in S$.

Putem deci enunţa

TEOREMA 1. *Oricare ar fi funcţia $f(z)\in S$, imaginea D prin această funcţie a domeniului d mărginit de curba $\rho=\rho(\theta)$, şi interior cercului unitate va conţine steaua $\Delta_1^*(0)$.*

În mod analog, ecuaţiile (16) şi (17) vor defini parametric o curbă care nu trece prin origine. Fie Δ_2 componenta care conţine originea complementului în planul w al curbei Γ_2.

Fie $\Delta_2^*(0)$ cel mai mic domeniu stelat în raport cu originea, care conţine domeniul Δ_2. Atunci putem enunţa:

TEOREMA 2. *Oricare ar fi funcţia $f(z)\in S$, imaginea D prin această funcţie a domeniului d mărginit de curba $\rho=\rho(\theta)$ şi interior cercului unitate va fi conţinută în $\Delta_2^*(0)$.*

Domeniile Δ_1^* şi Δ_2^* fiind extremale, rezultatele obţinute nu mai pot fi îmbunătăţite.

Univ. „V. Babeş" — Cluj
Catedra de teoria funcţiilor

BIBLIOGRAFIE

1. G. M. Gulozin, *Metod variaţii v. konformnom otobrajenii* (I). Matem. sbornik, t. XIX (61), 2, 1946, 203—236.
2. — *Gheometriceskaia teoria funkţii komplexnogo peremenogo.* Moscova, 1952.

Обобщение теоремы искажения в классе S однолистных функций

(Краткое содержание)

В этой заметке обобщается известная теорема Кёбе об оценке модуля функций класса S (т. е. голоморфные и однолистные функции $w=f(z)=z+a_2z^2+\ldots$ в круге $|z|<1$) в том случае когда $|z|=r<1$.

Наше обобщение получается заменяя круг $|z|=r$ через жорданую замкнутую кривую, содержащую начало координат $z=0$ внутри себя и имеющую уравнение $\rho=\rho(\varphi)$, $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$.

Пусть Δ_1 компонент, — содержащий начало — дополнения из плоскости w к криой Γ_1, заиданной через (13) и (14). Пусть потом $\Delta_1^*(0)$ звезда [2]., с 188) области Δ_1 по отношению к началу. Аналогично, рассмотрим компонент Δ_2, определенный как выше по отношению к кривой Γ_2, заданной через (16) и (17).

Исследование уравнения (9) ведет к следующим теоремам:

Теорема *1.* Каква бы ни была функция $f(z)\in S$ образ D области d, органиченной кривой $\rho=\rho(\theta)$, содержит звезду $\Delta_1^*(0)$.

Теорема 2. Какова бы ни была функция $f(z)\in S$ образ D области d_1 органиченной кривой $\rho=\rho(\theta)$, содерится в звезде$\Delta_2^*(0)$.

Une généralisation du théoreme de la contraction dans la classe S de fonctions univalentes

(Résumé)

Dans cette note on généralise le théorème bien connu de Koebe sur la délimitation du module des fonctions de la classe S (les fonctions $w = f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ holomorphes et univalentes dans le cercle $|z| < 1$) dans le cas $|z| = r < 1$. On obtient la généralisation en remplaçant le cercle $|z| = r$ par une courbe Jordan fermée qui contient l'origine $z = 0$ à l'intérieur et dont l'équation est $\rho = \rho(\varphi)$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$.

Soit Δ_1 la composante qui contient l'origine du complément dans le plan w de la courbe définie par (13) et (14). Soit aussi $\Delta_1^*(0)$ l'étoile [2, p. 188] du domaine Δ_1 en rapport avec l'origine. On considère de manière analogue la composante Δ_2 qui contient l'origine du complément dans le plan w de la courbe définie par (16) et (17).

L'étude de l'équation (9) conduit aux théorèmes suivants :

1[er] *théorème.* Quelle que soit la fonction $f(z) \in S$, l'image D du domaine d limité par la courbe $\rho = \rho(\theta)$ contient l'étoile $\Delta_1^*(0)$.

2[e] *théorème,* Quelle que soit la fonction $f(z) \in S$, l'image D du domaine d limité par la courbe $\rho = \rho(\theta)$ est contenue dans l'étoile $\Delta_2^*(0)$.