OBSERVAŢII ASUPRA REZOLVĂRII PROBLEMELOR DE PROGRAMARE PATRATICĂ*

DE

CONSTANŢA MOCANU

(Cluj)

1. În această notă se indică o metodă de rezolvare a unei probleme de programare patratică cu condiţii liniare, prin reducerea ei la o altă problemă de programare patratică cu un număr mai mic de variabile şi cu condiţii liniare mai simple. Formulele de trecere de la prima problemă la cea de a doua se pot exprima destul de simplu sub formă matricială.

2. *Observaţie preliminară.* Ideea care stă la baza metodei noastre decurge în mod foarte natural din următoarea observaţie:

Fie $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o funcţie omogenă de gradul α şi $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, m funcţii omogene respectiv de gradele α_i. Vom presupune că toate aceste funcţii au derivate de ordinul 1 continue. Mai presupunem că $m \leq n$.

Ne propunem să calculăm extremele funcţiei $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ cu condiţiile

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_i. \tag{1}$$

Pentru aceasta, aplicînd metoda multiplicatorilor a lui Lagrange, construim funcţia

$$F = f - \lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2 - \ldots - \lambda_m g_m$$

şi scriem sistemul de n ecuaţii

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_j} - \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_j} - \ldots - \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_j} = 0. \tag{2}$$

---

* Prezentată în şedinţa din 16 mai 1962 a Catedrei de analiză de la Unversitatea ,,Babeş-Bolyai'' Cluj.

Rezolvînd sistemul format de ecuațiile (1) și (2), se obțin coordonatele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ale punctului de extremum și valorile parametrilor $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$.

Valoarea extremă a funcției f se poate exprima foarte ușor în funcție de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, în felul următor:

Înmulțind fiecare ecuație din (2) respectiv cu x_j și adunînd, se obține (ținînd seama de formula lui Euler relativ la funcțiile omogene):

$$\alpha f - \lambda_1\alpha_1 g_1 - \lambda_2\alpha_2 g_2 - \ldots - \lambda_m\alpha_m g_m = 0.$$

Deoarece punctul $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ verifică (1), deducem următoarea formulă

$$f = \frac{1}{\alpha}\left[\lambda_1\alpha_1 a_1 + \lambda_2\alpha_2 a_2 + \ldots + \lambda_m\alpha_m a_m\right] \tag{3}$$

care ne dă valoarea extremă a funcției f.

3. *Problemă*. În această notă avem în vedere următoarea problemă de programare patratică:

Să se găsească minimul formei patratice pozitiv definite

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}x_i x_j \tag{4}$$

unde

$$c_{ij} = c_{ji}$$

cu condițiile liniare

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq a_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{5}$$

Presupunem $m \leq n$.

Vom introduce notațiile matriciale

$$A = (a_{ij}), \qquad C = (c_{ij})$$

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$$

$$a = (a_1, a_2, \ldots, a_m)'$$

unde accentul indică transpusa matricei respective.

Matricea C este simetrică, pozitiv definită, iar matricea A este de rangul m.

Problema se poate enunța sub formă matricială în felul următor:

Să se găsească minimul formei patratice

$$f = x'Cx$$

cu condițiile

$$Ax \geq a.$$

4. *Metodă de rezolvare*. Să punem

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = u_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{6}$$

unde $u_1, u_2, \ldots, u_m$ sînt niște noi variabile supuse la condițiile $u_i \geq a_i$. Să presupunem că am fixat pe $u_1, u_2, \ldots, u_m$. Putem atunci aplica observația de la punctul 2. Fie

$$F = f - 2\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j.$$

Considerăm sistemul

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} - 2\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_{ij} = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{7}$$

Ținînd seamă de formula (3), vom avea

$$f = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i. \tag{8}$$

Punînd

$$u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)'$$

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)'$$

formula (8) se mai scrie matricial

$$f = u'\lambda. \tag{8'}$$

Parametrii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ se vor obține în funcție de $u_1, u_2, \ldots, u_m$ rezolvînd sistemul format de ecuațiile (6) și (7), adică sistemul de $m + n$ ecuații

$$\begin{aligned}
&c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = a_{11} + a_{21} + \ldots + a_{m1}\\
&c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n = a_{21} + a_{22} + \ldots + a_{m2}\\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots\\
&c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \ldots + c_{nn}x_n = a_{1n} + a_{2n} + \ldots + a_{mn}\\
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = u_1\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = u_2\\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots\\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = u_n.
\end{aligned} \tag{9}$$

Determinantul matriciei C (presupusă nedegenerată), îl notăm

$$|C| = |c_{ij}| \neq 0.$$

Sistemul (9) în $x_1, x_2, \ldots, x_n$ trebuie să fie compatibil, deci determinanții caracteristici trebuie să fie nuli:

$$\begin{vmatrix} & & & a_{11}\lambda_1 + a_{21}\lambda_2 + \ldots + a_{m1}\lambda_m \\ & C & & a_{12}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \ldots + a_{m2}\lambda_m \\ & & & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & & & a_{1n}\lambda_1 + a_{2n}\lambda_2 + \ldots + a_{mn}\lambda_m \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots\ a_{in} & u_i \end{vmatrix} = 0$$

$$i = 1, 2, \ldots, m.$$

Obținem în acest fel sistemul în $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$

$$\sum_{k=1}^{m} \begin{vmatrix} & & & a_{k1} \\ & C & & a_{k2} \\ & & & \vdots \\ & & & a_{kn} \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots\ a_{in} & 0 \end{vmatrix} \lambda_k + |C| u_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

sau

$$\sum_{k=1}^{m} d_{ik}\, \lambda_k + |C| u_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{10}$$

unde am notat

$$d_{ik} = \begin{vmatrix} & & & a_{k1} \\ & C & & a_{k2} \\ & & & \vdots \\ & & & a_{kn} \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots\ a_{in} & 0 \end{vmatrix}$$

Rezolvînd sistemul (10), vom obține

$$\lambda_k = \sum_{i=1}^{m} \gamma_{ik}\, u_i, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \quad \gamma_{ik} = \gamma_{ki}$$

și deci, înlocuind în (8), deducem

$$f = \sum_{i,k=1}^{m} \gamma_{ik} u_i u_k. \tag{11}$$

Pentru a scrie formulele de mai sus sub formă matricială, să notăm $D = (d_{ik})$. Dezvoltînd după ultima coloană, avem

$$d_{ik} = d_{ki} = -\left\{a_{k1} \begin{vmatrix} a_{i1} a_{i2} \ldots a_{in} \\ c_{21} c_{22} \ldots c_{2n} \\ \ldots\ldots \\ c_{n1} c_{n2} \ldots c_{nn} \end{vmatrix} + a_{k2} \begin{vmatrix} c_{11} c_{12} \ldots c_{1n} \\ a_{i1} a_{i2} \ldots a_{in} \\ \ldots\ldots \\ c_{n1} c_{n2} \ldots c_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + a_{kn} \begin{vmatrix} c_{11} c_{12} \ldots c_{1n} \\ c_{21} c_{22} \ldots c_{2n} \\ \ldots\ldots \\ a_{i1} a_{i2} \ldots a_{in} \end{vmatrix}\right\}$$

de unde se deduce ușor că

$$D = -AC^*A',$$

unde C^* înseamnă asociata matricei C.

Deci formula (10) se scrie matricial

$$AC^*A'\lambda = |C| u, \tag{10'}$$

de unde deducem

$$\lambda = |C| (AC^*A')^{-1} u,$$

deci

$$f = |C| u'(AC^*A')^{-1} u, \tag{11}$$

unde evident că matricea $(AC^*A')^{-1}$ este simetrică. Această formă patratică este de asemenea pozitiv definită.

Prin metoda de mai sus, problema noastră revine la găsirea minimului formei patratice pozitiv definite (11) sau (11') cu condițiile liniare

$$u_i \geqq a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{12}$$

sau

$$u \geqq a. \tag{12'}$$

Această metodă se aplică în cazul cînd $m \leqq n$. Funcția (11) depinde de m variabile și cu condițiile mai simple (12).

Pentru a găsi pe $x_1, x_2, \ldots, x_n$ în funcție de $u_1, u_2, \ldots, u_m$, să ținem seama că avem

$$Cx = A'\lambda,$$

deci

$$x = C^{-1}A'\lambda,$$

adică

$$x = |C| C^{-1}A'(AC^*A')^{-1}u,$$

sau

$$x = C^*A'(AC^*A')^{-1}u. \tag{13}$$

5. *Caz particular.* Fie

$$f = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$$

cu condițiile

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqq a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

În acest caz, matricea C este matricea identică, $C = E$ și deci problema revine la căutarea minimului formei patratice

$$f = u'(AA')^{-1}u \tag{14}$$

cu condițiile $u \geqq a$.

Mai avem formula

$$x = A'(AA')^{-1}u. \tag{15}$$

6. *Exemplu*. Ne propunem să găsim minimul funcției

$$f = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$$

cu condițiile

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n &\geqq a \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n &\geqq b. \end{aligned} \qquad (a > 0,\ b > 0)$$

În acest caz

$$C = E \quad \text{și} \quad A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{pmatrix} \qquad m = 2.$$

Vom considera vectorii

$$\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$
$$\beta = (b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

Notînd (α, β) produsul scalar al vectorilor α și β, avem

$$AA' = \begin{pmatrix} (\alpha, \alpha) & (\alpha, \beta) \\ (\alpha, \beta) & (\beta, \beta) \end{pmatrix}$$

Determinantul acestei matrici este

$$d = |AA'| = (\alpha, \alpha)(\beta, \beta) - (\alpha, \beta)^2 > 0.$$

Mai avem

$$(AA')^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{(\beta,\beta)}{d} & -\frac{(\alpha,\beta)}{d} \\ -\frac{(\alpha,\beta)}{d} & \frac{(\alpha,\alpha)}{d} \end{pmatrix}$$

Să notăm cu ξ și η noile variabile, deci $u = \binom{\xi}{\eta}$. Conform formulei (14), rezultă că problema revine la găsirea minimului funcției

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{d}\left[(\beta, \beta)\xi^2 - 2(\alpha, \beta)\xi\eta + (\alpha, \alpha)\eta^2\right] \tag{16}$$

cu condițiile

$$\xi \geqq a, \quad \eta \geqq b. \tag{17}$$

Ținînd seama de formula (15), deducem imediat

$$x_i = \frac{1}{d}\{[(\beta, \beta)a_i - (\alpha, \beta)b_i]\xi - [(\alpha, \beta)a_i - (\alpha,\alpha)b_i]\eta\} \tag{18}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

Minimul funcției $f(\xi, \eta)$ va fi atins pe frontiera domeniului definit de (17). Pentru a găsi acest minim să punem $\eta = b$ și să notăm

$$\varphi(\xi) = (\beta, \beta)\xi^2 - 2(\alpha, \beta)b\xi + (\alpha, \alpha)b^2.$$

Avem

$$\varphi'(\xi) = 2(\beta, \beta)\xi - 2(\alpha, \beta)b.$$

Deci ecuația $\varphi'(\xi) = 0$ ne dă $\xi = \xi_0 = \frac{(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}b$.

Avem

$$f(\xi_0, b) = \frac{1}{d}\left[\frac{(\alpha,\beta)^2}{(\beta,\beta)}b^2 - 2\frac{(\alpha,\beta)^2}{(\beta,\beta)}b^2 + (\alpha, \alpha)b^2\right] =$$

$$= \frac{b^2}{d(\beta,\beta)}[(\alpha, \alpha)(\beta, \beta) - (\alpha, \beta)^2] = \frac{b^2}{(\beta,\beta)}.$$

Făcînd, în mod analog, $\xi = a$ și notînd

$$\eta_0 = \frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}a,$$

vom calcula

$$f(a, \eta_0) = \frac{a^2}{(\alpha,\alpha)}.$$

Vom mai calcula și $f(a, b)$.

Nu putem avea în același timp $\xi_0 > a$ și $\eta_0 > b$, deoarece $(\alpha, \alpha)(\beta,\beta) - (\alpha, \beta)^2 > 0$. Distingem deci următoarele trei cazuri :

1°. $\xi_0 \geqslant a$, adică $\frac{a}{b} \leqq \frac{(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}$. Atunci minimul funcției f va fi

$$\min\left\{\frac{b^2}{(\beta,\beta)},\ f(a, b)\right\}$$

2°. $\eta_0 \geqq b$, adică $\frac{a}{b} \geqq \frac{(\alpha,\alpha)}{(\alpha,\beta)}$. Atunci minimul va fi

$$\min\left\{\frac{a^2}{(\alpha,\alpha)},\ f(a, b)\right\}$$

3°. $\xi_0 < a, \quad \eta_0 < b,$

adică

$$\frac{(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)} < \frac{a}{b} < \frac{(\alpha,\alpha)}{(\alpha,\beta)},$$

atunci minimul lui f va fi $f(a, b)$.

7. *Exemplu numeric*. Să găsim minimul lui

$$f = x^2 + y^2 + z^2$$

cu condițiile

$$x + y + z \geqq 1$$

$$x - y + 2z \geqq 4$$

Avem

$$\alpha = (1,1,1)$$

$$\beta = (1,-1,2)$$

$$(\alpha, \alpha) = 3, \quad (\alpha, \beta) = 2, \quad (\beta, \beta) = 6$$

$$a = 1, \ b = 4$$

$$d = 14$$

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{14}[6\xi^2 - 4\xi\eta + 3\eta^2].$$

Deoarece

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{4} < \frac{1}{3} = \frac{(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}$$

$$\frac{b^2}{(\beta,\beta)} = \frac{8}{3} < \frac{19}{7} = f(1, 4),$$

rezultă că

$$\min f = \frac{8}{3}$$

și este atins pentru $\xi = \xi_0 = \frac{4}{3}$ și $\eta = 4$.

Conform formulelor (18), deducem imediat că minimul funcției date este atins în punctul $x = \frac{2}{3}$, $y = -\frac{2}{3}$, $z = \frac{4}{3}$.

Universitatea „Babeș-Bolyai" Cluj,
Catedra de analiză

ЗАМЕЧАНИЯ О РЕШЕИИ ЗАДАЧ КВАДРАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Рассматривается следующая задача квадратического программирования:

Найти минимум квадратической формы положительно определённой $f = x'Cx$, при линейных условиях $Ax \geqslant a$, где $A = (a_{ij})$, $C = (c_{jk})$, $(i = 1, 2, \ldots, m;\ k, j = 1, 2, \ldots, n)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m)'$, C является симметричной матрицой положительно определённой, а A — матрица, имеющая ранг m. Предполагается, что $m \leqslant n$.

На основе замечания по решению задач, связанного екстремума у однородных функций, даётся следующий метод решения вышеуказанной задачи:

Пологается $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = u_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, где $u_1, u_2, \ldots, u_m$ являются переменными, подчиненными условиям $u_i \geqq a_i$. Задача сводится к нахождению минимума квадратической формы положительно определеним $f = |c|\,u'(AC^*A')^{-1}u$ (которая будет зависеть от m переменных), при более простых условиях $u \geq a$, где $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$. Значения переменных x_j при которых достигается минимум квадратической формы f, получаются из формулы $x = C^*A'(AC^*A')^{-1}u$.

Исследуется частный случай $f = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$.

REMARQUES SUR LA RÉSOLUTION DES PROBLÈMES DE PROGRAMMATION QUADRATIQUE

RÉSUMÉ

On considère le problème suivant de programmation quadratique :

Que soit trouvé le minimum de la forme quadratique positivement définie $f = x'Cx$, aux conditions linéaires $Ax \geqq a$, où $A = (a_{ij})$, $C = (c_{jk})$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j, k = 1, 2, \ldots, n)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m)'$, C este une matrice symétrique positivement définie et A este une matrice de rang m. On suppose $m \leqq n$.

En vertu d'une observation sur la résolution des problèmes d'extremum lié à des fonctions homogènes, on indique la méthode suivante pour la résolution du problème ci-dessus :

On pose $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = u_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, où $u_1, u_2, \ldots, u_m$, sont des variables soumises aux conditions $u_i \geqq a_i$. Le problème se réduit à trouver le minimum de la forme quadratique positivement définie $f = |C| u' (AC^*A')^{-1} u$ (qui dépendra de m variables), aux conditions plus simples $u \geqq a$, où $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)'$. On obtient les variables x_j, où est atteint le minimum de la forme quadratique f, par la formule $x = C^*A'(AC^*A')^{-1}u$.

On étudie le cas particulier $f = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$.

Primit la 16. V. 1962