ASUPRA MULŢIMILOR CONVEXE CARE ADMIT SECANTE COMUNE

DE

VASILE PETEANU

(Cluj)

Lucrare prezentată în şedinţa de comunicări din 26 februarie 1963 a Institutului de calcul al Academiei P.R.R. — Filiala Cluj

1. În 1942, L. A. Santaló [6] dă următoarea teoremă:

TEOREMA 1. *Fie dată în plan o familie finită de segmente de dreaptă, paralele. Dacă oricare trei segmente pot fi intersectate cu o dreaptă, atunci există o dreaptă care intersectează toate segmentele familiei.*

M. Dresher şi T. E. Harris redescoperă această teoremă (a se vedea lucrarea [5]). Ea reprezintă soluţionarea unui caz particular al unei probleme enunţate în [7]. Teorema a fost generalizată în mai multe direcţii [5,4,1,3]. Aceste generalizări, însă, s-au limitat la cazul plan. În general, demonstraţiile acestei teoreme indicau numai existenţa unei secante comune, folosind o cunoscută teoremă a lui E. Helly [2].

În prezenta lucrare am dat o demonstraţie directă teoremei 1, care permite construirea efectivă a unei secante comune. Teoremele 2 şi 6 sînt generalizări în spaţiu ale teoremei 1. La punctul 5 am introdus mulţimile de drepte $\mathcal{F}_{ik}$.

2. Ne propunem să dăm o nouă demonstraţie teoremei 1 care să permită construirea unei secante comune. În acest scop fie

$$S_i;\ x = x_i,\ b_i \leq y \leq a_i,\quad i = 1, 2, \ldots, m;$$
$$x_1 < x_2 < \ldots < x_m,$$

mulţimea segmentelor teoremei 1. Vom nota această mulţime cu $\mathcal{M}$. Vom spune că un număr de segmente din $\mathcal{M}$ sînt colineare, dacă există o dreaptă care să le intersecteze. Va trebui deci, pe baza colinearităţii a oricăror trei segmente din $\mathcal{M}$, să demonstrăm colinearitatea tuturor segmentelor din $\mathcal{M}$.

În cele ce urmează, vom spune că un segment S_i este la stînga unui segment S_j dacă $x_i < x_j$, iar dacă S_k este astfel că $x_i < x_j < x_k$, vom spune că S_i se află între S_j și S_k. În vederea demonstrării teoremei 1 ne sînt necesare următoarele două leme.

LEMA 1. *Dacă S_j se află între S_i și S_k și dacă există o dreaptă (Δ) astfel ca S_j să se afle în semiplan opus cu S_i și S_k față de (Δ) și dacă (Δ) nu intersectează cele trei segmente, atunci ele nu sînt colineare* (fig. 1).

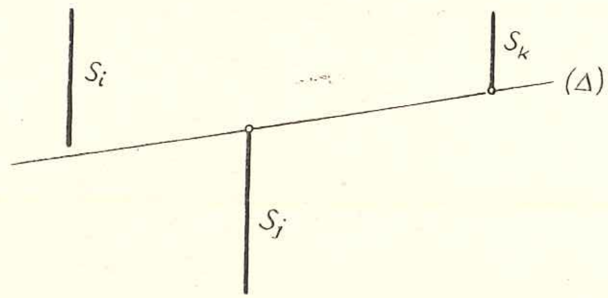

Fig. 1

Proprietatea exprimată de această lemă este evidentă. În continuare notăm $Y_a = \min\{a_i\}$ și $Y_b = \max\{b_i\}$. Putem presupune că $Y_a < Y_b$ deoarece în caz contrar teorema este evidentă. Ducem prin Y_a și Y_b paralelele (A) și (B) la Ox. Se obține astfel fîșia (R) cuprinsă între (A) și (B) Un rezultat nemijlocit al definițiilor lui Y_a și Y_b este faptul că orice segment din $\mathcal{M}$ are cel puțin un punct comun cu (R).

Notăm cu $S(A)$ mulțimea segmentelor S_i din $\mathcal{M}$, pentru care $a_i = Y_a$, și cu $S(B)$ mulțimea acelora pentru care $b_j = Y_b$. Cu aceste precizări și notații are loc următoarea:

LEMA 2. *Dacă un segment din $S(A)$ este la stînga unui segment din $S(B)$, atunci toate segmentele din $S(A)$ sînt la stînga tuturor segmentelor din $S(B)$.*

Demonstrație. Fie S_A și S'_B din $S(A)$, iar S_B și S'_B din $S(B)$ și în plus S_A la stînga lui S_B. Atunci S'_A nu poate fi la dreapta lui S_B deoarece S_A, S_B și S'_A, conform lemei 1, nu ar fi colineare; S'_A nu poate fi nici între S'_B și S_B fiindcă atunci, conform aceleiași leme S'_B, S_A și S_B nu ar fi colineare. Din aceleași motive S'_B nu poate fi la stînga lui S_A.

Vom trece acum la demonstrarea propriu-zisă a teoremei. Fără a restrînge generalitatea, putem presupune că segmentele din $S(A)$ se află la stînga segmentelor din $S(B)$. Fie $S_{\alpha_1} \in S(A)$ și situat la dreapta tuturor

segmentelor din $S(A)$ și $S_{\beta_1} \in S(B)$ și situat la stînga tuturor segmentelor din $S(B)$ (fig. 3). Notăm cu (Δ_1) dreapta determinată de punctele $P_1(x_{\alpha_1}, a_{\alpha_1})$ și $Q_1(x_{\beta_1}, b_{\beta_1})$. Orice segment S_i din $\mathcal{M}$ situat la stînga lui S_{α_1} sau la

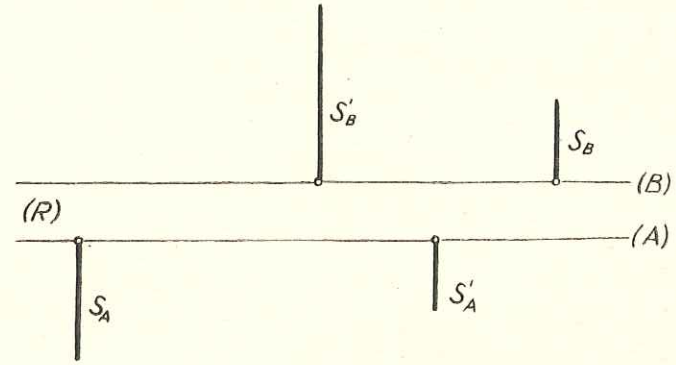

Fig. 2

dreapta lui S_{β_1}, este intersectat de (Δ_1), deoarece în caz contrar sau ar exista un segment care nu are puncte comune cu (R) (vezi S_1), sau ar fi contrazisă lema 1 (vezi S_2); deci numai între S_{α_1} și S_{β_1} pot exista segmente din $\mathcal{M}$ neintersectate de (Δ_1).

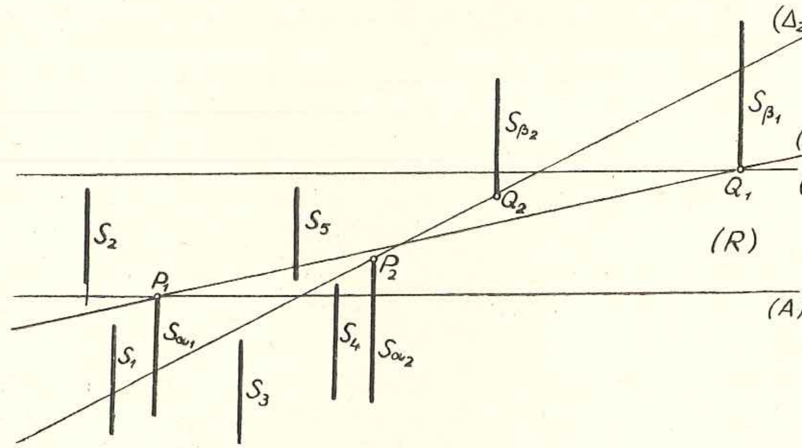

Fig. 3

Următoarea afirmație, analoagă lemei 2, este o consecință a lemei 1:

Toate segmentele situate în același semiplan cu S_{α_1} și care nu sînt intersectate de (Δ_1), se află la stînga tuturor segmentelor situate în semilan opus și neintersectate de (Δ_1).

Fie S_{α_2} primul segment la dreapta lui S_{α_1}, situat față de (Δ_1) în același semiplan cu S_{α_1} și care nu este intersectat de (Δ_1), iar dacă un asemenea segment nu există, $S_{\alpha_2} \equiv S_{\alpha_1}$; în mod analog, fie S_{β_2} primul segment la stînga lui S_{β_1} în același semiplan cu S_{β_1} și neintersectat de (Δ_1), iar dacă un asemenea segment nu există, $S_{\beta_2} \equiv S_{\beta_1}$. Punctele P_2 și Q_2 determină dreapta (Δ_2), care intersectează toate segmentele situate la stînga lui S_{α_2} sau la dreapta lui S_{β_2} ; în caz contrar, sau ar exista un segment care nu are puncte comune cu (R) (vezi S_3), sau S_{α_2} nu ar fi primul segment la dreapta lui S_{α_1} în același semiplan cu el și neintersectat de (Δ_1) (vezi S_4), sau, în fine, ar fi contrazisă lema 1 (vezi S_5, S_{α_2}, S_{β_2}).

Continuînd în acest fel, deoarece mulțimea $\mathcal{M}$ este finită, vom ajunge la un moment dat la două segmente S_{α_n} și S_{β_n} astfel ca între ele să nu mai existe nici un segment S_i din $\mathcal{M}$ neintersectat de (Δ_n). Pe de altă parte, (Δ_n) intersectează toate segmentele din $\mathcal{M}$ situate la stînga lui S_{α_n} sau la dreapta lui S_{β_n}, deci (Δ_n) intersectează toate segmentele lui $\mathcal{M}$. Teorema 1 este astfel demonstrată.

3. Teorema 1 se poate generaliza imediat precum urmează :

TEOREMA 2. *Fie în E_3 dat un număr finit de paralelograme situate în plane distincte și avînd laturile paralele cu două direcții date. Dacă oricare trei paralelograme admit o secantă comună, atunci toate paralelogramele admit o secantă comună.*

Demonstrație. Considerăm o dreaptă perpendiculară pe planul determinat de cele două direcții. Prin această dreaptă ducem două plane (P_1) și (P_2) paralele cu cele două direcții date. Proiectăm paralelogramele paralel cu a doua, respectiv prima direcție, pe cele două plane (P_1) și (P_2). Pe fiecare din plane sînt îndeplinite condițiile teoremei 1, deci atît în (P_1) cît și în (P_2) există cel puțin cîte o dreaptă (Δ_1), respectiv (Δ_2) care intersectează toate segmentele. Aceste două drepte sînt însă proiecțiile pe (P_1), respectiv (P_2) ale unei drepte din spațiu (Δ) care evident intersectează toate paralelogramele din enunțul teoremei.

4. Teorema 2 nu se poate generaliza în sensul înlocuirii paralelogramelor cu laturi paralele cu figuri convexe arbitrare, chiar dacă acestea sînt așezate în plane paralele. Vom ilustra acest fapt printr-un exemplu.

Să considerăm tetraedrul $SABC$ și un plan SBD, care trece prin muchia SB. Vom intersecta acest tetraedru cu trei plane paralele cu ABC. Fie (fig. 4) acestea P_1, P_2 și P_3. Notăm M_1N_1 intersecția lui P_1 cu SCB, M_2N_2 intersecția lui P_2 cu SAB și M_3N_3 intersecția lui P_3 cu SBD. Segmentele AC, M_1N_1, M_2N_2 și M_3N_3 snt dispuse în plane paralele, oricare trei admit o secantă comună dar nu există o secantă comună pentru toate.

Acest fapt este evident deoarece dintre toate dreptele care unesc pe AC cu M_3N_3, numai AN_3 intersectează pe M_2N_2 și numai CN_3 intersectează pe M_1N_1.

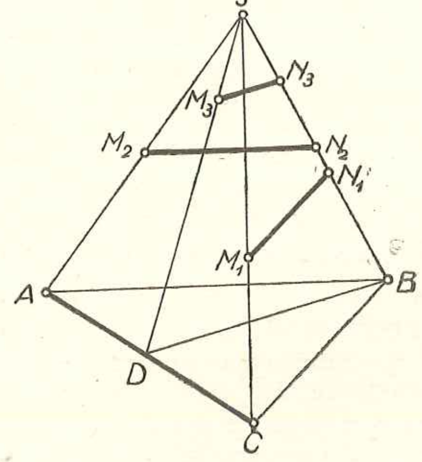

Fig. 4

Ne propunem totuși să studiem în ce condiții teoremele 1 și 2 pot fi generalizate.

5. În cele ce urmează ne va fi utilă următoarea lemă :

LEMA 3. *Fie trei segmente de dreaptă M_1N_1, M_2N_2 și M_3N_3 avînd extremitățile M_1, M_2, M_3 respectiv N_1, N_2, N_3 colineare și în așa fel ca să existe un plan care trece prin M_2N_2, iar M_1N_1 și M_3N_3 sînt situate de o parte, respectiv de cealaltă parte a planului. Atunci, oricum am lua un punct A pe unul din segmente, există cîte un punct pe fiecare din celelalte două segmente, astfel ca cele trei puncte să fie colineare.*

Demonstrație. Dacă dreptele M_1M_2, N_1N_2 sînt situate în același plan, proprietatea este evidentă. În caz contrar, fie de exemplu A situat pe segmentul M_3N_3. Deoarece punctele M_3 și N_3 sînt situate de o parte și de cealaltă a planului AM_1N_1, rezultă că dreapta determinată de planele AM_1N_1 și AM_2N_2 intersectează toate cele trei segmente.

Să considerăm acum o mulțime $\mathcal{M}$ de corpuri convexe $S_1, S_2, \ldots S_m$ în spațiul euclidian tridimensional. Spunem că un plan P separă două corpuri S_i și S_k dacă $S_i \in H \cup P$ și $S_k \in H^* \cup P$, unde H și H^* sînt cele două semispații deschise determinate de P. Să atașăm fiecărui cuplu S_iS_k, mulțimea $\mathcal{F}_{ik}$ a tuturor dreptelor care intersectează ambele corpuri.

TEOREMA 3. *Intersecția lui $\mathcal{F}_{ik}$ cu un plan P care separă corpurile S_i și S_k, sau cu un plan paralel la acesta și care nu intersectează nici unul din cele două corpuri, este o figură plană convexă.*

Demonstrație. Fie M_i, N_i respectiv M_k, N_k puncte de intersecție a două drepte din $\mathcal{F}_{ik}$ cu corpul S_i, respectiv S_k, iar M și N punctele de intersecție a dreptelor M_iM_k și N_iN_k cu planul P. Conform lemei 3, oricare ar fi un punct pe segmentul MN, există cîte un punct pe M_iN_i, respectiv M_kN_k astfel ca cele trei puncte să fie colineare. Cum însă corpurile S_i și S_k sînt convexe, ele conțin segmentele M_iN_i, respectiv M_kN_k, și de aici concluzia că întreg segmentul MN aparține intersecției lui P cu $\mathcal{F}_{ik}$.

LEMA 4. *Fie n segmente de dreaptă M_1N_1, M_2N_2, ..., M_nN_n avînd extremitățile M_1, M_2, ..., M_n, respectiv N_1, N_2, ..., N_n colineare și fiind situate în plane paralele. Oricum am lua un punct A pe unul din segmente, există cîte un punct pe fiecare din celelalte segmente astfel ca cele n puncte să fie colineare.*

Demonstrație. Observăm că M_1N_1, M_2N_2, ..., M_nN_n fac parte dintr-un sistem de generatoare rectilinii ale unui paraboloid hiperbolic și se știe că există o generatoare rectilinie din celălalt sistem care trece prin A.

În continuare vom presupune că mulțimea $\mathcal{M}$ este compusă din figuri plane convexe așezate în plane paralele. Vom nota cu $\mathcal{F}_{ijk}$ mulțimea formată de dreptele care intersectează trei figuri S_i, S_j și S_k din $\mathcal{M}$.

TEOREMA 4. *Intersecția lui $\mathcal{F}_{ijk}$ cu un plan P paralel cu planele figurilor mulțimii $\mathcal{M}$, este o figură plană convexă.*

Demonstrație. Considerăm două drepte din $\mathcal{F}_{ijk}$ care intersectează în M_i, M_j, M_k, M, respectiv N_i, N_j, N_k, N, figurile S_i, S_j, S_k și planul P. Conform lemei 4, oricare ar fi un punct A de pe segmentul MN, există o dreaptă din $\mathcal{F}_{ijk}$ care trece prin A. Acest fapt demonstrează teorema.

6. Fie $\mathcal{M}$ o mulțime de corpuri convexe în E_n. Un punct din E_n îl vom numi *punct V al mulțimii $\mathcal{M}$* dacă se bucură de următoarele două proprietăți:

a°. Oricare n corpuri din $\mathcal{M}$ admit o secantă comună care trece prin V.

b°. Există o varietate liniară E'_{n-1} n—1-dimensională care îl conține pe V și toate corpurile mulțimii $\mathcal{M}$ se află de aceeași parte a acestei varietăți liniare.

TEOREMA 5. *Condiția necesară și suficientă ca să existe o secantă comună tuturor corpurilor mulțimii $\mathcal{M}$, este ca $\mathcal{M}$ să admită un punct V.*

Demonstrație. Să presupunem că $\mathcal{M}$ admite un punct V. Fie S_i un corp din $\mathcal{M}$. Mulțimea semidreptelor cu extremitatea în V și care intersectează pe S''_i formează un con convex C_i. Vom considera acum o varietate liniară E''_{n-1}, n—1-dimensională, paralelă cu varietatea E'_{n-1} și astfel situată încît corpurile mulțimii $\mathcal{M}$ să fie situate între cele două varietăți

liniare. Intersecția lui C_i cu varietatea liniară E''_{n-1} este evident un corp convex D_i, n — 1-dimensional. Condiția a° ne asigură că oricare n corpuri D_i au cel puțin un punct comun, deci conform teoremei lui Helly, toate au un punct comun. Acesta împreună cu V determină secanta comună a corpurilor mulțimii $\mathcal{M}$. Astfel suficiența condiției a fost demonstrată. Necesitatea este evidentă.

7. Să considerăm o mulțime $\mathcal{M}$ de figuri convexe S_1, S_2, ..., S_m în plan. Faptul că oricare trei figuri admit o secantă comună revine la aceea că

$$\mathcal{F}_{ijk} = \mathcal{F}_{ij} \cap \mathcal{F}_{jk} \neq \theta \tag{1}$$

unde θ este mulțimea vidă de drepte. Fie (Δ) o dreaptă, astfel ca toate figurile mulțimii $\mathcal{M}$ să fie de aceeași parte a ei, iar o paralelă la (Δ) să nu intersecteze mai mult decît o figură din $\mathcal{M}$. Conform teoremei 4, intersecția oricărui $\mathcal{F}_{ik}$ cu dreapta (Δ) este o figură convexă F_{ik}. Relația (1) ne asigură că pe dreapta (Δ) sînt îndeplinite condițiile pentru aplicarea teoremei lui E. H e l l y [2]. Punctul comun tuturor mulțimilor F_{ik} este un punct V pentru mulțimea $\mathcal{M}$ și conform teoremei 5, figurile mulțimii $\mathcal{M}$ admit o secantă comună. Se regăsește astfel o teoremă demonstrată de V. L. K l e e [3] și B. G r ü n b a u m [1].

8. Vom considera acum spațiul euclidian tridimensional și vom presupune că mulțimea $\mathcal{M}$ se compune din figuri plane convexe așezate în plane paralele.

Are loc următoarea teoremă:

TEOREMA 6. *Fie în E_3 o mulțime $\mathcal{M}$ de figuri plane convexe S_1, S_2, ..., S_m dispuse în plane paralele. Dacă oricare 5 figuri din $\mathcal{M}$ admit o secantă comună, atunci există o secantă comună tuturor figurilor din $\mathcal{M}$.*

Demonstrație. Să considerăm pentru început că mulțimea $\mathcal{M}$ se compune din 6 figuri S_1, ..., S_6. Faptul că oricare 5 figuri admit o secantă comună implică $\mathcal{F}_{12345} \neq \theta$, $\mathcal{F}_{12346} \neq \theta$, $\mathcal{F}_{12356} \neq \theta$, $\mathcal{F}_{12456} \neq \theta$. Fie P un plan paralel cu planele figurilor mulțimii $\mathcal{M}$ astfel situat încît toate figurile mulțimii $\mathcal{M}$ să se găsească de aceeași parte a lui P. Să notăm $F_{ijk} = \mathcal{F}_{ijk} \cap P$.

Atunci:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{12345} &= \theta \text{ implică } F_{123} \cap F_{124} \cap F_{125} \neq 0 \\ \mathcal{F}_{12346} &= \theta \text{ implică } F_{123} \cap F_{124} \cap F_{126} \neq 0 \\ \mathcal{F}_{12356} &= \theta \text{ implică } F_{123} \cap F_{125} \cap F_{126} \neq 0 \\ \mathcal{F}_{12456} &= \theta \text{ implică } F_{124} \cap F_{125} \cap F_{126} \neq 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Teorema 4 ne asigură că mulţimile F_{123}, F_{124}, F_{125}, F_{126} sînt convexe, iar (2) şi teorema lui Helly ne asigură că $F_{123} \cap F_{124} \cap F_{125} \cap F_{126} \neq 0$. Un punct aparţinînd acestei intersecţii este un punct V pentru mulţimea $\mathcal{M}$, şi conform teoremei 5 figurile $S_1, \ldots, S_6$ admit o secantă comună. Pentru cazul cînd $\mathcal{M}$ conţine mai multe figuri, demonstraţia se face din aproape în aproape.

О ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВАХ, ДОПУСКАЮЩИХ ОБЩИЕ СЕКУЩИЕ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В этом труде даётся новое доказательство теоремы, установленной Л. А. Сантало в труде [6], добиваясь одновременно следующего обобщения:

ТЕОРЕМА 6. *Пусть в E_3 конечное семейство $\mathcal{M}$ плоских выпуклых фигур, находящихся в отдельных паралельных плоскостях. Если любые 5 фигур в $\mathcal{M}$ допускают общую секущую, то все фигуры в $\mathcal{M}$ допускают общую секущую.*

SUR LES ENSEMBLES CONVEXES QUI ADMETTENT DES SÉCANTES COMMUNES

RÉSUMÉ

Dans ce travail on donne une nouvelle démonstration du théorème établi par L. A. Santaló dans le travail [6], et l'on obtient en même temps la généralisation suivante :

THÉORÈME 6. *Soit dans E_3 une famille finie $\mathcal{M}$ de figures planes convexes situées dans des plans parallèles distincts. Si 5 figures quelconques de $\mathcal{M}$ admettent une sécante commune, alors toutes les figures de $\mathcal{M}$ admettent une sécante commune.*

BIBLIOGRAFIE

1. Grünbaum B., *On a theorem of L. A. Santaló*. Pacific J. Math., 5, 351–359 (1955).
2. Helly E., *Über Mengen konvexer Körper mit gemeinschaftlichen Punkten*. Jber. Deutsch. Math. Verein, 32, 175–176 (1923).
3. Klee V. L., *Common secants for plane convex sets*. Proc. of the Amer. Math. Soc., 4, 639–641 (1954).

4. Moldovan Elena, *Asupra noţiunii de funcţie convexă faţă de o mulţime de funcţii interpolatoare*. Studii şi cercet. de matem. (Cluj), IX, *1–4*, 161–224 (1958).
5. Rademacher H., Schoenberg I. J., *Helly's theorem on convex domains and Tchebycheff's approximation problem*. Canad. J. of Math., 2, 245–256 (1950).
6. Santaló L. A., *Supplement to the note: A theorem on sets of parallelipipedes with parallel edges*. Publ. Inst. Mat. Univ. Nac. Litoral, *3*, 202–210 (1942).
7. Vincensini P., *Figures convexes et variétés linéaires de l'espace euclidien à n dimensions*. Bull. des Sci. Math., 59, 163–174 (1935).

Primit la 15. I. 1963.