O PROBLEMĂ DE MINIMUM ÎN TEORIA INTERPOLAȚIEI

DE

DUMITRU RIPIANU

(Cluj)

Lucrare prezentată în ședința de comunicări din 16 aprilie 1963 a Institutului de calcul al Academiei R.P.R. – Filiala Cluj

1. În această notă se tratează următoarea problemă :

Se consideră ecuația diferențială lineară cu coeficienți reali constanți

$$y'' + c_1 y' + c_2 y = 0. \tag{1}$$

Se înseamnă cu $\varphi(x)$ funcția lui Cauchy a ecuației, adică integrala $\varphi(x)$ a ei, pentru care $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$ și cu h cea mai mică rădăcină pozitivă a lui $\varphi'(x)$, în cazul cînd $\varphi'(x)$ are asemenea rădăcini. Se mai înseamnă cu $\mathcal{H}$ mulțimea tuturor ecuațiilor de forma (1) pentru care numărul h există – bineînțeles că în general h diferă de la o ecuație la alta – cu $m_i = |c_i|$ $(i = 1, 2)$ și în sfîrșit cu $\mathcal{A}$ mulțimea perechilor (a_1, a_2) de numere pozitive a_1 și a_2, care au proprietatea că relația de tip de la Vallée-Poussin

$$1 \leq a_1 m_1 h + a_2 m_2 h^2 \tag{2}$$

are loc pentru orice ecuație din $\mathcal{H}$.

Această mulțime nu este vidă, cum se va constata mai jos, și este mărginită inferior, așa că se poate pune problema existenței și, în caz afirmativ, a determinării elementelor ,,minime'' ale ei. Problema depinde bineînțeles de definiția dată acestor elemente ,,minime''. În nota [1] s-a tratat această problemă în cazul cînd numărul h este cea mai mică rădăcină pozitivă a lui $\varphi(x)$ și în (1) c_1 și c_2 sînt funcții continue de x. Se va adopta definițiile elementelor minime date în acea notă. Astfel :

1. Un element $(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ din $\mathcal{A}$ se numește *element minim relativ* în raport cu a_2, dacă orice element $(\bar{a}_1, a_2)$ cu $a_2 < \bar{a}_2$ nu aparține lui $\mathcal{A}$.

2. Un element $(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ din $\mathcal{A}$ se numește *element minim absolut* în raport cu a_2, dacă orice element (a_1, a_2) cu $a_2 < \bar{a}_2$ și orice element $(a_1, \bar{a}_2)$ cu $a_1 < \bar{a}_1$ nu aparțin lui $\mathcal{A}$.

3. Un element $(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ din $\mathcal{A}$ se numește *element minim* în raport cu funcția $f(a_1, a_2)$ definită pe toată mulțimea $\mathcal{A}$, dacă $f_1(\bar{a}_1, \bar{a}_2) = \min\limits_{(a_1, a_2) \in \mathcal{A}} f(a_1, a_2)$.

Definițiile 1 și 2 se pot da bineînțeles și în raport cu a_1 și este de prisos să le mai prezintăm.

În prezenta notă se determină perechile minime relativ în raport cu a_1 sau cu a_2 (teoremele 1—4). Cu titlu de aplicație simplă a acestor rezultate se determină și perechile minime în raport cu cîteva funcții de forma cea mai simplă.

2. Se va determina mai întîi perechea minimă relativ în raport cu a_2 stabilindu-se

TEOREMA 1. I. *Perechea minimă relativ în raport cu a_2 este $(a_1, \alpha(a_1))$, unde funcția $\alpha(\alpha_1)$ se deinește astfel:*

1°. *Dacă $0 < a_1 < \frac{1}{4}$, $\alpha(a_1)$ este rădăcina mai mare ca numărul $1-2a_1$ a funcției de variabila a_2*

$$f_7(a_2) = \frac{1}{\sqrt{2}\, a_1 a_2} \Big\{ (1-a_1)^2 a_2^2 - 4a_1^2 a_2 - 4a_1^4 +$$

$$+ [(1+a_1)\, a_2 + 2a_1^2] \sqrt{(1-6a_1+a_1^2)a_2^2 + 4a_1^2(1-a_1)a_2 + 4a_1^4} \Big\}^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \ln \frac{1}{4a_1^3} \Big(2a_1^2(1-a_1) + (1-4a_1-a_1^2)\, a_2 +$$

$$+ (1-a_1) \sqrt{4a_1^4 + 4a_1^2(1-a_1)\, a_2 + (1-6a_1+a_1^2)\, a_2^2} -$$

$$- \sqrt{2} \Big\{ 4a_1^4(1-2a_1-a_1^2) + 4a_1^2(1-a_1)(1-3a_1)\, a_2 + (1-8a_1+14a_1^2+a_1^4)a_2^2 +$$

$$+ (1-a_1)[2a_1^2(1-a_1) + (1-4a_1-a_1^2)a_2] \sqrt{4a_1^4 + 4a_1^2(1-a_1)a_2 + (1-6a_1+a_1^2)a_2^2} \Big\}^{\frac{1}{2}} \Big)^{*)}$$

2°. *Dacă $a_1 = \frac{1}{4}$, atunci $\alpha(a_1) = \frac{1}{2}$.*

---

*) Termenul în ln din expresia lui $f_7(a_2)$ se mai poate scrie: $2 \ln \frac{1}{2} \Big(\Big\{ \frac{1}{2a_1^3} \Big[2a_1^2(1+a_1) +$

$$+ a_2(1-4a_1-a_1^2) + (1-a_1) \sqrt{4a_1^4 + 4a_1^2(1-a_1)a_2 + (1-6a_1+a_1^2)a_2^2} \Big] \Big\}^{\frac{1}{2}} -$$

$$- \Big\{ \frac{1}{2a_1^3} \Big[2a_1^2(1-3a_1) + a_2(1-4a_1-a_1^2) + (1-a_1) \sqrt{4a_1^4 + 4a_1^2(1-a_1)\, a_2 + (1-6a_1+a_1^2)a_2^2} \Big] \Big\}^{\frac{1}{2}} \Big).$$

3°. *Dacă $\frac{1}{4} < a_1 < \frac{4}{\pi^2}$, atunci $\alpha(a_1)$ este rădăcina mai mare ca numărul $1-2a_1$ a funcției de variabila a_2*

$$f_{18}(a_2) = -\frac{1}{2\sqrt{2}\, a_1 a_2} \Big\{ 4a_1^4 + 4a_1^2 a_2 - (1-a_1)^2 a_2^2 +$$

$$+ [2a_1^2 + (1+a_1)a_2] \sqrt{4a_1^4 + 4a_1^2(1-a_1)\, a_2 + (1-6a_1+a_1^2)a_2^2} \Big\}^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}\,(a_2 - a_1)} \Big\{ 2a_1^3 + (1-a_1^2)\, a_2 - 2a_2^2 +$$

$$+ (1-a_1) \sqrt{4a_1^4 + 4a_1^2(1-a_1)a_2 + (1-6a_1+a_1^2)a_2^2} \Big\}^{\frac{1}{2}\,*)}$$

4°. *Dacă $a_1 \geqq \frac{4}{\pi^2}$, $\alpha(a_1) = \frac{4}{\pi^2}$.*

II. *Dacă $3 - 2\sqrt{2} < a_1 < \frac{4}{\pi^2}$, atunci $\alpha(a_1) < \frac{2a_1^2}{a_1 - 1 + 2\sqrt{a_1}}$.*

III. *În cazul 1°, $\lim\limits_{a_1 \to 0} \alpha(a_1) = \infty$.*

Demonstrație. I. Dacă polinomul caracteristic $P_1(r) = r^2 + c_1 r + c_2$ are rădăcinile reale și distincte r_1 și r_2, atunci $\varphi(x) = A(e^{r_1 x} - e^{r_2 x})$ (A constantă), deci $\varphi'(x) = A\,(r_1 e^{r_1 x} - r_2 e^{r_2 x})$.

Dacă $r_1 r_2 \leqq 0$, $\varphi'_1 x) \neq 0$ pentru $x \geqq 0$, iar dacă $r_1 r_2 > 0$, atunci $\varphi(x)$ are singura rădăcină $x = \frac{1}{r_2 - r_1} \ln \frac{r_1}{r_2}$, care este negativă dacă r_1 și r_2 sînt pozitive și pozitivă dacă r_1 și r_2 sînt negative. În acest caz, dacă se însemnă $r_1 = -R_1$, $r_2 = -R_2$ cu $0 < R_2 < R_1$, se are $h = \frac{1}{R_1 - R_2} \ln \frac{R_1}{R_2}$, $m_1 = R_1 + R_2$, $m_2 = R_1 R_2$, așa că (2) se scrie:

$$a_2 \frac{s}{(1-s)^2} \ln^2 s - a_1 \frac{1+s}{1-s} \ln s - 1 \geqq 0$$

cu $0 < s = \frac{R_2}{R_1} < 1$.

Această relație se scrie

$$a_2 \frac{s}{(1-s)^2} \Big[\ln s - \frac{a_1}{a_2} \frac{1-s^2}{2s} - \frac{1-s}{2a_2 s} \sqrt{4a_2 s + a_1^2(1+s)^2}\, \Big] \times$$

$$\times \Big[\ln s - \frac{a_1}{a_2} \frac{1-s^2}{2s} + \frac{1-s}{2a_2 s} \sqrt{4a_2\, s + a_1^2(1+s)^2} \Big] \geqq 0.$$

---

*) Prin arctg x se înțelege peste tot arcul din intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$; se va însemna ca de obicei prin ( ) intervalele deschise, iar prin [ ] cele închise.

Dat fiind că expresia din întîia parenteză dreaptă de mai sus este evident negativă, relația acestea se scrie

$$f_1(s) = \ln s - \frac{a_1}{a_2} \frac{1-s^2}{2s} + \frac{1-s}{2a_2 s} \sqrt{4a_2 s + a_1^2(1+s)^2} \leqq 0.$$

$$(0 < s < 1). \tag{3}$$

Dacă polinomul caracteristic are rădăcina dublă ρ, evident reală și nenulă întrucît pentru ecuația $y'' = 0$ problemă noastră nu se pune, atunci $\varphi(x) = A\, x\, e^{\rho x}$, deci $\varphi'(x) = A\, e^{\rho x}(1 + \rho x)$. Dacă $\rho > 0$, $\varphi'(x) > 0$, pentru $x \geqq 0$, iar dacă $\rho < 0$, atunci $h = -\frac{1}{\rho}$, $m_1 = -2\rho$, $m_2 = \rho^2{}_1$, așa că (2) se scrie

$$2a_1 + a_2 - 1 \geqq 0. \tag{4}$$

Dacă polinomul caracteristic are rădăcinile complexe $\alpha \pm i\,\beta$ $(\beta > 0)$, atunci $\varphi(x) = A\, e^{\alpha x} \sin \beta x$, deci $\varphi'(x) = A\, e^{\alpha x}(\alpha \sin \beta x + \beta \cos \beta x) = 0$ cînd $\operatorname{tg} \beta\, x = -\frac{\beta}{\alpha}$.

Dacă $\alpha < 0$, atunci $x = \frac{1}{\beta}\left|k\pi + \operatorname{arctg}\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)\right|$, deci $h = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg}\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)$, $m_1 = -2\alpha$, $m_2 = \alpha^2 + \beta^2$, așa că (2) se scrie

$$a_2 \frac{1+s^2}{s^2} (\operatorname{arctg} s)^2 + \frac{2a_1}{s} \operatorname{arctg} s - 1 \geqq 0, \text{ cu } s = -\frac{\beta}{\alpha} > 0.$$

Această relație se scrie

$$a_2 \frac{1+s^2}{s^2} \left[\operatorname{arctg} s + \frac{a_1 s}{a_2(1+s^2)} + \frac{s}{a_2(1+s^2)} \sqrt{a_2 + a_1^2 + a_2 s^2}\right] \times$$
$$\times \left[\operatorname{arctg} s + \frac{a_1 s}{a_2(1+s^2)} - \frac{s}{a_2(1+s^2)} \sqrt{a_1 + a_1^2 + a_1 s^2}\right] \geqq 0.$$

Dat fiind că expresia din întîia paranteză dreaptă este evident pozitivă, relația se scrie

$$f_2(s) = \operatorname{arctg} a + \frac{a_1 s}{a_2(1+s^2)} - \frac{s}{a_2(1+s^2)} \sqrt{a_2 + a_1^2 + a_2 s^2} \geqq 0 \ (s > 0). \tag{5}$$

Dacă $\alpha = 0$, $\varphi(x) = A \sin \beta x$, $\varphi'(x) = A\beta \cos \beta x$, $h = \frac{\pi}{2\beta}$, $m_1 = 0$, $m_2 = \beta^2$, așa că (2) se scrie

$$a_2 \geqq \frac{4}{\pi^2}. \tag{6}$$

Dacă $\alpha > 0$, $\varphi'(x) = 0$ cînd $x = \frac{1}{\beta}\left(k\pi - \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha}\right)$ (k întreg), deci $h = \frac{1}{\beta}\left(\pi - \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha}\right)$, $m_1 = 2\alpha$, $m_2 = \alpha^2 + \beta^2$, așa că (2) se scrie

$$a_2 \frac{1+s^2}{s^2} (\pi - \operatorname{arctg} s)^2 + \frac{2}{s} a_1(\pi - \operatorname{arctg} s) - 1 \geqq 0 \text{ cu } s = \frac{\beta}{\alpha} > 0.$$

Relația aceasta se scrie în forma

$$a_2 \frac{1+s^2}{s^2} \left[\pi - \operatorname{arctg} s + \frac{a_1 s}{a_2(1+s^2)} + \frac{s}{a_2(1+s^2)} \sqrt{a_2 + a_1^2 + a_2 s^2}\right] \times$$
$$\times \left[\pi - \operatorname{arctg} s + \frac{a_1 s}{a_2(1+s^2)} - \frac{s}{a_2(1+s^2)} \sqrt{a_2 + a_1^2 + a_2 s^2}\right] \geqq 0.$$

Dat fiind iarăși că expresia din întîia paranteză dreaptă este evident pozitivă, relația se scrie

$$\pi - \operatorname{arctg} s + \frac{a_1 s}{a_2(1+s^2)} - \frac{s}{a_2(1+s^2)} \sqrt{a_2 + a_1^2 + a_2 s^2} \geqq 0 (s > 0) \tag{7}$$

și este evident o consecință a relației (6), pentru că

$$\pi - \operatorname{arctg} s > \frac{\pi}{2}, \tag{8}$$

iar dacă se înseamnă

$$f_3(s) = -\frac{a_1 s}{a_2(1+s^2)} + \frac{s}{a_2(1+s^2)} \sqrt{a_2 + a_1^2 + a_2 s^2} - \frac{\pi}{2},$$

atunci

$$f_3'(s) = \frac{a_2 + a_1^2 + (a_2 - a_1^2)s^2 - a_2(1-s^2)\sqrt{a_2 + a_1^2 + a_2 s^2}}{a_2(1+s^2)^2 \sqrt{a_2 + a_1^2 + a_2 s^2}} > 0,$$

așa că

$$f_3(s) < f_3(\infty) = \frac{1}{\sqrt{a_2}} - \frac{\pi}{2} \leqq 0,$$

așa că

$$\frac{a_1 s}{a_2(1+s^2)} - \frac{s}{a_2(1+s^2)} \sqrt{a_2 + a_1^2 + a_2 s^2} > -\frac{\pi}{2},$$

ceea ce cu ajutorul lui (8) asigură îndeplinirea inegalității stricte în (7).

Așadar, mulțimea $\mathcal{A}$ este alcătuită din perechile (a_1, a_2) care verifică relațiile (3), (4), (5) și (6).

Relaţia (3) dă

$$\left.\begin{aligned} f_1'(s) &= \frac{-(1+s)(a_1^2+2a_2s+a_1^2s^2)+(a_1+2a_2s+a_1s^2)\sqrt{4a_2s+a_1^2(1+s)^2}}{2a_2s^2\sqrt{4a_2s+a_1^2(1+s)^2}} = \\ &= \frac{2P_2(s)}{2\left[(1+s)(a_1^2+2a_2s+a_1^2s^2)+(a_1+2a_2s+a_1s^2)\sqrt{4a_2s+a_1^2(1+s)^2}\right]\sqrt{4a_2s+a_1^2(1+s)^2}} \\ P_2(s) &= a_1^3(1+s^4)+[-2a_1^2(1-a_1)+a_2(-1+4a_1+a_1^2)]s(1+s^2)+ \\ &+ 2[a_1^3+a_2(-1+a_1^2)+2a_2^2]s^2. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Relaţia $P_2(s) = 0$ se scrie, dacă se înseamnă $x = s + \frac{1}{s}$:

$$P_3(x) = a_1^3x^2 + [2a_1^2(-1+a_1) + a_2(-1+4a_1+a_1^2)]x + \\ + 2a_2(-1+a_1^2+2a_2) = 0. \quad (10)$$

Realizantul polinomului $P_3(x)$ este

$$R = (1-a_1)^2[4a_1^4 + 4a_1^2(1-a_1)a_2 + (1-6a_1+a_1^2)a_2^2], \quad (11)$$

iar dacă x_1 şi x_2 sînt rădăcinile lui $P_3(x)$, atunci rădăcinile lui $P_2(s)$ sînt date de ecuaţiile $s^2 - x_1s + 1 = 0$, $s^2 - x_2x + 1 = 0$, ale căror rădăcini se vor însemna cu s_1, s_2, respectiv s_3, s_4 şi care sînt pozitive în singurul caz cînd $x_1 \geqq 2$, respectiv $x_2 \geqq 2$. Ori, $P_3(2) = 4(a_2 + 2a_1 - 1)(a_2 + a_1^2) \geqq$ $\geqq 0$, iar

$$\frac{x_1+x_2}{2} - 2 = \frac{1}{2a_1^3}[2a_1^2(1-3a_1) + a_2(1-4a_1-a_1^2)]. \quad (12)$$

Aşadar, dacă $a_2 + 2a_1 - 1 = 0$, se are

$$x_1 = 2,\ x_2 = x_2(a_1) = \frac{1}{a_1^3}(1-2a_1)(1-4a_1+a_1^2),$$

$$x_2'(a_1) = -\frac{3}{a_1^4}(1-a_1)(1-3a_1).$$

Tabelul 1

a_1	0		$\frac{1}{4}$		$2-\sqrt{3}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$
$x_2'(a_1)$					$-$		0		$+$
$x_2(a_1)$	∞	$\searrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0

În tabelul 1 se are deci pentru $0 < a_1 < \frac{1}{4}$: $x_2 > 2$, aşa că $s_1 = s_2 = 1$, $s_3 = \frac{1}{2}(x_2 - \sqrt{x_2^2 - 4}) < 1$, $s_4 > 1$, deci:

Dacă $a_2 = 1 - 2a_1$, atunci pentru $0 < a_1 < \frac{1}{4}$, $f_1'(s)$ are în intervalul $(0, 1)$ rădăcina s_3, iar dacă $\frac{1}{4} \leqq a_1 < \frac{1}{2}$, $f_1'(s) \neq 0$ pentru $s \in (0, 1)$. (13)

Spre a cerceta semnul expresiilor $f_1(s)$ şi $f_2(s)$ în funcţie de valorile lui a_1 şi a_2, este comod de a reprezenta perechea (a_1, a_2) prin punctul M de coordonate (a_1, a_2) dintr-un plan P raportat la axele perpendiculare Oa_1, Oa_2, în care caz mulţimea $\mathcal{A}$ este reprezentată — cum se va stabili — printr-un anumit domeniu D din acel plan, a cărui frontieră se va însemna cu (C).

Spre a stabili semnul lui R din (11), se va construi dar curba de ecuaţie $4a_1^4 + 4a_1^2(1-a_1)a_2 + (1-6a_1+a_1^2)a_2^2 = 0$ din planul P.

Se deduce de aici

$$a_2 = f_4(a_1) = \frac{2a_1^2}{a_1 - 1 - 2\sqrt{a_1}},\quad a_2 = f_5(a_1) = \frac{2a_1^2}{a_1 - 1 + 2\sqrt{a_1}} \quad (14)$$

aşa că

$$f_4'(a_1) = 2a_1\frac{a_1 - 2 - 3\sqrt{a_1}}{(a_1 - 1 - 2\sqrt{a_1})^2},\quad f_5'(a_1) = 2a_1\frac{a_1 - 2 + 3\sqrt{a_1}}{(a_1 - 1 + 2\sqrt{a_1})^2}.$$

Tabelul 2

a_1	0		$3+2\sqrt{2}$		$\frac{13+3\sqrt{17}}{2}$		∞
$f_4'(a_1)$		$-$			0		$+$
$f_4(a_1)$	0	$\searrow$	$\mp\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}(71+17\sqrt{17})$	$\nearrow$	∞

Tabelul 3

a_1	0		$3-2\sqrt{2}$		$\frac{13-3\sqrt{17}}{2}$		∞
$f_5'(a_1)$		$-$			0		$+$
$f_5(a_1)$	0	$\searrow$	$\mp\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}(71-17\sqrt{17})$	$\nearrow$	∞

Pentru prescurtarea exprimării se va înţelege, în toată nota, prin „curbă" sau „dreaptă" porţiunea din curba sau dreapta respectivă situată în cadranul I al planului de coordonate în care se află curba. În fig. 1 s-a trasat dar în plin curba (C_1) și dreapta (Δ) de ecuație $a_2 + 2a_1 - 1 = 0$, și punctat curba (C_2) de ecuație $2a_1^2(1 - 3a_1) + a_2(1 - 4a_1 - a_1^2) = 0$,

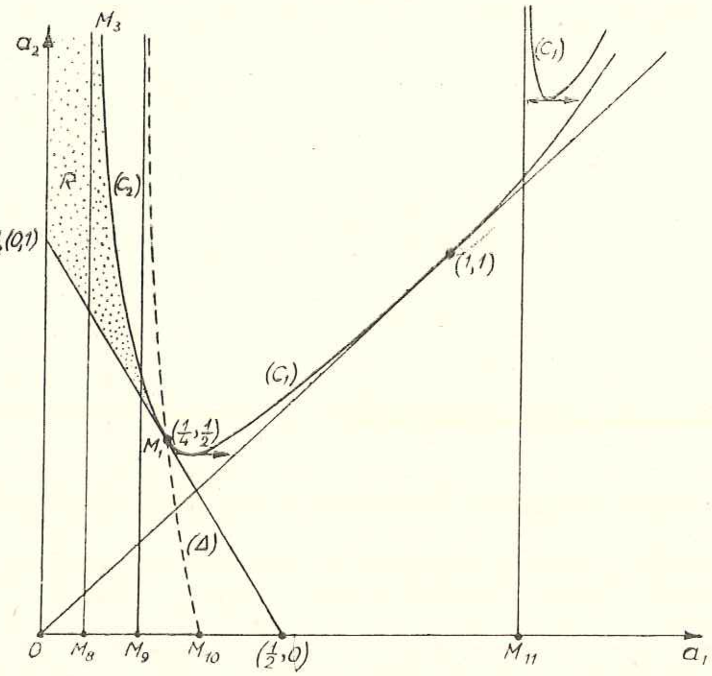

Fig. 1 – **Coordonatele punctelor** : $M_1\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, $M_8\ (3 - 2\sqrt{2},\ 0)$, $M_9\ (\sqrt{5}-2,\ 0)$ $M_{10}\left(\frac{1}{3},\ 0\right)$ și $M_{11}\ (3 + 2\sqrt{2},\ 0)$.

adică $a_2 = f_6(a_1) = 2a_1^2 \dfrac{1 - 3a_1}{-1 + 4a_1 + a_1^2}$

cu

$$f_6'(a_1) = -2a_1 \frac{2 - 13a_1 + 24a_1^2 + 3a_1^3}{(-1 + 4a_1 + a_1^2)^2} < 0,$$

care intervine în semnul expresiei $\dfrac{x_1 + x_2}{2} - 2$ din (12).

Tabelul 4

a_1	0		$\sqrt{5} - 2$		$\frac{1}{3}$		∞
$f_6(a_1)$	0	$\searrow$	$\mp\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Se deduce deci pe fig. 1 cu ajutorul lui (13) că : dacă punctul M se află în regiunea R marcată punctat, atunci $x_2 > x_1 > 2$, deci $f_1'(s)$ are în intervalul (0, 1) rădăcinile

$$s = s_1 = \frac{1}{2}(x_1 - \sqrt{x_1^2 - 4}) \quad \text{și} \quad s = s_3 = \frac{1}{2}(x_2 - \sqrt{x_2^2 - 4})\,; \qquad (15)$$

dacă M se află pe segmentul deschis la capete $\overline{M_1M_2}$, $f_1'(s)$ are în (0, 1) rădăcina $s = s_3$.

Tabelul 5

s	0		s_3		1
$f_1'(s)$		$+$	0	$-$	
$f_1(s)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f_1(s_3)$	$\searrow$	0

În acest ultim caz, tabelul 5 spune că nici un punct din segmentul în chestiune nu aparține domeniului D.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Dacă } M \text{ se află pe ramura (infinită și deschisă în } M_1) \ \widehat{M_1M_3} \\ \text{a lui } (C_1),\ f_1'(s) \text{ are o rădăcină dublă în } (0, 1), \text{ deci } f_1'(s) \geqq 0\,; \text{ dacă} \\ M \text{ se află în restul regiunii din cadranul I situat pe sau deasu-} \\ \text{pra lui } (\Delta),\ f_1'(s) > 0 \text{ cînd } s \in (0, 1)\,; \text{ deci } f_1(s) < f_1(1) = 0.\end{array}\right\} \qquad (16)$$

Se poate presupune deci, în virtutea lui (16), că M se află în regiunea R, așa că $0 < a_1 < \frac{1}{4}$.

Tabelul 6

s	0		s_3		s_1		1
$f_1'(s)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f_1(s)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f_1(s_3)$	$\searrow$	$f_1(s_1)$	$\nearrow$	0

Întrucît expresia $x - \sqrt{x^2 - 4}$ scade cînd x crește peste 2, se are în (15) $s_3 < s_1$.

Se deduce deci din tabelul 6 că condiția necesară și suficientă ca $f_1(s) \leqq 0$ pentru orice $s \in (0, 1)$, este ca $f_1(s_3) \leqq 0$.

Se va considera pe s_3 dat de (15) și (10) ca o funcție de a_2, în care caz (3) și (9) dau

$$f_1(s_3) = f_7(a_2) = \ln s_3 + \frac{(1-a_1)(1-s_3^2)}{a_1 + 2a_2 s_3 + a_1 s_3^2}.$$

Se deduce deci de aici

$$\begin{aligned} f_7(a_2) = {} & \frac{1}{\sqrt{2}a_1 a_2}\Big\{ -4a_1^4 - 4a_2 a_1^2 + (1-a_1)^2 a_2^2 + \\ & + [2a_1^2 + (1+a_1)a_2]\sqrt{4a_1^4 + 4a_1^2(1-a_1)a_2 + (1-6a_1+a_1^2)a_2^2}\Big\}^{\frac{1}{2}} + \\ & + \ln\frac{1}{4a_1^3}\Big(2a_1^2(1-a_1) + a_2(1-4a_1-a_1^2) + \\ & + (1-a_1)\sqrt{4a_1^4 + 4a_1^2(1-a_1)a_2 + (1-6a_1+a_1^2)a_2^2} - \\ & - \sqrt{2}\Big\{4a_1^4(1-2a_1-a_1^2) + 4a_1^2(1-a_1)(1-3a_1)a_2 + \\ & + (1-8a_1+14a_1^2+a_1^4)a_2^2 + (1-a_1)[2a_1^2(1-a_1) + \\ & + a_2(1-4a_1-a_1^2)]\sqrt{4a_1^4 + 4a_1^2(1-a_1)a_2 + (1-6a_1+a_1^2)a_2^2}\Big\}^{\frac{1}{2}}\Big), \end{aligned} \tag{17}$$

așa că

$$\begin{aligned} f_7(1-2a_1) = f_8(a_1) = {} & \frac{1-a_1}{a_1(1-2a_1)}\sqrt{1-4a_1} + \\ & + \ln\frac{1}{2a_1 3}\Big[(1-2a_1)(1-4a_1+a_1^2) - (1-a_1)(1-3a_1)\sqrt{1-4a_1}\Big] \end{aligned}$$

de unde $f_8'(a_1) = -\frac{(1-a_1)(1-4a_1)}{a_1^2(1-2a_1)^2}\sqrt{1-4a_1} < 0$, deci pentru $0 < a_1 <$

$$< \frac{1}{4},\ f_7(1-2a_1) = f_8(a_1) > f_8\left(\frac{1}{4}\right) = 0. \tag{18}$$

Ramura $\widehat{M_1M_3}$ de pe (C_1) are ecuația $a_2 = f_5(a_1)$, așa că se deduce din (16) relația (19), în care s_3 nu figurează ca rădăcină a lui $f_1'(s)$, ci ca o valoare a lui s din intervalul $(0, 1)$:

$$f_1(s_3)\Big|_{M \in \text{arc } M_1M_3} = f_7((f_5(a_1)) < 0 \text{ pentru } 3 - 2\sqrt{2} < a_1 < \frac{1}{4}, \tag{19}$$

ceea ce se poate de altfel verifica și direct, întrucît (17) dă pentru $3 - 2\sqrt{2} < a_1 < \frac{1}{4}$

$$f_7(f_5(a_1)) = f_9(a_1) =$$

$$= \frac{1}{a_1}(1+\sqrt{a_1})\sqrt{1-2\sqrt{a_1}} + \ln\frac{1-a_1-(1+a_1)\sqrt{a_1}-(1-a_1)\sqrt{1-2\sqrt{a_1}}}{\sqrt{a_1}(-1+a_1+2\sqrt{a_1})},$$

așa că

$$f_9'(a_1) = \frac{(1+\sqrt{a_1})(1-2\sqrt{a_1})\sqrt{1-2\sqrt{a_1}}}{a_1^2(-1+a_1+2\sqrt{a_1})} > 0$$

și

$$f_9(a_1) < f_9\left(\frac{1}{4}\right) = 0.$$

Dacă se înseamnă în (3), $f_1(s) = f_{10}(a_2, s)$, atunci

$$\begin{aligned} f_7'(a_2) = {} & \frac{\partial f_{10}(a_2, s)}{\partial a_2}\Big|_{s=s_3} + f_1'(s_3)\frac{ds_3}{da_2} = \frac{\partial f_{10}(a_2, s)}{\partial a_2}\Big|_{s=s_3} = \\ = {} & -\frac{2s_3(1-s_3)}{[2a_2s_3 + a_1^2(1+s_3)^2 + a_1(1+s_3)\sqrt{4a_2s_3 + a_1^2(1+s_3)^2}]\sqrt{4a_2s_3 + a_1^2(1+s_3)^2}} < 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Se deduce deci din (18), (19) și (20) tabelele 7 și 8,

Tabelul 8

a_2	$1-2a_1$		$\alpha(a_1)$		$f_5(a_1)$
$f_7(a_2)$ $=f_1(s_3)$	$f_7(1-2a_1)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$f_7(f_5(a_1))$

Tabelul 7

a_2	$1-2a_1$		$\alpha(a_1)$		∞
$f_1(s_3)$ $=f_7(a_2)$	$f_7(1-2a_1)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

valabile respectiv pentru $0 < a_1 \leqq 3 - 2\sqrt{2}$ și $3 - 2\sqrt{2} < a_1 < \frac{1}{4}$, ceea ce împreună cu (16) spune că

Dacă polinomul caracteristic al ecuației (1) *are rădăcini reale și distincte, atunci în cazul* $0 < a_1 < \frac{1}{4}$, *dacă* $1 - 2a_1 \leqq a_2 < \alpha(a_1)$, *există valori* $s \in (0, 1)$ *cu* $f_1(s) > 0$, *iar dacă* $a_2 \geqq \alpha(a_1)$, *atunci* $f_1(s) \leqq 0$ *pentru toți* $s \in (0, 1)$; *în cazul* $a_1 \geqq \frac{1}{4}$, $f_1(s) < 0$ *pentru orice* $s \in (0, 1)$; $\alpha(a_1)$ *este rădăcina mai mare ca* $1 - 2a_1$ *a funcției de variabila* a_2 : $f_7(a_2)$ *din* (17). (21)

Relația (5) dă

$$\left.\begin{aligned} f_2'(s) = {} & \frac{1}{a_2(1+s^2)^2}\left[a_2 + a_1 + (a_2 - a_1)s^2 - \frac{a_2 + a_1^2 + (a_2 - a_1^2)s^2}{\sqrt{a_2 + a_1^2 + a_2 s^2}}\right] = \\ = {} & \frac{P_4(s)}{(1+s^2)\{a_2 + a_1^2 + (a_2 - a_1^2)s^2 + [a_2 + a_1 + (a_2 - a_1)s^2]\sqrt{a_2 + a_1^2 + a_2 s^2}\}\sqrt{a_2 + a_1^2 + a_2 s^2}} \\ P_4(s) = {} & (a_2 - a_1)^2 s^4 + [-2a_1^3 + (-1 + a_1^2)a_2 + 2a_2^2]s^2 + (a_2 + \\ & + a_1^2)(a_2 + 2a_1 - 1), \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Dacă se înseamnă $x = s^2$, relaţia $P_4(s) = 0$ se scrie

$$P_5(x) = (a_2 - a_1)^2x^2 + [-2a_1^3 + (-1 + a_1^2)a_2 + 2a_2^2]x + \\ + (a_2 + a_1^2)(a_2 + 2a_1 - 1) = 0. \tag{23}$$

Realizantul polinomului $P_5(x)$ este expresia R din (11). Evident că $P_4(s)$ din (22) poate avea cel mult două rădăcini pozitive, care se vor însemna cu s_1 şi s_2. Expresiile $a_2 + a_1 + (a_2 - a_1)s^2$ şi $a_2 + a_1^2 + (a_2 - a_1^2)s^2$ se pot anula deodată în singurul caz $a_1 = 1$, cînd

$$f_2'(s) = \frac{1}{a_2(1+s^2)^2}[1 + a_2 - (1 - a_2)s^2]\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + a_2 + a_2s^2}}\right).$$

Dacă $0 < a_2 < 1$, se deduce de aici tabelul 9, iar dacă $a_2 \geqq 1$, $f_2'(s) > 0$, aşa că $f_2(s) > f_2(0) = 0$, deci

$$\text{dacă } a_1 = 1,\ f_2(s) > 0 \text{ pentru orice } s > 0. \tag{24}$$

Se va presupune deci $a_1 \neq 1$. Pentru ca $f_2'(s_i) = 0$, este deci necesar şi suficient ca

$$[a_2 + a_1^2 + (a_2 - a_1^2)s_i^2]\,[a_2 + a_1 + (a_2 - a_1)s_i^2] > 0.$$

Tabelul 9

s	0		$\sqrt{\dfrac{1+a_2}{1-a_2}}$		∞
$f_2'(s)$		$+$	0	$-$	
$f_2(s)$	0	$\nearrow$	$f_2\left(\sqrt{\dfrac{1+a_2}{1-a_i}}\right)$	$\searrow$	$\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{a_2}} \geqq 0$

Ţinînd seamă că $P_4(s_i) = 0$, relaţia de mai sus se scrie

$$\frac{a_1 - 1}{a_2 - a_1}\Big\{(a_2 + a_1^2)\,[2a_1^2 + (-1 + a_1)a_2] - \\ - [2a_1^4 - a_1^2(1 + a_1)a_2 + (1 - a_1)a_2^2]s_i^2\Big\} > 0. \tag{25}$$

Spre a stabili semnul expresiei $2a_1^4 - a_1^2(1 + a_1)a_2 + (1 - a_1)a_2^2$, se va desena în fig. 2 curba (C_1) de ecuaţie $R = 0$, dată de (11), plin şi curba

(C_3) de ecuaţie $2a_1^4 - a_1^2(1 + a_1)a_2 + (1 - a_1)a_2^2 = 0$ punctat. Se deduce de aici

$$a_2 = f_{11}(a_1) = \frac{4a_1^2}{1 + a_1 + \sqrt{-7 + 10a_1 + a_1^2}}$$

$$a_2 = f_{12}(a_1) = \frac{4a_1^2}{1 + a_1 - \sqrt{-7 + 10a_1 + a_1^2}}$$

$$f_{11}'(a_1) = 4a_1\frac{-14 + 15a_1 + a_1^2 + (2 + a_1)\sqrt{-7 + 10a_1 + a_1^2}}{(1 + a_1 + \sqrt{-7 + 10a_1 + a_1^2})^2\sqrt{-7 + 10a_1 + a_1^2}}$$

$$f_{12}'(a_1) = 4a_1\frac{14 - 15a_1 - a_1^2 + (2 + a_1)\sqrt{-7 + 10a_1 + a_1^2}}{(1 + a_1 - \sqrt{-7 + 10a_1 + a_1^2})^2\sqrt{-7 + 10a_1 + a_1^2}}.$$

În tabelele 10 şi 11 numerele $a_{1,1}$ şi $a_{1,2}$ sînt rădăcinile pozitive ale polinomului $P_6(a_1) = a_1^3 + 10a_1^2 - 27a_1 + 14$.

Tabelul 10

a_1	$4\sqrt{2} - 5$		$a_{1,1}$		1		∞
$f_{11}'(a_1)$		$-$	0	$+$			
$f_{11}(a_1)$	$f_{11}(4\sqrt{2} - 5)$	$\searrow$	$f_{11}(a_{1,1})$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	∞

Tabelul 11

a_1	$4\sqrt{2} - 5$		1		$a_{1,2}$		∞
$f_{12}'(a_1)$				$+$	0	$-$	
$f_{12}(a_1)$	$f_{12}(4\sqrt{2}-5)$	$\nearrow$	$+\infty$	$\nearrow$	$f_{12}(a_{1,2})$	$\searrow$	$-\infty$

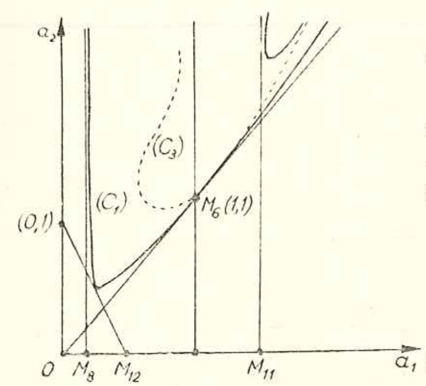

Fig. 2 — Coordonatele punctelor: $M_8(3 - 2\sqrt{2},\ 0)$, $M_{12}\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$ şi $M_{11}(3 + 2\sqrt{2},\ 0)$.

Curbele (C_1) şi (C_3) au singurul punct comun M_6, cum se constată imediat prin eliminarea lui a_2 între ecuaţiile lor. Întrucît în (23) $a_2 + 2a_1 - 1 \geqq 0$, pentru ca $P_4(s)$ să aibă rădăcini pozitive, este necesar ca în (23)

$$2a_1^3 + (1 - a_1^2)a_2 - 2a_2^2 > 0 \tag{26}$$

Se va construi deci în fig. 3 curba (C_1) plin şi curba (C_4) de ecuaţie

$$2a_1^3 + (1 - a_1^2)\,a - 2a_2^2 = 0 \tag{27}$$

punctat.

Se deduce de aici

$$a_2 = f_{13}(a_1) = \frac{1}{4}\left[1 - a_1^2 + \sqrt{(1 - a_1^2)^2 + 16a_1^3}\right]$$

$$f'_{13}(a_1) = a_1 \frac{-1 + 12a_1 + a_1^2 - \sqrt{(1 - a_1^2)^2 + 16a_1^3}}{2\sqrt{(1 - a_1^2)^2 + 16a_1^3}}. \qquad (28)$$

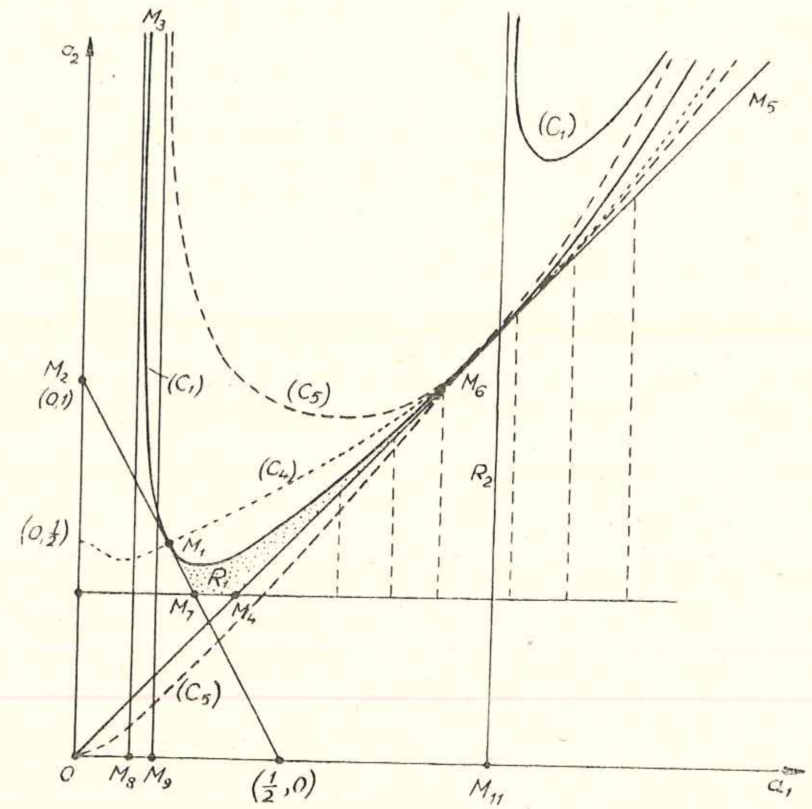

Fig. 3 — Coordonatele punctelor: $M_1\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, $M_4\left(\frac{4}{\pi^2}, \frac{2}{\pi^2}\right)$, $M_6(1, 1)$, $M_7\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2}, \frac{4}{\pi^2}\right)$, $M_8(3 - 2\sqrt{2}, 0)$, $M_9(\sqrt{5} - 2, 0)$.

Tabelul 12

a_1	0		$2\sqrt{21} - 9$		∞
$f'_{13}(a_1)$		$-$	0	$+$	
$f_{13}(a_1)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$3(2\sqrt{21} - 9)$	$\nearrow$	∞

În desenarea fig. 3 s-au folosit următoarele observații :

1°. Minimele din tabelele 3 și 12 sînt $> \frac{4}{\pi^2}$.

2°. Curbele (C_1) și (C_4) au singurele puncte comune M_1 și M_6, cum se constată imediat prin eliminarea lui a_2 între ecuațiile lor. Se constată deci pe fig. 2 și 3 că în punctele M pentru care $P_4(s)$ are rădăcini pozitive, $2a_1^4 - a_1^2(1 + a_1)a_2 + (1 - a_1)a_2^2 > 0$, în care caz (25) se scrie

$$\frac{a_1 - 1}{a_2 - a_1}\left[-x_i + (a_2 + a_1^2)\frac{2a_1^2 + (-1 + a_1)a_2}{2a_1^4 - a_1^2(1 + a_1)a_2 + (1 - a_1)a_2^2}\right] > 0, \qquad (29)$$

unde x_1 și x_2 sînt rădăcinile lui $P_5(x)$ din (23). Așadar

Pentru ca $f_2'(s)$ din (22) să aibă rădăcini pozitive, este necesar și suficient ca relațiile (26), (29) și $R \geqq 0$ cu R dat de (11) să fie îndeplinite. (30)

Ori, (23) dă

$$\left.\begin{aligned} P_5\left[(a_2 + a_1^2)\frac{2a_1^2 + (-1 + a_1)a_2}{2a_1^4 - a_1^2(1 + a_1)a_2 + (1 - a_1)a_2^2}\right] &= \\ = \frac{4a_1^3 a_2^2(1 - a_1)^2(a_2 + a_1^2)(a_2 - a_1)}{[2a_1^4 - a_1^2(1 + a_1)a_2 + (1 - a_1)a_2^2]^2}&, \\ (a_2 + a_1^2)\frac{2a_1^2 + (-1 + a_1)a_2}{2a_1^4 - a_1^2(1 + a_1)a_2 + (1 - a_1)a_2^2} - \frac{x_1 + x_2}{2} &= \\ = (1 - a_1)\frac{a_1^4(a_2 - 2a_1)^2 + a_1^2 a_2^2(a_2 - 4a_1) + a_1a_2^2(4a_2 - a_1) - a_2^3}{2(a_2 - a_1)^2[2a_1^4 - a_1^2(1 + a_1)a_2 + (1 - a_1)a_2^2]}&. \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

Spre a stabili semnul acestei ultime expresii, se va construi tot în fig. 3, cu linii întrerupte, curba (C_5) de ecuație

$$a_1^4(a_2 - 2a_1)^2 + a_1^2a_2^2(a_2 - 4a_1) + a_1a_2^2(4a_2 - a_1) - a_2^3 = 0. \qquad (32)$$

În acest scop, se va însemna $1 + u = \frac{a_1}{a_2}(a_2 - 2a_1)$; (32) se scrie atunci $2a_1^2 - (12 + 6u + u^2)a_1 + 2 + 2u + 3u^2 + u^3 = 0$.

Aşadar

$$
\left.
\begin{array}{ll}
\mathrm{I} & \begin{cases} a_1 = f_{14}(u) = \dfrac{1}{4}\left[12 + 6u + u^2 + (2+u)\sqrt{32+u^2}\right] \\[2mm] a_2 = f_{15}(u) = \dfrac{1}{2}\, \dfrac{\left[12 + 6u + u^2 + (2+u)\sqrt{32+u^2}\right]^2}{8 + 2u + u^2 + (2+u)\sqrt{32+u^2}} \end{cases} \\[8mm]
\mathrm{II} & \begin{cases} a_1 = f_{16}(u) = \dfrac{1}{4}\left[12 + 6u + u^2 - (2+u)\sqrt{32+u^2}\right] \\[2mm] a_2 = f_{17}(u) = \dfrac{1}{2}\, \dfrac{\left[12 + 6u + u^2 - (2+u)\sqrt{32+u^2}\right]^2}{8 + 2u + u^2 - (2+u)\sqrt{32+u^2}} \end{cases} \\[8mm]
\mathrm{I} & \begin{cases} \dfrac{da_1}{du} = f'_{14}(u) = \dfrac{1}{2\sqrt{32+u^2}}\left[16 + u + u^2 + (3+u)\sqrt{32+u^2}\right] \\[2mm] \dfrac{da_2}{du} = f'_{15}(u) = 2\left[12 + 6u + u^2 + (2+u)\sqrt{32+u^2}\right] \times \\[2mm] \times \dfrac{192 + 98u + 30u^2 + 3u^3 + u^4 + (34 + 14u + 3u^2 + u^3)\sqrt{32+u^2}}{\left[8 + 2u + u^2 + (2+u)\sqrt{32+u^2}\right]^2 \sqrt{32+u^2}} \end{cases} \\[8mm]
\mathrm{II} & \begin{cases} \dfrac{da_1}{du} = f'_{16}(u) = \dfrac{1}{2\sqrt{32+u^2}}\left[-(16 + u + u^2) + (3+u)\sqrt{32+u^2}\right] \\[2mm] \dfrac{da_2}{du} = f'_{17}(u) = 2\left[12 + 6u + u^2 - (2+u)\sqrt{32+u^2}\right] \times \\[2mm] \dfrac{-(192 + 98u + 30u^2 + 3u^3 + u^4) + (34 + 14u + 3u^2 + u^3)\sqrt{32+u^2}}{\left[8 + 2u + u^2 - (2+u)\sqrt{32+u^2}\right]^2 \sqrt{32+u^2}} \end{cases}
\end{array}
\right\} \quad (33)
$$

Tabelul 13

u	$-\infty$		u_2		$-(3+\sqrt{5})$		u_1		-2		∞
$\frac{da_1}{du} = f'_{14}(u)$					$+$						
$a_1(u) = f_{14}(u)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f_{14}(u_2)$	$\nearrow$	$f_{14}\left(-(3+\sqrt{5})\right)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	∞
$\frac{da_2}{du} = f'_{15}(u)$		$+$	0		$-$		0		$+$		
$a_2(u) = f_{15}(u)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f_{15}(u_2)$	$\searrow$	$\mp\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	∞

Tabelul 14

u	$-\infty$		-2		u_3		$-(3-\sqrt{5})$		u_5		u_4		∞
$\frac{da_1}{du} = f'_{16}(u)$							$-$		0		$+$		
$a_1(u) = f_{16}(u)$	∞	$\searrow$	1	$\searrow$	$f_{16}(u_3)$	$\searrow$	$f_{16}\left(-(3-\sqrt{5})\right)$	$\searrow$	$f_{16}(u_5)$	$\nearrow$	$f_{16}(u_4)$	$\nearrow$	∞
$\frac{da_2}{du} = f'_{17}(u)$			$-$		0		$+$				0	$-$	
$a_2(u) = f_{17}(u)$	∞	$\searrow$	1	$\searrow$	$f_{17}(u_3)$	$\nearrow$	$\pm\infty$	$\nearrow$	$f_{17}(u_5)$	$\nearrow$	$f_{17}(u_4)$	$\searrow$	$-\infty$

În tabelele 13 şi 14 $u_1 \in (-3, -2)$ este rădăcina polinomului $P_7(u) = u^3 + 3u^2 + 2u + 2$, $u_5 \in (-1, 0)$ a lui $P_8(u) = u^3 + 2u^2 + 40u + 8$, iar $u_2 < -6$, $u_3 \in (-2, -1)$ şi $u_4 \in (0, 1)$ ale lui $P_9(u) = u^5 + 9u^4 + 38u^3 + 224u^2 + 224u - 4$, care are două rădăcini complexe, pentru că $P_9^{(3)}(u) > 0$ pentru orice $u > 0$.

Pentru completarea figurii 3 cu curba (C_5), se vor face următoarele observaţii :

1°. Curba (C_4) are o asimptotă de ecuaţie $a_2 = 2(a_1 - 4)$, iar curbele (C_1) şi (C_5) nu au asimptote la distanţă finită.

2°. Curbele (C_1) şi (C_5) au singurul punct comun M_6, cum se deduce prin eliminarea lui a_2 între relaţia (32) şi fiecare din relaţiile (14).

3°. Relaţiile (33) spun că tangentele în M_6 la cele două ramuri ale lui (C_5) au respectiv coeficienţii unghiulari 1 şi $\frac{7}{4}$.

4°. Dacă se face în (33) (II), $u = -2 + x(|x| < 1)$, se obţine prin dezvoltare în serie $a_1 = 1 - x + \frac{x^2}{3} + \ldots$, $a_2 = 1 - x + \frac{x^2}{2} + \ldots$, în care caz (28) dă cu valoarea obţinută a lui a_1, $a_2 = 1 - x + \frac{7}{12}x^2 + \ldots$, aşa că în vecinătatea lui M_6 ramura în chestiune a lui (C_5) se află „sub" (C_4). Dacă se face în (33) (II), $u = -\frac{1}{x}$ $(x > 0, |x| < 1)$, se obţine $a_1 = \frac{1}{2x^2}(1 - 4x + 14x^2 - 16x^3 + \ldots)$, $a_2 = \frac{1}{x^2}(1 - 6x + \ldots)$, în care caz (28) dă $a_2 = \frac{1}{x^2}(1 - 4x + \ldots)$, aşa că ramura în chestiune a lui (C_5) se află, atunci cînd $a_1 \to \infty$, tot „sub" (C_4).

5. Dacă se elimină pe a_2 între relaţiile (27) şi (32), se obţine relaţia $a_1^6(1 - a_1)^2(1 - 7a_1^2 + 2a_1^3) = 0$.

Se constată deci pe fig. 3 cu ajutorul lui (30), (31) și (24) că: dacă punctul M se află în regiunea R_1 marcată în fig. 3 prin puncte sau pe segmentul (deschis la ambele capete) $\overline{M_7M_4}$, $f_2'(s)$ are două rădăcini pozitive (evident simple, cum se deduce din (23)). Dacă M se află pe segmentul $\overline{M_1M_7}$ (deschis în M_1), $f_2'(s)$ are o rădăcină pozitivă, în care caz tabelul 15 spune că acel segment nu aparține domeniului D.

Dacă M se află în regiunea R_2, marcată în fig. 3 cu linii verticale întrerupte, $f_2'(s)$ are o singură rădăcină pozitivă, în care caz se deduce din tabelul 16 că $f_2(s) > 0$ pentru orice $s > 0$.

Dacă M se află pe semidreapta $\overrightarrow{M_4M_5}$, (5) *dă $f_2(s) > 0$ pentru orice $s > 0$**) *Dacă M se află pe porțiunea* (deschisă la capete) $\widehat{M_1M_6}$ *a lui (C_1), $f_2'(s)$ are o rădăcină dublă pozitivă; în sfîrșit, dacă M se află în orice alt punct din cadranul I aflat „deasupra" dreptei (Δ) și a dreptei de ecuație $a_2 = \frac{4}{\pi^2}$, sau pe una din aceste drepte, atunci $f_2'(s) > 0$ pentru orice $s > 0$. În aceste cazuri, pentru orice $s > 0$, $f_2(s) > f_2(0) = 0$.* (34)

Tabelul 16

s	0		$\bar{s}$		∞
$f_2'(s)$		$+$	0	$-$	
$f_2(s)$	0	$\nearrow$	$f_2(\bar{s})$	$\searrow$	$\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{a_2}} \geqq 0$

Tabelul 17

s	0		s_1		s_2		∞
$f_2'(s)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f_2(s)$	0	$\nearrow$	$f_2(s_1)$	$\searrow$	$f_2(s_2)$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{a_2}} \geqq 0$

Tabelul 15

s	0		$\bar{s}$		∞
$f_2'(s)$		$-$	0	$+$	
$f_2(s)$	0	$\searrow$	$f_2(\bar{s})$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{a_2}} \geqq 0$

Se poate deci presupune că punctul M se află în regiunea R_1 sau pe segmentul (deschis la capete) $\overline{M_7M_4}$, în care caz tabelul (17) spune că con-

*) Întrucît se constată imediat că dacă $\frac{4}{\pi^2} \leqq a_1 < 1$, se are pentru $f_2(s)$ tabelul de variație 16, iar dacă $a_1 \geqq 1$, $f_2'(s) > 0$, deci $f_2(s) > f_2(0) = 0$.

diția necesară și suficientă pentru ca $f_2(s) \geqq 0$ pentru orice $s > 0$, este $f_2(s_2) \geqq 0$.

Se va considera deci pe s_2 dat de (22) ca o funcție de a_2, în care caz (5) și (22) dau

$$
\begin{aligned}
f_2(s_2) = f_{18}(a_2) = &-\frac{1}{2\sqrt{2}a_1a_2}\Big\{4a_1^4 + 4a_1^2a_2 - (1-a_1)^2a_2^2 + \\
&+[2a_1^2 + (1+a_1)a_2]\sqrt{4a_1^4 + 4a_1^2(1-a_1)a_2 + (1-6a_1+a_1^2)a_2^2}\Big\}^{\frac{1}{2}} + \\
&+\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}(a_2-a_1)}\Big\{2a_1^3 + (1-a_1^2)a_2 - 2a_2^2 + \\
&+(1-a_1)\sqrt{4a_1^4 + 4a_1^2(1-a_1)a_2 + (1-6a_1+a_1^2)a_2^2}\Big\}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
\tag{35}
$$

Ori, (35) și (34) dau

$$
\left.
\begin{aligned}
&f_{18}(1-2a_1) = f_2(s_2)\big|_{M \text{ pe } \overline{M_1M_7}} < 0; \\
&f_{18}(f_5(a_1)) = f_2(s_2)\big|_{M \text{ pe } \widehat{M_1M_6}} > 0; \quad f_{18}(a_1) = f_2(s_2)\big|_{M \text{ pe } \overrightarrow{M_4M_5}} \geqq 0^{*)}.
\end{aligned}
\right\}
\tag{36}
$$

De altfel, aceste inegalități se pot constata și direct, pentru că (35) dă

$$f_{19}(a_1) = f_{18}(1-2a_1) = -\frac{(1-a_1)\sqrt{-1+4a_1}}{2a_1(1-2a_1)} + \operatorname{arctg}\frac{1-a_1}{1-3a_1}\sqrt{-1+4a_1},$$

$$f_{19}'(a_1) = -\frac{(1-a_1)(-1+4a_1)}{2a_1^2(1-2a_1)^2}\sqrt{-1+4a_1} < 0,$$

deci pentru $\frac{1}{4} < a_1 < \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2} < \frac{1}{3}$, se are

$$f_{19}(a_1) < f_{19}\left(\frac{1}{4}\right) = 0; \ f_{20}(a_1) = f_{18}(f_5(a_1)) =$$

$$= -\frac{1+\sqrt{a_1}}{2a_1}\sqrt{-1+2\sqrt{a_1}} + \operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{a_1}}{1-\sqrt{a_1}}\sqrt{-1+2\sqrt{a_1}};$$

$$f_{20}'(a_1) = \frac{(1+\sqrt{a_1})(-1+2\sqrt{a_1})\sqrt{-1+2\sqrt{a_1}}}{2a_1^2(-1+a_1+2\sqrt{a_1})} > 0;$$

așa că pentru $\frac{1}{4} < a_1 < 1$ se are

$$f_{20}(a_1) > f_{20}\left(\frac{1}{4}\right) = 0; \ f_{21}(a_1) = f_{18}(a_1) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{a_1}} \geqq 0 \text{ pentru } a_1 \geqq \frac{4}{\pi^2}.$$

*) În (36), s_2 nu figurează ca rădăcină a lui $f_2'(s)$, pentru că dacă M se află pe $\overline{M_1M_7}$, $\widehat{M_1M_6}$ sau $\overrightarrow{M_4M_5}$, $f_2'(s)$ nu are două rădăcini pozitive, ci ca o valoare a lui $s > 0$ dintre cele amintite în (34).

Se va face în (5) și (22), $a_2 = \frac{4}{\pi^2}$ și se va considera pe s_2 ca o funcție de a_1, iar pe $f_2(s)$ ca o funcție de a_1 și s : $f_2(s) = f_{22}(a_1, s)$; în acest caz (35) dă $f_{18}\left(\frac{4}{\pi^2}\right) = f_{22}(a_1, s_2) = f_{23}(a_1)$ și $f'_{23}(a_1) = \frac{\partial f_{22}(a_1, s)}{\partial a_1}\Big|_{s=s_2} + f'_2(s_2)\frac{ds_2}{da_1} =$ $= \frac{\partial f_{22}(a_1,s)}{\partial a_1}\Big|_{s=s_2} = \frac{s_2}{a_2(1+s_2^2)}\left(1 - \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2 + a_2 s_2^2}}\right) > 0$ așa că dacă M se află pe segmentul $\overline{M_7M_4}$, deschis la capte (fig. 3),

$$f_{18}\left(\frac{4}{\pi^2}\right) = f_{23}(a_1) < f_{23}\left(\frac{4}{\pi^2}\right) = f_{21}\left(\frac{4}{\pi^2}\right) = 0. \tag{37}$$

Se va considera pe s_2 dat de (22) ca o funcție de a_2 și se va însemna în (5), $f_2(s) = f_{24}(a_2, s)$. În acest caz, (35) dă

$$f'_{18}(a_2) = \frac{\partial f_{24}(a_2,s)}{\partial a_2}\Big|_{s=s_2} + f'_2(s_2)\frac{ds_2}{da_2} = \frac{\partial f_{24}(a_2,s)}{\partial a_2}\Big|_{s=s_2} =$$

$$= \frac{s_2(1+s_2^2)}{2\left[2a_1^2 + a_2(1+s_2^2) + 2a_1\sqrt{a_1^2 + a_2(1+s_2^2)}\right]\sqrt{a_1^2 + a_2(1+s_2^2)}} > 0.$$

Se deduc deci de aici și din (36) și (37) tabelele 18 și 19

Tabelul 18

a_2	$1 - 2a_1$		$\alpha(a_1)$		$f_5(a_1)$
$f_{18}(a_2)$	$f_{18}(1 - 2a_1)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f_{18}(f_5(a_1))$

Tabelul 19

a_2	$\frac{4}{\pi^2}$		$\alpha(a_1)$		$f_5(a_1)$
$f_{18}(a_2)$	$f_{18}\left(\frac{4}{\pi^2}\right)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f_{18}(f_5(a_1))$

valabile respectiv pentru $\frac{1}{4} < a_1 \leqq \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2}$ și $\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2} < a_1 < \frac{4}{\pi^2}$, ceea ce împreună cu (34) spune că :

Dacă polinomul caracteristic al ecuației (1) *are rădăcini complexe, atunci în cazul* $a < a_1 \leqq \frac{1}{4}$ *sau* $a_1 \geqq \frac{4}{\pi^2}$, $f_2(s) > 0$ *pentru toți* $s > 0$; *în cazul* $\frac{1}{4} < a_1 < \frac{4}{\pi^2}$, *dacă* $1 - 2a_1 \leqq a_2 <$ $< \alpha(a_1)$ *pentru* $\frac{1}{4} < a_1 \leqq \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2}$, *respectiv dacă* $\frac{4}{\pi^2} \leqq a_2 <$ $< \alpha(a_1)$ *pentru* $\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2} < a_1 < \frac{4}{\pi^2}$, *există valori ale lui* $s > 0$ *cu* $f_2(s) < 0$; *iar dacă* $a_2 \geqq \alpha(a_1)$, $f_2(s) \geqq 0$ *pentru toți* $s > 0$, $\alpha(a_1)$ *este rădăcina mai mare ca* $1 - 2a_1$ *a funcției de variabila* a_2 : $f_{18}(a_2)$ *din* (35). (38)

Dacă $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_2 = \frac{1}{2}$, (9) dă $P_2(s) = \frac{(1-s)^4}{64} > 0$, deci pentru $s \in (0, 1)$, $f_1(s) < f_1(1) = 0$, iar (22) $f'_2(s) = \frac{4s^4}{(1+s^2)\left[9 + 7s^2 + (3+s^2)\sqrt{9+8s^2}\right]\sqrt{9+8s^2}} > 0$, deci pentru $s > 0$, $f_2(s) > f_1(0) = 0$, așa că (4) spune că $\alpha\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$. Aceasta, împreună cu (21) și (38), dovedește punctul I al teoremei.

II. Punctul II este dovedit de tabelele 8, 18 și 19.

III. Se va face în (17), $a_2 = \alpha(a_1)$, în care caz această relație dă $E_1(a_1) +$ $- E_2(a_1) = 0$, unde

$$E_1(a_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big\{- 4a_1^4 - 4a_1^2\alpha(a_1) + (1 - a_1)^2\alpha^2(a_1) +$$
$$+ [2a_1^2 + (1 + a_1)\alpha(a_1)]\sqrt{4a_1^4 + 4a_1^2(1 - a_1)\alpha(a_1) + (1 - 6a_1 + a_1^2)\alpha^2(a_1)}\Big\}^{\frac{1}{2}}$$
$$E_2(a_1) = a_1\alpha(a_1)\ln 4a_1^3 - a_1\alpha(a_1)\ln\Big(2a_1^2(1 - a_1) +$$
$$+ (1 - 4a_1 - a_1^2)\alpha(a_1) + (1 - a_1)\sqrt{4a_1^4 + 4a_1^2(1 - a_1)\alpha(a_1) + (1 - 6a_1 + a_1^2)\alpha^2(a_1)} +$$
$$+ \sqrt{2}\Big\{4a_1^4(1 - 2a_1 - a_1^2) + 4a_1^2(1 - a_1)(1 - 3a_1)\alpha(a_1) + (1 - 8a_1 + 14a_1^2 +$$
$$+ a_1^4)\alpha^2(a_1) + (1 - a_1)[2a_1^2(1 - a_1) +$$
$$+ (1 - 4a_1 - a_1^2)\alpha(a_1)]\sqrt{4a_1^4 + 4a_1^2(1 - a_1)\alpha(a_1) + (1 - 6a_1 + a_1^2)\alpha^2(a_1)}\Big\}^{\frac{1}{2}}\Big).$$

Dacă nu s-ar avea $\lim\limits_{a_1 \to 0} \alpha(a_1) = \infty$, atunci ar exista un număr fix M cu $\alpha(a_1) < M$ pentru orice $a_1 < \frac{1}{4}$. Pe de altă parte, conform lui (21), pentru $a_1 < \frac{1}{4}$, $\alpha(a_1) > \frac{1}{2}$, de unde se deduce imediat că $\lim\limits_{a_1 \to 0} E_2(a_1) = 0$ și că pentru a_1 destul de mic, $E_1(a_1) > \frac{1}{2\sqrt{2}} - \varepsilon$, unde $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ poate fi luat după voie, ceea ce contrazice, pentru valori destul de mici ale lui a_1, relația $E_1(a_1) +$ $+ E_2(a_1) = 0$, care definește în (17) pe $\alpha(a_1)$ și dovedește punctul III al teoremei.

3. În acest punct se va prezenta în mod geometric teorema 1, prin construirea curbei (C) de ecuație $a_2 = \alpha(a_1)$ în planul P, care este evident frontiera domeniului (D) definit la punctul 1.

1°. Se deduce din teorema 1 că : dacă $0 < a_1 < \frac{1}{4}$, ecuația curbei este $f_{25}(a_1, a_2) = 0$; dacă $\frac{1}{4} < a_1 < \frac{4}{\pi^2}$, ecuația curbei este $f_{26}(a_1, a_2) = 0$; dacă $a_1 \geqq \frac{4}{\pi^2}$, ecuația curbei este $a_2 = \frac{4}{\pi^2}$; curba trece prin punctul $M_1\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

S-au însemnat cu $f_{25}(a_1, a_2)$, $f_{26}(a_1, a_2)$ respectiv expresiile $f_7(a_2)$, $f_{18}(a_2)$ prezentate în enunțul teoremei. Curba de ecuație $f_{25}(a_1, a_2) = 0$ are în intervalul $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ al lui a_1 o singură ramură „deasupra" dreptei (Δ), cum se constată pe tabelele 7 şi 8, iar curba de ecuaţie $f_{26}(a_1, a_2) = 0$ are în intervalul $\left(\frac{1}{4}, \frac{4}{\pi^2}\right)$ iarăşi o singură ramură „deasupra" dreptei(Δ), cum se constată pe tabelele 18 şi 19 (dacă se ia în tabelele 8, 18 sau 19, $a_2 > f_5(a_1)$, atunci $f_7(a_2)$ din (17), respectiv $f_{18}(a_2)$ din (35) iau valori complexe). Ordonata uuni punct de abscisă a_1 de pe această curbă (C) este $\alpha\ (a_1)$. Ramurile în chestiune admit, de exemplu, următoarele reprezentări parametrice simple:

$$\left.\begin{cases} a_1 = f_{27}(s) = -\dfrac{1-s}{\ln s}\,\dfrac{2(1-s)+(1+s)\ln s}{1-s^2+(1+s^2)\ln s} \\ a_2 = \alpha(a_1) = f_{28}(s) = -\dfrac{(1-s)^2}{s\ln^2 s}\,\dfrac{1-s^2+2s\ln s}{1-s^2+(1+s^2)\ln s} \end{cases}\right\} \tag{39}$$

$$s \in (0, 1)\,; \qquad a_1 \in \left(0, \frac{1}{4}\right).$$

$$\left.\begin{cases} a_1 = f_{29}(s) = \dfrac{2(1-\cos s) - s\sin s}{s(\sin s - s\cos s)} \\ a_2 = \alpha(a_1) = f_{30}(s) = \dfrac{2(1-\cos s)(s-\sin s)}{s^2(\sin s - s\cos s)} \end{cases}\right\} \tag{40}$$

$$s \in (0, \pi) \qquad a_1 \in \left(\frac{1}{4}, \frac{4}{\pi^2}\right).$$

Aşadar

Pentru întîia ramură avem

$$\left.\begin{aligned} &\frac{da_1}{ds} = f'_{27}(s) = \frac{4sf_{31}(s)}{\ln^2 s\left[1-s^2+(1+s^2)\ln s\right]^2} \\ &f_{31}(s) = \frac{(1-s)^3(1+s)}{2s^2} + \frac{1}{s^2}(1-s)^2(1+s+s^2)\ln s + \\ &\qquad + \frac{1}{4s^2}(1-s^2)(1+4s+s^2)\ln^2 s + \ln^3 s \\ &\frac{da_2}{ds} = f'_{28}(s) = \frac{1-s^4}{s\ln s}\,\frac{da_1}{ds}\,; \quad \frac{d^2a_2}{da_1^2} = -\frac{1-s^2+(1+s^2)\ln s}{s^2\ln^2 s\,\dfrac{da_1}{ds}}, \\ &\textit{iar pentru a doua} \\ &\frac{da_1}{ds} = f'_{29}(s) = \frac{f_{32}(s)}{s^2(\sin s - s\cos s)^2} \\ &f_{32}(s) = -2\sin s(1-\cos s) + 2s(1-\cos s)(1+2\cos s) - \\ &\qquad - s^2\sin s(2+\cos s) + s^3\,; \\ &\frac{da_2}{ds} = f'_{30}(s) = -\frac{2\sin s}{s}\,\frac{da_1}{ds}\,; \quad \frac{d^2a_2}{da_1^2} = 2\,\frac{\sin s - s\cos s}{s^2\,\dfrac{da_1}{ds}} \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Deci

Pentru $s \in (0, 1)$ avem

$$\left.\begin{aligned} &f_{33}(s) = -\frac{2s^3}{(1-s)^2(1+4s+s^2)\ln s}\,f'_{31}(s) = \ln s + 3\,\frac{1-s^2}{1+4s+s^2}\,; \\ &f'_{33}(s) = \frac{(1-s)^4}{s(1+4s+s^2)^2} > 0\,; \quad f_{33}(s) < f_{33}(1) = 0\,;\ f'_{31}(s) < 0\,; \\ &f_{31}(s) > f_{31}(1) = 0\,; \quad f'_{27}(s) > 0\,; \quad f'_{28}(s) < 0\,; \\ &f_{34}(s) = \ln s + \frac{1-s^2}{1+s^2}\,;\ f'_{34}(s) = \frac{1}{s}\left(\frac{1-s^2}{1+s^2}\right)^2 > 0\,;\ f_{34}(s) < f_{34}(1) = 0. \\ &\qquad\qquad 1 - s^2 + (1+s^2)\ln s < 0, \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

iar pentru $s \in (0, \pi)$

$$\left.\begin{aligned} &f_{35}(s) = \frac{f'_{32}(s)}{2s(1-\cos s)(2+\cos s)} = s - 3\,\frac{\sin s}{2+\cos s}\,; \\ &f'_{35}(s) = \left(\frac{1-\cos s}{2+\cos s}\right)^2 > 0 \\ &f_{35}(s) > f_{35}(0) = 0\,; \quad f'_{32}(s) > 0\,; \quad f_{32}(s) > f_{32}(0) = 0\,; \\ &f'_{29}(s) > 0\,; \quad f'_{30}(s) < 0\,; \quad f_{36}(s) = \sin s - s\cos s\,; \\ &f'_{36}(s) = s\sin s > 0\,; \quad f_{36}(s) > f_{36}(0) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Tabelul 20

s	0		1
$\frac{da_1}{ds} = f'_{27}(s)$		+	
$a_1(s) = f_{27}(s)$	0	↗	$\frac{1}{4}$
$\frac{da_2}{ds} = f'_{28}(s)$		−	
$a_2(s) = f_{28}(s)$	∞	↘	$\frac{1}{2}$
$\frac{da_2}{da_1}$			−2
$\frac{d^2a_2}{da_1^2}$		+	

Tabelul 21

s	0		π
$\frac{da_1}{ds} = f'_{29}(s)$		+	
$a_1(s) = f_{29}(s)$	$\frac{1}{4}$	↗	$\frac{4}{\pi^2}$
$\frac{da_2}{ds} = f'_{30}(s)$		−	
$a_2(s) = f_{30}(s)$	$\frac{1}{2}$	↘	$\frac{4}{\pi^2}$
$\frac{da_2}{da_1}$	−2		0
$\frac{d^2a_2}{da_1^2}$		+	

Tabelele 20 şi 21 dau aşadar pentru frontiera (C), forma din fig. 4 în care ramura $\widehat{M_1M_8}$ are ecuaţia $f_{25}(a_1, a_2) = 0$ şi ecuaţiile parametrice (39), iar ramura $\widehat{M_1M_4}$ ecuaţia $f_{26}(a_1, a_2) = 0$ şi ecuaţiile parametrice (40). Domeniul D este marcat prin puncte.

2°. Întrucît, cum s-a observat mai sus, pe curba (C) un punct de abscisă a_1 are ordonata $\alpha(a_1)$, s-a demonstrat

TEOREMA 2. *Perechea minimă relativ în raport cu a_2 este reprezentată de perechea $(f_{27}(s), f_{28}(s))$ din* (39), *unde s parcurge intervalul* (0, 1) *cînd a_1 parcurge intervalul $\left(0, \frac{1}{4}\right)$, de perechea $(f_{29}(s), f_{30}(s))$ din* (40), *unde s parcurge intervalul* $(0, \pi)$ *cînd a_1 parcurge intervalul $\left(\frac{1}{4}, \frac{4}{\pi^2}\right)$ şi de perechea $\left(a_1, \frac{4}{\pi^2}\right)$ cînd a_1 parcurge intervalul $\left[\frac{4}{\pi^2}, \infty\right]$. Cînd $a_1 = \frac{1}{4}$, perechea este $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$.*

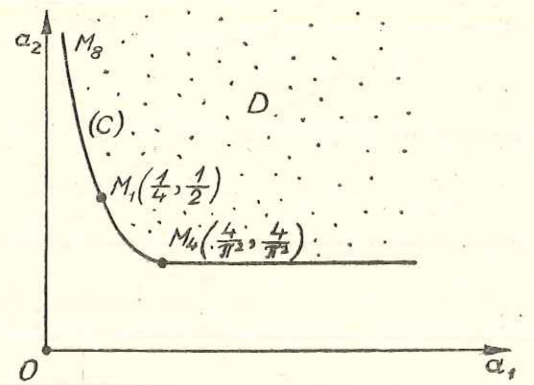

Fig. 4

3°. Se constată pe fig. 4 că o pereche minimă relativ în raport cu a_2 este totodată pereche minimă relativ în raport cu a_1, aşa că s-a demonstrat

TEOREMA 3. I. *Perechea minimă relativ în raport cu a_1 este perechea $(\beta(a_2), a_2)$, unde funcţia $\beta(a_2)$ se defineşte astfel :*

1°. *Dacă $a_2 = \frac{4}{\pi^2}$, atunci $\beta(a_2) = \frac{4}{\pi^2}$.*

2°. *Dacă $\frac{4}{\pi^2} < a_2 < \frac{1}{2}$, atunci $\beta(a_2)$ este rădăcina funcţiei $f_{18}(a_2)$ din enunţul teoremei* 1, *considerată ca funcţie de a_1.*

3°. *Dacă $a_2 = \frac{1}{2}$, atunci $\beta(a_2) = \frac{1}{4}$.*

4°. *Dacă $a_2 > \frac{1}{2}$ atunci $\beta(a_2)$ este rădăcina funcţiei $f_7(a_2)$ din enunţul teoremei* 1, *considerată ca funcţie de a_1.*

II. *În cazul* 4° *se are* $\lim\limits_{a_2 \to \infty} \beta(a_2) = 0.$

şi

TEOREMA 4. *Perechea minimă relativ în raport cu a_1 este reprezentată de perechea $(f_{29}(s), f_{30}(s))$ din* (40), *unde s parcurge intervalul* $(\pi, 0)$ *cînd a_2 parcurge intervalul $\left(\frac{4}{\pi^2}, \frac{1}{2}\right)$, şi de perechea $(f_{27}(s), f_{28}(s))$ din* (39), *unde s parcurge intervalul* (1, 0) *cînd a_2 parcurge intervalul $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$.*

Cînd $a_2 = \frac{4}{\pi^2}$, perechea este $\left(\frac{4}{\pi^2}, \frac{4}{\pi^2}\right)$, iar cînd $a_2 = \frac{1}{2}$, perechea este $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

4°. Se constată tot pe fig. 4 că perechea minimă absolut în raport cu a_2 este perechea $\left(\frac{4}{\pi^2}, \frac{4}{\pi^2}\right)$ şi că o asemenea pereche nu există în raport cu a_1.

5°. Se va observa că pentru construcţia curbei (C) nu era nevoie de formulele (39) şi (40), pentru că O. A r a m ă a stabilit [2] că domeniul D este convex, aşa că în acest caz teorema 1 spune că curba (C) are forma din fig. 4.

4_1 În încheiere, se va stabili perechea minimă în raport cu cîteva funcţii de forma cea mai simplă. Procedeul diferă de cel utilizat în acelaşi scop în [1] şi foloseşte reprezentarea parametrică (39) şi (40) a perechilor minime relativ.

TEOREMA 5. I. *Perechea minimă în raport cu funcţia $f(a_1, a_2) = a_1 + a_2$ este perechea*

$$\left(-\frac{\cos\sigma}{(1+\cos\sigma)(1-2\cos\sigma)}, \frac{1}{2(1+\cos\sigma)(1-2\cos\sigma)}\right),$$

unde σ este rădăcina din intervalul $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ a ecuaţiei

$$s = 2\sin s.$$

II. *Perechea minimă în raport cu funcţia $f(a_1, a_2) = a_1 a_2$ este perechea $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$.*

Demonstraţie. Dacă funcţia $f(a_1, a_2)$ este definită pe toată mulţimea $\mathcal{A}$, deci în tot domeniul (D) din fig. 4 pe şi frontiera (C) şi este crescătoare în raport cu a_2, atunci evident că eventuala pereche minimă în raport cu această funcţie este perechea $(\bar{a}_1, \alpha(\bar{a}_1))$, unde $f(\bar{a}_1, \alpha(\bar{a}_1)) = \min\limits_{a_1>0} f(a_1, \alpha(a_1))$, iar $\alpha(a_1)$ este funcţia definită în teorema 1. Conform lui (39), (40) şi punctelor 2° și 4° ale acestei teoreme, se are deci în cazul în care funcția $f_{37}(a_1) = f(a_1, \alpha(a_1))$ admite un minim un intervalul $(0, \infty)$*)

$$\min_{a_1>0} f_{37}(a_1) = f_{37}(\bar{a}_1) = \min\left\{\inf_{s\in(0,1)} f[f_{27}(s), f_{28}(s)],\right.$$

$$\left. f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right), \inf_{s\in(0,\pi)} f[f_{29}(s), f_{30}(s)], \inf_{a_1 \geqq \frac{4}{\pi^2}} f\left(a_1, \frac{4}{\pi^2}\right)\right\}. \tag{43}$$

O condiție suficientă pentru ca $f_{37}(a_1)$ să admită un minim în intervalul $0, \infty,)$ este evident următoarea:

1°. Sau toate trei infimurile din (43) să fie $\geqq f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

2°. Sau, dacă cel mai mic dintre infimurile din (43) este mai mic decît $f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, atunci el să fie atins în intervalul deschis respectiv. (44)

Se va însemna cu $f^{[i]}(a_1, a_2) (i = 1, 2, \ldots)$ diversele forme pe care le va lua $f(a_1, a_2)$ în (43) și cu

$$\left.\begin{aligned} &f^{[i]}_{38}(s) = f^{[i]}[f_{27}(s), f_{28}(s)]\,;\quad f^{[i]}_{39}(s) = f^{[i]}[f_{29}(s), f_{30}(s)]\,;\\ &f^{[i]}_{40}(a_1) = f^{[i]}\left(a_1, \frac{4}{\pi^2}\right)\\ &(i = 1, 2, \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Cu aceste pregătiri, demonstrația teoremei este imediată.

I. Dacă $f^{[1]}(a_1, a_2) = a_1 + a_2$, (45) și (41) dau

$$f^{[1]\prime}_{38}(s) = f_{41}(s)\frac{f'_{27}(s)}{\ln s} \text{ cu } \quad f_{41}(s) = \ln s + \frac{1-s^2}{s},$$

așa că

$$f_{41}(s) = -\frac{1}{s^2}(1 - s + s^2) < 0\,;\; f_{41}(s) > f_{41}(1) = 0\,;\; f^{[1]\prime}_{39}(s) = \frac{s - 2\sin s}{s} f'_{29}(s),$$

deci (42) dă $f^{[1]}_{38}(s) < 0$, $f^{[1]}_{38}(s) > f^{[1]}_{38}(1) = f^{[1]}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ (tabelul 20), așa că

$$\inf_{s\in(0,1)} f^{[1]}_{38}(s) = f^{[1]}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right). \tag{46}$$

(* Dacă $f(a_1)$ admite în $(0, \infty)$ mai multe minime, se va înțelege prin minim în intervalul $(0, \infty)$ cel mai mic dintre ele.

Tabelul 22

s	0			s_5		π
$f^{[1]\prime}_{39}(s)$			$-$	0	$+$	
$f^{[1]}_{39}(s)$	$f^{[1]}_{39}$	(0)	$\searrow$	$f^{[1]}_{39}(s_5)$	$\nearrow$	$f^{[1]}_{39}(\pi)$

În tabelul 22, $f^{[1]}_{39}(0) = f^{[1]}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ (tabelul 21), iar s_5 este rădăcina din intervalul $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ a ecuației $s = 2 \sin s$. În cazul nostru, în (45), $f^{[1]}_{40}(a_1) = a_1 + \frac{4}{\pi^2}$, așa că $\inf\limits_{a_1 \geqq \frac{4}{\pi^2}} f^{[1]}_{40}(a_1) = \frac{8}{\pi^2} > f^{[1]}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$.

Se deduce deci de aici, din (46) și din tabelul 22 că condiția 2° (44) este îndeplinită, în care caz se are în (43) cu ajutorul lui (40)

$$\bar{a}_1 = f_{29}(s_5) = -\frac{\cos s_5}{(1+\cos s_5)(1-2\cos s_5)},\quad \bar{a}_2 = f_{30}(s_5) = \frac{1}{2(1+\cos s_5)(1-2\cos s_5)}$$

adică punctul I al teoremei.

II. Dacă $f^{[2]}(a_1, a_2) = a_1 a_2$, (45), (39) și (41) dau

$$f^{[2]\prime}_{38}(s) = -\frac{(1-s)^2}{s\ln^2 s}\,\frac{1+4s+s^2}{1-s^2+(1+s^2)\ln s} f_{33}(s) f'_{27}(s) < 0, \text{ cum spune (42)};$$

iar (45), (40) și (41)

$$f^{[2]\prime}_{39}(s) = \frac{2(1-\cos s)(2+\cos s)}{s^2(\sin s - s\cos s)} f_{35}(s) f'_{29}(s) > 0,$$

tot conform lui (42), așa că conform tabelelor 20 și 21

$$\inf_{s\in(0,1)} f^{[2]}_{38}(s) = \inf_{s\in(0,\pi)} f^{[2]}_{39}(s) = f^{[2]}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right). \tag{47}$$

Pe de altă parte, în cazul nostru, în (45), $f^{[2]}_{40}(a_1) = \frac{4}{\pi^2} a_1$, așa că $\inf\limits_{a_1 \geqq \frac{4}{\pi^2}} f^{[2]}_{40}(a_1) = \frac{16}{\pi^4} > \frac{1}{8} = f^{[2]}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, ceea ce împreună cu (47) spune că condiția 1° (44) este îndeplinită, în care caz în (43), $\bar{a}_1 = \frac{1}{4}$, $\bar{a}_2 = \frac{1}{2}$, ceea ce dovedește punctul II al teoremei.

TEOREMA 6. *Perechea minimă în raport cu funcţia* $f(a_1, a_2) = a_1^2 + a_2^2$ *este perechea* (40) *cu* $s = \varphi$, *unde* φ *este rădăcina din intervalul* $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ *a ecuaţiei*

$$s^3 - 2\,\frac{1 - \cos s}{\sin s}\, s^2 + 4(1 - \cos s)s - 4 \sin s(1 - \cos s) = 0.$$

Demonstraţie. Dacă $f^{[3]}(a_1, a_2) = a_1^2 + a_2^2$, (45) şi (39) dau

$$\left.\begin{aligned} f_{38}^{[3]\prime}(s) &\doteq -\frac{2(1 - s^2) f_{27}'(s)}{[1 - s^2 + (1 + s^2)\ln s]\ln^3 s}\, f_{42}(s) \\ f_{42}(s) &= \frac{1}{s^2}(1 - s)^3(1 + s) + \frac{2}{s}(1 - s)^2 \ln s + 2\,\frac{1 - s}{1 + s}\ln^2 s + \ln^3 s \end{aligned}\right\} \qquad (48)$$

iar (45) şi (40)

$$\left.\begin{aligned} f_{39}^{[3]\prime}(s) &= -\frac{2 \sin s}{s^3(\sin s - s \cos s)}\, f_{29}'(s) f_{43}(s) \\ f_{43}(s) &= s^3 - 2\,\frac{1 - \cos s}{\sin s}\, s^2 + 4s(1 - \cos s) - 4\sin s(1 - \cos s). \end{aligned}\right\} \qquad (49)$$

Se poate constata imediat că pentru $s \in (0, 1)$, $f_{38}^{[3]}(s) > f^{[3]}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, pentru că se deduce din (39) şi (48), respectiv (40) şi (49)

$$f_{38}^{[3]}(s_6) = f_{44}(s_6), \quad f_{39}^{[3]}(s_{11}) = f_{45}(s_{11}) \qquad (50)$$

unde s_6, s_{11} sînt respectiv eventuale rădăcini ale lui $f_{42}(s)$, $f_{43}(s)$, iar

$$\left.\begin{aligned} f_{44}(s) &= -\frac{(1 - s)^4}{s^2 \ln^4 s}\,\frac{1 - s^2 + 2s \ln s}{1 - s^2 + (1 + s^2)\ln s} \\ f_{45}(s) &= 4\,\frac{(1 - \cos s)^2(s - \sin s)}{s^4(\sin s - s \cos s)} \end{aligned}\right\} \qquad (51)$$

Aşadar

$$f_{46}(s) = s^2\,\frac{[1 - s^2 + (1 + s^2)\ln s]^2 \ln^5 s}{2(1 - s^2)^3}\, f_{44}'(s) = 2\,\frac{(1 - s)^3}{s(1 + s)} +$$

$$+ \frac{(1 - s)^2(7 + 10s + 7s^2)}{2s(1 + s)^2}\ln s + \frac{(1 - s)(1 + 7s + 8s^2 + 7s^3 + s^4)}{s(1 + s)^3}\ln^2 s + \ln^3 s$$

$$f_{47}(s) = \frac{s^2(1 + s)^4}{(1 - s)^2(1 + 3s + 10s^2 + 3s^3 + s^4)}\, f_{46}'(s) =$$

$$= \frac{3}{2}\,\frac{(1 - s^2)^2}{1 + 3s + 10s^2 + 3s^3 + s^4} - \frac{3}{2}\,\frac{(1 - s)(1 + s)^3}{1 + 3s + 10s^2 + 3s^3 + s^4}\ln s - \ln^2 s.$$

$$f_{48}(s) = -\frac{2s(1 + 3s + 10s^2 + 3s^3 + s^4)^2 f_{47}'(s)}{4 + 21s + 56s^2 + 159s^3 + 384s^4 + 159s^5 + 56s^6 + 21s^7 + 4s^8} =$$

$$= \frac{3 (1 - s^2)(1 + 8s + 41s^2 + 44s^3 + 41s^4 + 8s^5 + s^6)}{4 + 21s + 56s^2 + 159s^3 + 384s^4 + 159s^5 + 56s^6 + 21s^7 + 4s^8} + \ln s,$$

$$f_{48}'(s) = \frac{(1 - s)^4[16(1 + s^{12}) + 265s(1 + s^{10}) + 2477s^2(1 + s^8)]}{s(4 + 21s + 56s^2 + 159s^3 + 384s^4 + 159s^5 + 56s^6 + 21s^7 + 4s^8)^2} +$$

$$+ \frac{(1 - s)^4[13\,047s^3(1 + s^6) + 43\,552s^4(1 + s^4) + 95\,552s^5(1 + s^2) + 125\,638s^6]}{s(4 + 21s + 56s^2 + 159s^3 + 384s^4 + 159s^5 + 56s^6 + 21s^7 + 4s^8)^2} > 0,$$

deci pentru $s \in (0, 1)$:

$$f_{48}(s) < f_{48}(1) = 0, \quad f_{47}'(s) > 0, \quad f_{47}(s) < f_{47}(1) = 0,$$

$$f_{46}'(s) < 0 \quad f_{46}(s) > f_{46}(1) = 0, \quad f_{44}'(s) < 0,$$

$$f_{44}(s) > f_{44}(1) = \frac{1}{2}.$$

În particular, pentru o eventuală rădăcină $s_6 \in (0, 1)$ a lui $f_{42}(s)$, se are $f_{44}(s_6) > \frac{1}{2}$. Ori, conform lui (42), $f_{38}^{[3]}(s)$ din (45) este continuă în intervalul $(0, 1)$ şi $\lim\limits_{s \to 0} f_{38}^{[3]}(s) = \infty$ (tabelul 20), aşa că pentru $s \in (0, 1)$,

$$f_{38}^{[3]}(s) > f_{38}^{[3]}(1) = f^{[3]}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{16}. \qquad (52)$$

Se mai deduce din (51)

$$\left.\begin{aligned} f_{49}(s) &= s^5\,\frac{(\sin s - s \cos s)^2}{4 \sin^3 s}\, f_{45}'(s) = \\ &= 4 \sin s\,\frac{1 - \cos s}{1 + \cos s} - s\,\frac{(1 - \cos s)(5 + 7\cos s)}{1 + \cos s} + \\ &+ s^2\,\frac{(1 - \cos s)(3 + 7\cos s + 2\cos^2 s)}{\sin s(1 + \cos s)} - s^3 \\ f_{50}(s) &= \frac{(1 + \cos s)^2}{(1 - \cos s)(4 + 3\cos s + 2\cos^2 s)}\, f_{49}'(s) = \\ &= \frac{3\sin^2 s}{4 + 3\cos s + 2\cos^2 s} + 3s\,\frac{(1 + \cos s)\sin s}{4 + 3\cos s + 2\cos^2 s} - s^2 \end{aligned}\right\} \qquad (53)$$

$$f_{50}'(s) = \frac{3\sin s(7 + 19\cos s + 8\cos^2 s + 2\cos^3 s) - s(35 + 24\cos s + 20\cos^2 s + 21\cos^3 s + 8\cos^4 s)}{(4 + 3\cos s + 2\cos^2 s)^2} < 0$$

pentru $s \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, pentru că dacă $\cos s \in (-1, 0)$, se are evident

$$3(7+19\cos s+8\cos^2 s+2\cos^3 s) < 35+24\cos s+20\cos^2 s+21\cos^3 s+8\cos^4 s$$

$$\text{și } 35+24\cos s+20\cos^2 s+21\cos^3 s+8\cos^4 s =$$

$$= (1+\cos s)(35-11\cos s)+\cos^2 s(31+21\cos s+8\cos^2 s) > 0.$$

Așadar, pentru $s \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ se are

$$f_{50}(s) < f_{50}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4}\left((3+\frac{3}{2}\pi-\pi^2\right) < 0,$$

$$f'_{49}(s) < 0, \quad f_{49}(s) < f_{49}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4-\frac{5}{2}\pi+\frac{3}{4}\pi^2-\frac{\pi^3}{8} < 0,$$

$$f'_{45}(s) < 0, \quad f_{45}(s) < f_{45}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{32}{\pi^4}(\pi-2) < \frac{1}{2}.$$

În particular, pentru o eventuală rădăcină $s_{11} \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ a lui $f_{43}(s) : f_{45}(s_{11}) < \frac{1}{2}$.

Așadar, valoarea lui s care dă eventualul minim al lui $f^{[3]}(a_1, a_2)$ se află printre eventualele rădăcini ale lui $f_{43}(s)$. Ori, (49) dă

$$f_{51}(s) = \frac{1+\cos s}{1+3\cos s} f'_{43}(s) = s^2 + \frac{4s\sin s\cos s}{1+3\cos s} - \frac{8\sin^2 s\cos s}{1+3\cos s} \tag{54}$$

$$f_{52}(s) = \frac{(1+3\cos s)^2 f'_{51}(s)}{2(1+\cos s)(-1+7\cos s+6\cos^2 s)} =$$

$$= s + 2\sin s\,\frac{2+\cos s-3\cos^2 s-12\cos^3 s}{(1+\cos s)(-1+7\cos s+6\cos^2 s)}$$

$$f'_{52}(s) = \frac{(1-\cos s)(1+3\cos s)P_{10}(\cos s)}{(1+\cos s)(-1+7\cos s+6\cos^2 s)^2}$$

cu $P_{10}(x) = 27-5x+110x^2+180x^3+48x^4$, așa că $P_{10}(x) > 0$ pentru orice $x \geqq 0$, iar $P_{11}(u) = P_{10}(-u) = 27+5u+110u^2-180u^3+48u^4$,

Tabelul 23

u	0		u_1		u_2		1
$P''_{11}(u)$		$+$	0	$-$			
$P'_{11}(u)$	5	$\nearrow$	$P'_{11}(u_1)$	$\searrow$	0	$\searrow$	-123
$P_{11}(u)$	27	$\nearrow$			$P_{11}(u_2)$	$\searrow$	10

în care tabelul 23 spune că $P_{10}(x) > 0$ pentru $x \in [-1, 0]$. Se va însemna cu $\bar{s}_6 = \arccos\frac{1}{3} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, în care caz (54) dă $f_{52}(\pi-\bar{s}_6) = \pi-\bar{s}_6-\frac{4}{3}\sqrt{2}$. Ori, $\cos\bar{s}_6 = \frac{1}{3} > \cos 71° = 0{,}3256\ldots$, așa că $\bar{s}_6 < \frac{71}{180}\pi$, deci

$$f_{52}(s-\bar{s}_6) > \frac{109}{180}\pi-\frac{4}{3}\sqrt{2} > 0. \tag{55}$$

Se deduc deci tabelele 24 și 25 în care $s_7 = \arccos\frac{-7+\sqrt{73}}{12} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Tabelul 24

s	0		s_7	$\frac{\pi}{2}$		s_8		s_9		$\pi-\bar{s}_6$		s_{10}		π
$f'_{52}(s)$						$+$				0		$-$		
$f_{52}(s)$	0	$\nearrow$		$\pm\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$			$f_{52}(\pi-\bar{s}_6)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
$f'_{51}(s)$				$+$		0			$-$			0	$+$	
$f_{51}(s)$	0	$\nearrow$				$f_{51}(s_8)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\mp\infty$	$\searrow$	$f_{51}(s_{10})$	$\nearrow$	$-\pi^2$
$f'_{43}(s)$					$+$			0		$-$				

Tabelul 25

s	0		$\frac{\pi}{2}$		s_9		s_{11}		π
$f'_{43}(s)$			$+$		0		$-$		
$f_{43}(s)$	0		$\nearrow$		$f_{43}(s_9)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
$f^{[3]'}_{39}(s)$					$-$		0	$+$	
$f^{[3]}_{39}(s)$	$f^{[3]}_{39}(0) = f^{[3]}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$				$\searrow$		$f^{[3]}_{39}(s_{11})$	$\nearrow$	$f^{[3]}_{39}(\pi) = \frac{32}{\pi^4}$

În alcătuirea tabelului 24 s-a ţinut seama de relaţia $f_{51}(s_{10}) > 0$, care se justifică imediat dacă se observă că (53) dă

$$f_{51}(s_{10}) = \frac{4(1 - \cos s_{10})^2 P_{12}(-\cos s_{10})}{(1 + \cos s_{10})(-1 + 7\cos s_{10} + 6\cos^2 s_{10})^2} \tag{56}$$

unde $P_{12}(x) = 4 - 10x - 5x^2 + 137x^3 - 244x^4 + 168x^5$, aşa că din tabelul 26*) se deduce pentru $x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$:

$$P'_{12}(x) \geqq P'_{12}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{59}{3},\ P_{12}(x) \geqq P_{12}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{232}{81},$$

în care caz (56) dă în tabelul 24 : $f_{51}(s_{10}) > 0$.

Tabelul 26

x	$\frac{1}{3}$		$\bar{x}$		1
$\frac{1}{2} P_{12}^{(3)}(x)$	-5	$-$	0	$+$	
$P_{12}^{(2)}(x)$	$\frac{568}{9}$	$\searrow$	$P_{12}^{(2)}(\bar{x}) > 0$	$\nearrow$	1244

Pe de altă parte, în cazul nostru, în (45), $f_{40}^{[3]}(a_1) = \frac{16}{\pi^4} + a_1^2$, aşa că

$$\inf_{a_1 \geqq \frac{2}{\pi^2}} f_{40}^{[3]}(a_1) = \frac{32}{\pi^4} > f^{[3]}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{16},$$

ceea ce, ţinînd seama de tabelul 25 şi de (52), spune că condiţia 2° (44) este îndeplinită, în care caz în (43) $\bar{a}_1 = f_{29}(s_{11})$, $\alpha(\bar{a}_1) = f_{30}(s_{11})$, ceea ce demonstrează teorema.

Pentru calculul numeric al lui $f_{45}(s_{11})$ din (50), se poate utiliza fie expresia (51), fie expresia $f_{45}(s_{11}) = f_{53}(s_{11})$, cu

$$f_{53}(s) = \frac{\sin s(1 + \cos s)(s - \sin s)}{2\sin^2 s(1 + \cos s + 2\cos^2 s) - s\sin s(1 + 2\cos s + 5\cos^2 s) + s^2\cos^2 s(1 - \cos s)}$$

care se deduce imediat din (51) şi (49).

Se va observa în încheiere că procedeul adoptat se poate utiliza spre a găsi perechea minimă în raport cu o funcţie $f(a_1, a_2)$ oarecare, crescătoare în raport cu una din variabile.

*) În tabelul 26, $\bar{x} = \frac{122 + \sqrt{499}}{420}$, iar $P_{12}^{(2)}(\bar{x}) = \frac{474671904 - 335328\sqrt{499}}{7408800} > 0$.

ОДНА ЗАДАЧА О МИНИМУМЕ В ТЕОРИИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В этой заметке исследуется следующая задача:

Рассматривается функция Коши $\varphi(x)$ для линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (1) и обозначается через $\mathscr{H}$ множество всех уравнений вида(1), для которых $\varphi'(x)$ имеет положительные корни, через h наименьший из них (для заданного уравнения), через $m_i = |c_i|$ $(i = 1, 2)$ и через $\mathscr{A}$ множество пар положительных чисел (a_1, a_2), которые обладают тем свойством, что соотношение (2) имеет место для любого уравнения из $\mathscr{H}$. Это множество ограничено снизу и в заметке находятся ,,минимальные" его элементы в смысле принятых определений.

UN PROBLÈME DE MINIMUM DANS LA THÉORIE DE L'INTERPOLATION

RÉSUMÉ

Dans cette note on traite le problème suivant.

On considère la fonction de Cauchy $\varphi(x)$ pour l'équation diférentielle linéaire aux coefficients constants (1) et l'on désigne par $\mathscr{H}$ l'ensemble de toutes les équations de la forme (1), pour lesquelles $\varphi'(x)$ a des raciens positives, par h la plus petite parmi elles (pour une équation donnée), $m_i = |c_i|(i = 1,2)$ et par $\mathscr{A}$ l'ensemble des paires de nombres positifs (a_1,a_2) qui jouissent de la propriété que la relation (2) a lieu pour n'importe quelle équation de $\mathscr{H}$. Cet ensemble est borné inférieurement. Dans la note on établit ses éléments ,,minimaux", dans le sens des définitions adoptées.

BIBLIOGRAFIE

1. D. Ripianu, *Asupra inegalităţii lui Ch. de la Vallée Poussin în cazul ecuaţiilor diferenţiale de ordinul al doilea.* Studii şi cercet. de matem. (Cluj), XIV, *1*, (1963).
2. O. Aramă, *O problemă de interpolare lacunară cu soluţii ale ecuaţiilor diferenţiale.* Studii şi cercet. de matem. (Cluj), XIV, *1*, (1963).

Primit la 8. V. 1963.