ECUAŢII INTEGRALE ALE CÎMPULUI ELECTROMAGNETIC ÎN MEDII NEOMOGENE ŞI REZOLVAREA NUMERICĂ CU AJUTORUL LOR A UNOR PROBLEME DE ELECTROTEHNICĂ

DE

AUREL MILLEA

(Bucureşti)

Lucrare prezentată la Colocviul de analiză numerică din 8—13 decembrie 1960, Cluj

Cea mai mare parte a problemelor pe care le ridică azi electrotehnica şi ramurile tehnicii înrudite cu ea se rezolvă pe baza legilor macroscopice ale cîmpului electromagnetic, cunoscute şi sub numele de ecuaţiile lui Maxwell şi Hertz. Aceste legi se exprimă printr-un sistem de ecuaţii vectoriale cu derivate parţiale, care ocupă un loc important în rîndul ecuaţiilor fizicii matematice. Într-un mare număr de cazuri — care formează aşa numitele probleme de circuite electrice cu constante concentrate — ecuaţiile cîmpului electromagnetic se reduc la nişte ecuaţii algebrice, a căror rezolvare nu comportă dificultăţi de principiu. În acelaşi timp însă prezintă interes practic multe alte probleme în care reducerea ecuaţiilor cîmpului la ecuaţii algebrice nu e posibilă ; din marea varietate de asemenea probleme amintim, ca fiind cele mai cunoscute, problemele de determinare a repartiţiei sarcinii electrice pe conductoare şi dielectrici în electrostatică, calculul de capacităţi, conductanţe, permeanţe, determinarea repartiţiei cîmpului magnetic în regim staţionar, determinarea repartiţiei curentului alternativ în conductoare masive, probleme de linii electrice lungi, de antene, de difracţie, de ghiduri de undă şi cavităţi rezonante etc. Majoritatea acestor probleme se pot formula ca probleme la limită pentru ecuaţii cu derivate parţiale de diverse tipuri, unele întîlnite des şi în probleme de altă natură ca ecuaţii Laplace, Poisson, Fourier, Helmholtz, altele mai puţin comune.

Există în general o literatură foarte bogată privitoare la problemele la limită ale fizicii matematice, cu aplicaţii la diferitele cîmpuri fizice : deformaţiile mediilor elastice, mişcarea fluidelor, propagarea căldurii, cîmpul electromagnetic etc.

Se constată că în rîndul acestor probleme, cele privitoare la cîmpul electromagnetic şi mai ales la rezolvarea efectivă a problemelor de cîmp electromagnetic interesînd în tehnică sînt relativ mai puţin numeroase (poate cu excepţia unor probleme de regim static şi staţionar şi de unde electromagnetice). Considerăm că acest lucru se datoreşte în primul rînd următoarelor trei particularităţi ale problemelor de cîmp electromagnetic prezentînd interes practic, particularităţi care îngreunează rezolvarea efectivă a multor probleme :

a) În ecuaţiile cîmpului electromagnetic intervin mărimi *vectoriale*; numărul de componente scalare şi de ecuaţii scalare este în general mare şi numai în unele probleme particulare acest număr poate fi micşorat.

b) Majoritatea problemelor de cîmp electromagnetic prezentînd interes practic necesită rezolvarea ecuaţiilor cîmpului în medii *neomogene* sau *omogene pe porţiuni*. În acest din urmă caz trebuie rezolvate ecuaţii diferite în fiecare porţiune omogenă, cu condiţii de trecere date pe suprafeţele de discontinuitate, ceea ce îngreunează considerabil soluţionarea problemei. Numărul de probleme în care mediul e omogen şi se cunosc condiţiile la limită este relativ mic (de exemplu probleme de cîmp electrostatic în prezenţa conductoarelor sau de cîmp magnetic în prezenţa unor corpuri feromagnetice, unele probleme de curenţi alternativi în conductoare, probleme de unde electromagnetice în prezenţa unor conductoare perfecte), spre deosebire de problemele de mecanica mediilor deformabile, hidrodinamică etc. unde în cele mai multe cazuri se pot stabili condiţii la limită precise, cîmpul fiind limitat la un domeniu omogen.

c) În cele mai multe probleme de cîmp electromagnetic cîmpul există într-un mediu de *întindere infinită* şi problema nu se poate rezolva numai pentru o porţiune finită a mediului, deoarece nu se cunosc condiţiile la limită pe suprafaţa acestei porţiuni, necesare pentru a asigura unicitatea soluţiei (fac excepţie cazurile în care un mediu de întindere finită e limitat de conductoare perfecte sau de corpuri de permeabilitate magnetică infinit mare, precum şi unele cazuri particulare). Acest lucru îngreunează aplicarea unor metode de aproximaţie, ca metoda reţelelor, cum şi rezolvarea problemei cu ajutorul modelizării. Multe alte cîmpuri fizice sînt limitate la porţiuni finite din spaţiu, ca de exemplu cîmpul deformaţiilor şi cîmpul tensiunilor într-un corp solid, cîmpul vitezelor într-un lichid în mişcare etc.

Datorită acestor dificultăţi, cazurile în care s-au rezolvat efectiv probleme de cîmp electromagnetic în medii neomogene — sau chiar cazul mai simplu a două medii omogene diferite — sînt fie cazuri în care datorită simetriei geometrice s-au putut deduce valorile cîmpului pe suprafaţa de discontinuitate, aplicînd forma integrală a legilor, fie cazuri în care suprafaţa de discontinuitate coincide cu o suprafaţă de coordonate într-un sistem de coordonate în care ecuaţia corespunzătoare admite separarea variabilelor. Pe aceste căi s-au obţinut soluţii în cazurile suprafeţelor de discontinuitate plane, sferice, cilindrice, elipsoidale şi — la unele probleme particulare — toroidale, bisferice etc. Există însă categorii de probleme la care soluţiile astfel obţinute nu numai că nu rezolvă anumite probleme concrete care interesează în tehnică, dar nici măcar nu permit deducerea unor concluzii mai generale. S-au ivit cazuri în care rezolvarea exactă a unei probleme particulare a dat naştere la generalizări şi interpretări greşite, ca de exemplu problema efectului pelicular în conductoare de secţiune oarecare [8], [9], iar într-o serie de alte probleme nu s-au dat încă soluţii suficient de generale pentru a permite cunoaşterea satisfăcătoare a aspectului calitativ al fenomenelor (de exemplu curenţi alternativi în pămînt, conductoare în mişcare în cîmp magnetic exterior).

Considerăm că una din căile prin care s-ar putea elimina o parte din dificultăţile de mai sus este aceea a folosirii ecuaţiilor integrale pe care le satisfac mărimile cîmpului electromagnetic, în locul ecuaţiilor cu derivate parţiale. Folosirea ecuaţiilor integrale simplifică în primul rînd problemele referitoare la medii neomogene sau omogene pe porţiuni şi permite de cele mai multe ori soluţionarea problemelor prin rezolvarea ecuaţiilor numai pentru o porţiune finită a spaţiului. De exemplu, în problemele referitoare la două medii omogene diferite — care prezintă o importanţă deosebită — se pot deduce ecuaţii integrale a căror rezolvare e necesară numai pentru unul din mediile de mai sus. Ecuaţiile integrale „conţin" implicit şi condiţiile la limită ale problemei, iar soluţiile lor fiind în mod obişnuit unice, reprezintă chiar soluţiile problemei.

În afară de aceasta, în multe cazuri ecuaţiile integrale pot fi rezolvate prin metode de aproximaţie şi numerice mai uşor decît ecuaţiile cu derivate parţiale corespunzătoare. Astfel, o ecuaţie integrală poate fi aproximată simplu printr-un sistem de ecuaţii algebrice, folosind metoda „reţelelor", sau înlocuind nucleul ecuaţiei cu unul degenerat ; de asemenea se pot folosi metodele variaţionale ca metoda Ritz, metoda Galerkin, metoda celor mai mici pătrate [6], [7]. Toate aceste metode duc, în cele din urmă, la sisteme de ecuaţii algebrice, pentru rezolvarea cărora sînt cunoscute numeroase metode numerice. În unele cazuri se poate aplica şi metoda aproximaţiilor succesive ecuaţiilor integrale ale cîmpului.

În concluzie, aplicarea ecuaţiilor integrale ale cîmpului electromagnetic la rezolvarea efectivă a unor probleme de electrotehnică poate fi deosebit de eficace, mai ales dacă se au în vedere metodele numerice de rezolvare a acestora. Cu toate acestea, în literatură se cunosc puţine probleme de cîmp electromagnetic rezolvate cu ajutorul ecuaţiilor integrale. Dintre acestea, ecuaţia integrală a lui Hallen pentru densitatea de curent la antenele radio [1] a fost folosită de numeroşi autori pentru rezolvarea problemei repartiţiei curentului în sistemele radiante. O altă ecuaţie integrală cunoscută este cea a lui Robin, referitoare la repartiţia electrostatică a sarcinii la suprafaţa conductoarelor şi dielectricilor [2], însă această ecuaţie a fost folosită rar pentru rezolvarea efectivă a unor probleme de electrostatică. Sporadic, s-au mai folosit ecuaţii integrale pentru rezolvarea unor probleme de efect pelicular [4] şi de difracţie [3]. Nu am găsit însă în literatură nici o prezentare a unor ecuaţii integrale mai generale ale mărimilor cîmpului electromagnetic şi nici încercări de a folosi ecuaţiile integrale pentru rezolvarea altor tipuri de probleme de cîmp electromagnetic care prezintă interes în tehnică.

În lucrarea de faţă vom deduce în primul rînd ecuaţii integrale pe care le satisfac mărimile macroscopice ale cîmpului electromagnetic, în ipoteze destul de generale, vom examina apoi metodele mai importante pentru rezolvarea exactă sau cu aproximație a acestor ecuații și vom da exemple de rezolvare a unor probleme de electrotehnică cu ajutorul ecuațiilor integrale.

Dintre ipotezele admise la deducerea ecuațiilor integrale ale cîmpului electromagnetic, cea mai restrictivă este considerarea variației sinusoidale în timp a mărimilor cîmpului. Menționăm că această condiție nu e necesară, însă am folosit-o pentru a obține o formă mai simplă a ecuațiilor; prin aplicarea transformării Laplace ecuațiilor cîmpului, cazul variației oarecare în timp a mărimilor se poate reduce la cazul studiat de noi.

În schimb, la deducerea ecuațiilor integrale am considerat mediul neomogen, fapt care permite folosirea acestor ecuații pentru un mare număr de probleme a căror rezolvare cu ajutorul ecuațiilor cu derivate parțiale ale cîmpului e dificilă.

De asemenea, am dedus ecuațiile integrale ale cîmpului pentru corpuri imobile față de sistemul de referință, cu scopul de a nu complica expresiile obținute. Folosind metoda generală de deducere a acestor ecuații, se pot găsi ușor ecuații integrale și pentru diferite probleme referitoare la corpuri în mișcare.

1. DEDUCEREA ECUAȚIILOR INTEGRALE ALE CÎMPULUI ELECTROMAGNETIC

1.1. Forma generală a ecuațiilor în cazul mediilor neomogene. Considerăm volumul V, mărginit de suprafața Σ, care conține un mediu neomogen (avînd „constantele" ε, μ, σ funcții de punct), izotrop, liniar, imobil și presupunem că mărimile cîmpului electromagnetic variază sinusoidal în timp. În aceste condiții ecuațiile cîmpului electromagnetic sînt următoarele

$$\operatorname{rot} \overline{E} = -j\omega\mu \overline{H}, \tag{1}$$

$$\operatorname{rot} \overline{H} = \overline{J} + j\omega\varepsilon\overline{E}, \tag{2}$$

$$\operatorname{div} (\varepsilon\overline{E}) = \rho, \tag{3}$$

$$\operatorname{div} (\mu\overline{H}) = 0. \tag{4}$$

În aceste ecuații $\overline{E}$, $\overline{H}$, ρ, $\overline{J}$ sînt mărimile complexe ale cîmpului electromagnetic, iar $j = \sqrt{-1}$. Mărimile ε și μ pot fi reale sau complexe.

Pentru deducerea unor ecuații integrale echivalente cu sistemul de ecuații (1) — (4) folosim identitatea vectorială

$$\int_V (\overline{F} \operatorname{rot}\operatorname{rot}\overline{G} - \overline{G} \operatorname{rot}\operatorname{rot} \overline{F})\, \mathrm{d}v = \oint_\Sigma (\overline{G} \times \operatorname{rot} \overline{F} - \overline{F} \times \operatorname{rot} \overline{G})\overline{n}\, \mathrm{d}A, \tag{5}$$

unde $\overline{G}$ și $\overline{F}$ sînt două funcții vectoriale de vectorul de poziție $\bar{r}$, iar $\overline{n}$ este versorul normal la suprafața Σ, îndreptat înspre exteriorul acesteia. Înlocuim în (5) $\overline{G} = \overline{E}$ și $\overline{F} = \bar{a}\, g(R)$, unde $\bar{a}$ este un vector constant arbitrar, R este distanța dintre punctele avînd vectorii de poziție $\bar{r}$, respectiv $\bar{r}'$,

iar $g(R)$ este o funcție Green, căreia îi impunem deocamdată numai următoarele două condiții: pentru $R \to 0$ funcția g să aibă o singularitate de tipul $1/R$ (respectiv $\ln R$ în cazul problemelor plane), iar pentru $R \to \infty$ să satisfacă așa-numitele condiții de radiație [14]. Considerînd în relația (5) vectorul de poziție al punctului curent egal cu $\bar{r}'$ și notînd cu $\overline{n}'$ versorul normal la suprafața Σ în punctul $\bar{r}'$, cu grad', div', rot' operatorii diferențiali în raport cu punctul r', și cu $\mathrm{d}v'$, respectiv $\mathrm{d}A'$ elementele de volum, respectiv de arie corespunzătoare, obținem (anexa I)

$$4\pi\bar{a}\,\overline{E} = \int_V [\bar{a}g \operatorname{rot}' \operatorname{rot}' \overline{E} + \overline{E}\,\Delta'(\bar{a}g) - \overline{E} \operatorname{grad}' \operatorname{div}' (\bar{a}g)]\,\mathrm{d}v' +$$
$$+ \oint_\Sigma [-\overline{E} \times \operatorname{rot}' (\bar{a}g) + g\bar{a} \times \operatorname{rot}' \overline{E}]\overline{n}'\, \mathrm{d}A'. \tag{6}$$

Pentru a simplifica scrierea, convenim să considerăm mărimile cîmpului de sub semnul integral funcții de r', iar pe celelalte funcții de $\bar{r}$, și vom menține semnul prim numai la operatorii care se aplică funcțiilor care depind atît de $\bar{r}$ cît și de $\bar{r}'$.

Transformînd termenii din egalitatea (6) (anexa II) rezultă

$$4\pi\bar{a}\,\overline{E} = \int_V \{(-j\omega\mu\overline{J} + \omega^2\varepsilon\mu\overline{E} - j\omega \operatorname{grad} \mu \times \overline{H})\, \bar{a}g +$$
$$+ \overline{E}\bar{a}\Delta' g + \left(\frac{\rho}{\varepsilon} - \frac{\operatorname{grad} \varepsilon}{\varepsilon}\overline{E}\right) \operatorname{grad}' g \cdot \bar{a} - \operatorname{div}\, [\overline{E}\, (\bar{a} \operatorname{grad} g)]\}\mathrm{d}v' +$$
$$+ \oint_\Sigma \{j\omega\mu\, (\overline{n}' \times \overline{H})g\bar{a} - [\overline{n}' \times \overline{E}) \times \operatorname{grad}' g]\bar{a}\}\, \mathrm{d}A'. \tag{7}$$

Aplicînd formula lui Gauss-Ostrogradski ultimului termen din integrala de volum și observînd că a este un vector constant arbitrar și poate fi omis, obținem ecuația integrală căutată

$$\overline{E} = \frac{1}{4\pi} \int_V [(-j\omega\mu\overline{J} + \omega^2\varepsilon\mu\overline{E} - j\omega \operatorname{grad} \mu \times \overline{H})g +$$
$$+ \overline{E}\Delta' g + \left(\frac{\rho}{\varepsilon} - \frac{\operatorname{grad} \varepsilon}{\varepsilon}\overline{E}\right) \operatorname{grad}' g]\, \mathrm{d}v' + \tag{8}$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\oint_\Sigma [j\omega\mu\, (\overline{n}' \times \overline{H})g - (\overline{n}' \times \overline{E}) \times \operatorname{grad}' g - (\overline{n}'\overline{E}) \operatorname{grad}' g]\, \mathrm{d}A'.$$

A doua ecuație integrală se obține înlocuind în relația (5) $\overline{G} = \overline{H}$ și $F = \bar{a}g$. După calcule asemănătoare cu cele de mai sus, se găsește

$$\overline{H} = \frac{1}{4\pi} \int_V [(\omega^2\varepsilon\mu\,\overline{H} + j\omega \operatorname{grad} \varepsilon \times \overline{E})g + \overline{H}\,\Delta' g +$$
$$+ \overline{J} \times \operatorname{grad}' g - \left(\frac{\operatorname{grad} \mu}{\mu}\overline{H}\right) \operatorname{grad}' g \Big]\, \mathrm{d}v' + \tag{9}$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\oint_\Sigma [-j\omega\varepsilon(\overline{n}' \times \overline{E})g - (\overline{n}' \times \overline{H}) \times \operatorname{grad}' g - (\overline{n}'\overline{H}) \operatorname{grad}' g]\, \mathrm{d}A'.$$

Ecuațiile (8) și (9) formează un sistem de ecuații integrale vectoriale cu două necunoscute : $\overline{E}$ și $\overline{H}$, dacă se consideră date „sursele" cîmpului : $\overline{J}$ și ρ. Ele sînt ecuații de tip Fredholm de speța II.

1.2. Ecuațiile pentru un mediu infinit. Pentru a scrie ecuațiile integrale (8) și (9) în care volumul V cuprinde tot spațiul, trebuie cercetată comportarea integralelor de suprafață din aceste ecuații în cazul în care V tinde către infinit. În studiul ecuației scalare a undelor se obișnuiește să se folosească așa numitele condiții de radiație, care asigură anularea acestor integrale de suprafață atunci cînd volumul V tinde să ocupe tot spațiul, reprezentînd totodată condiții de unicitate a soluțiilor acestor ecuații. Vom introduce și pentru cîmpul electromagnetic, în ipotezele admise la început, un principiu asemănător, presupunînd în plus că la distanțe mari mediul este omogen.

Ideea pe care se bazează condițiile de radiație este absența surselor la infinit, ceea ce înseamnă că contribuția punctelor foarte depărtate la crearea cîmpului $\overline{E}$, respectiv $\overline{H}$, trebuie să fie nulă. Pentru a simplifica raționamentele, vom particulariza funcția g, luînd-o egală cu

$$g = \frac{e^{-j\gamma_\infty R}}{R}, \tag{10}$$

unde $\gamma_\infty = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_\infty \mu_\infty}$, iar ε_∞ și μ_∞ sînt valorile lui ε și μ la distanță mare de punctul $\overline{r}$. În acest mod funcția g satisface ecuația

$$\Delta g + \gamma_\infty^2 g = 0 \quad \text{sau} \quad \Delta g + \omega^2 \varepsilon_\infty \mu_\infty g = 0. \tag{11}$$

Admițînd că $\overline{J} \neq 0$ și $\rho \neq 0$ numai la distanță finită, se constată că în aceste condiții contribuția punctelor depărtate din integralele de volum din (8) și (9) devine nulă. Rămîne deci să găsim condițiile necesare pentru ca integralele de suprafață din aceste expresii să tindă către zero cînd suprafața Σ se mărește la infinit. Pentru aceasta presupunem că suprafața Σ e o sferă de rază R, cu centrul în punctul $\overline{r}$; ținînd seama de (10) se obține

$$\operatorname{grad}' g = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}R} \operatorname{grad}' R = e^{-j\gamma_\infty R}\left(\frac{1}{R^2} + \frac{j\gamma_\infty}{R}\right)\frac{\overline{R}}{R}; \ \overline{n}' = -\frac{\overline{R}'}{R}.$$

Înlocuind în (8) și (9), după calcule simple, se găsesc următoarele expresii ale integralelor de suprafață :

$$\frac{1}{4\pi}\oint_\Sigma \left\{ \overline{E}\,\frac{e^{-j\gamma_\infty R}}{R^2} + j\omega\mu\left[\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\overline{E} - (\overline{n}' \times \overline{H})\right]\frac{e^{-j\gamma_\infty R}}{R}\right\}\mathrm{d}A', \tag{12}$$

respectiv :

$$\frac{1}{4\pi}\oint_\Sigma \left\{ \overline{H}\,\frac{e^{-j\gamma_\infty R}}{R^2} - j\omega\varepsilon\left[\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\overline{H} - (n' \times \overline{E})\right]\frac{e^{-j\gamma_\infty R}}{R}\right\}\mathrm{d}A'. \tag{13}$$

Deosebim două cazuri : ε, μ reali și ε sau μ complex (sau ambii complecși). În primul caz, analiza expresiilor (12) și (13) arată că se pot formula următoarele „condiții de radiație"

$$\lim_{R\to\infty} \overline{E} = 0, \tag{14}$$

$$\lim_{R\to\infty} \overline{H} = 0, \tag{15}$$

$$\lim_{R\to\infty}\left[\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\overline{E} - (\overline{n}' \times \overline{H})\right] R = 0, \tag{16}$$

$$\lim_{R\to\infty}\left[\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\overline{H} - (\overline{n}' \times \overline{E})\right] R = 0. \tag{17}$$

Se constată ușor că aceste condiții sînt îndeplinite în cazurile obișnuite, deoarece la distanță mare de surse orice undă electromagnetică este practic plană, avînd vectorii $\overline{E}$ și $\overline{H}$ tangențiali la suprafața sferei cu centrul în punctul în care se află sursa (sau în apropierea sursei) și perpendiculari între ei, satisfăcînd relația $E/H = \sqrt{\mu/\varepsilon}$, iar amplitudinile lor scad invers proporțional cu R.

În al doilea caz (ε sau μ complex) mărimea γ_∞ rezultă complexă și condițiile de radiație nu mai sînt necesare, deoarece integralele de suprafață din (8) și (9) tind către zero oricum ar varia $\overline{E}$ și $\overline{H}$ (rămînînd însă finiți).

În unele probleme particulare este avantajos totuși ca intensitatea cîmpului electric sau intensitatea cîmpului magnetic să fie considerată diferită de zero la infinit, ca de exemplu în problemele în care un cîmp inițial uniform e perturbat prin producerea unei neomogenități a mediului (unde în mod evident se face o aproximație presupunînd existența unor surse la infinit, care poate însă simplifica considerabil problema). Vom nota cu $\overline{E}_0$ și $\overline{H}_0$ mărimile constante egale cu limitele integralelor de suprafață (12), respectiv (13) pentru $R \to \infty$; cu această notație ecuațiile integrale (8) și (9), extinse asupra întregului spațiu, se transcriu astfel

$$\overline{E} = \frac{1}{4\pi}\int_{V_\infty}\Big[(-j\omega\mu\,\overline{J} + \omega^2\varepsilon\mu\,\overline{E} - j\omega \operatorname{grad}\mu \times \overline{H})g +$$

$$+ \overline{E}\,\Delta' g + \left(\frac{\rho}{\varepsilon} - \frac{\operatorname{grad}\varepsilon}{\varepsilon}\overline{E})\right) \operatorname{grad}' g\Big]\mathrm{d}v' + \overline{E}_0, \tag{18}$$

$$\overline{H} = \frac{1}{4\pi}\int_{V_\infty}\Big[(\omega^2\varepsilon\mu\,\overline{H} + j\omega \operatorname{grad}\varepsilon \times \overline{E})\,g + \overline{H}\,\Delta' g +$$

$$+ \overline{J} \times \operatorname{grad}' g - \left(\frac{\operatorname{grad}\mu}{\mu}\overline{H}\right) \operatorname{grad}' g\Big]\mathrm{d}v' + \overline{H}_0. \tag{19}$$

1.3. Ecuațiile pentru medii omogene pe porțiuni. Un caz deosebit de important pentru aplicații este acela al mediilor omogene pe porțiuni. Pentru a simplifica scrierea, vom considera două medii omogene, de constante ε_1, μ_1, respectiv ε_2, μ_2 care ocupă tot spațiul, separate prin suprafața Σ (ecuațiile pot fi deduse ușor și pentru cazul a n medii omogene, care eventual nu ocupă tot spațiul). Notînd cu $\overline{n}$ versorul normal la Σ, orientat dinspre mediul 1 către mediul 2, ecuațiile (18) și (19) se transcriu în modul următor (anexa III)

$$\overline{E} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{V_\infty}\left[(-j\omega\mu\overline{J} + \omega^2\varepsilon\mu\overline{E})\,g + \overline{E}\Delta' g + \frac{\rho}{\varepsilon}\,\mathrm{grad}'\, g\right]\mathrm{d}v' +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\oint\limits_{\Sigma}\left[-j\omega(\mu_2 - \mu_1)(\overline{n}' \times \overline{H})g - \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2}\right)(\overline{n}'\overline{D})\,\mathrm{grad}'\, g\right]\mathrm{d}A' + \overline{E}_0, \quad (20)$$

$$\overline{H} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{V_\infty}[\overline{J} \times \mathrm{grad}'\, g + \omega^2\varepsilon\mu\overline{H}g + \overline{H}\Delta' g]\mathrm{d}v' +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\oint\limits_{\Sigma}\left[j\omega(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(\overline{n}' \times \overline{E})g - \left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2}\right)(\overline{n}'\overline{B})\,\mathrm{grad}'\, g\right]\mathrm{d}A' + \overline{H}_0, \quad (21)$$

unde $\overline{D}$ reprezintă inducția electrică, iar $\overline{B}$ este inducția magnetică, satisfăcînd relațiile $\overline{n}\overline{D} = \varepsilon_1\overline{n}\overline{E}_1 = \varepsilon_2\overline{n}\overline{E}_2$, respectiv $\overline{n}\overline{B} = \mu_1\overline{n}\overline{H}_1 = \mu_2\overline{n}\overline{H}_2$ pe suprafața Σ. Ecuațiile deduse conțin deci integrale de volum efectuate asupra spațiului întreg (în care ε și μ iau valorile locale ε_1, μ_1, sau ε_2, μ_2 din punctul $\overline{r}'$) și integrale de suprafață efectuate asupra suprafeței de discontinuitate Σ.

1.4. Ecuațiile pentru probleme plane (în două variabile). O categorie importantă de probleme de electrotehnică se pot rezolva cu aproximația că mărimile depind numai de două variabile. Ecuațiile integrale deduse rămîn valabile și în acest caz, însă cu următoarele modificări:

a) funcția Green g trebuie să aibă un punct singular logaritmic pentru $R \to 0$;

b) factorul $1/4\pi$ din fața integralelor care figurează în ecuațiile integrale trebuie înlocuit prin $1/2\pi$, integralele de volum devin integrale de suprafață, iar integralele de suprafață devin integrale de linie;

c) deoarece, în general, în cazul problemelor plane există surse la infinit, mărimile $\overline{E}_0$ și $\overline{H}_0$ nu pot fi considerate nule decît în anumite cazuri.

Aceste proprietăți reies dintr-un calcul cu totul analog celui efectuat mai sus, pe care nu-l mai reproducem.

1.5. Observații asupra ecuațiilor integrale deduse. În primul rînd se impune examinarea problemei alegerii formei particulare celei mai adecvate a funcției $g(R)$ pentru diversele tipuri de probleme.

În cazul problemelor referitoare la un mediu omogen se poate alege funcția g astfel încît să satisfacă ecuația $\Delta g + \omega^2\varepsilon\mu g = 0$, adică $g = e^{-j\omega\sqrt{\varepsilon\mu}R}/R$; în acest caz integrala de volum se simplifică (devenind nulă dacă $\overline{J} = 0$ și $\rho = 0$). Uneori este însă mai avantajos să se aleagă funcția g astfel ca să satisfacă ecuația $\Delta g = 0$, deoarece ea are în acest caz o expresie mai simplă: $g = 1/R$. Pentru problemele plane, funcțiile Green corespunzătoare sînt $\pi H_0^{(2)}(\omega\sqrt{\varepsilon\mu}R)/2j$, respectiv $\ln 1/R$.

În cazul mediilor neomogene cu variație continuă a parametrilor ε și μ, alegerea formei celei mai adecvate pentru funcția g și, în general, rezolvarea problemelor este mult mai dificilă și nici nu prezintă interes practic prea mare.

În cazul mediilor omogene pe porțiuni este avantajos să se aleagă funcția g astfel ca integrala de volum din ecuația integrală să se anuleze în cel puțin unul din mediile considerate (presupunînd că în acesta nu există surse). De exemplu, dacă se dau două medii de constante ε_1, μ_1 și ε_2, μ_2, primul avînd o întindere finită, putem alege $g = e^{-j\omega\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}R}/R$ (respectiv $\pi H_0^{(2)}(\omega\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}R)/2j$ pentru problema plană); în acest mod integrala de volum se va efectua numai pe volumul ocupat de mediul întîi.

La rezolvarea ecuațiilor integrale deduse trebuie avută în vedere o particularitate a lor, și anume faptul că ele conțin în general și integrale de volum, și integrale de suprafață. Integralele de suprafață care conțin factorul $\mathrm{grad}'\, g$ sînt discontinue la traversarea suprafeței (potențiale de strat dublu) și din această cauză la expresia membrului drept al ecuațiilor integrale mai trebuie adăugați anumiți termeni atunci cînd punctul $\overline{r}$ se află pe suprafața de discontinuitate (sau pe suprafața care limitează domeniul). Acești termeni suplimentari se calculează cu procedeul obișnuit în problemele la limită ale fizicii matematice, prin izolarea punctului $\overline{r} = \overline{r}'$ de pe suprafața de discontinuitate cu o emisferă (sau semicerc în cazul problemelor plane) și trecerea apoi la limită.

2. FORME PARTICULARE ALE ECUAȚIILOR INTEGRALE

2.1. Probleme de electrostatică. Regimul electrostatic e caracterizat prin $\omega = 0$; $\overline{H} = 0$; $\overline{J} = 0$ și ε real. În aceste probleme este avantajos să se ia $g = 1/R$. Făcînd aceste înlocuiri în ecuațiile integrale generale deduse, se obțin următoarele ecuații: pentru volumul V mărginit de suprafața Σ

$$\overline{E} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{V}\frac{1}{\varepsilon}(\rho - \mathrm{grad}\,\varepsilon\overline{E})\frac{\overline{R}}{R^3}\,\mathrm{d}v' + \frac{1}{4\pi}\oint\limits_{\Sigma}\left[-(\overline{n}' \times \overline{E}) \times \frac{\overline{R}}{R^3} - (\overline{n}'\overline{E})\frac{\overline{R}}{R^3}\right]\mathrm{d}A' \quad (22)$$

pentru spațiul întreg

$$\overline{E} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{V_\infty}\frac{1}{\varepsilon}(\rho - \mathrm{grad}\,\varepsilon\overline{E})\frac{\overline{R}}{R^3}\,\mathrm{d}v' + \overline{E}_0, \quad (23)$$

iar pentru cazul a două medii omogene de permitivități ε_1, respectiv ε_2

$$\overline{E} = \frac{1}{4\pi}\int_{V_\infty} \frac{\rho}{\varepsilon}\frac{\overline{R}}{R^3}\,\mathrm{d}v' + \frac{1}{4\pi}\oint_{\Sigma}\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right)(\overline{n}'\overline{D})\frac{\overline{R}}{R^3}\,\mathrm{d}A' + \overline{E}_0. \tag{24}$$

Din aceste ecuații integrale se pot deduce altele, care pot fi utile în aplicații. De pildă, se poate deduce o ecuație integrală a densității sarcinii electrice de polarizație ρ la suprafața care separă doi dielectrici de permitivități ε_1 și ε_2, definită ca [11]

$$\rho_{sp} = \varepsilon_0\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right)\overline{n}\overline{D}, \tag{25}$$

pornind de la ecuația (24). Se obține (anexa IV)

$$\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}\rho_{sp} = \frac{1}{2\pi}\int_{V_\infty}\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\rho\frac{\overline{n}\overline{R}}{R^3}\,\mathrm{d}v' + \frac{1}{2\pi}\oint_{\Sigma}\rho_{sp}\frac{\overline{n}\overline{R}}{R^3}\,\mathrm{d}A' + 2\varepsilon_0\overline{n}\overline{E}_0. \tag{26}$$

Un caz particular al acestei ecuații (pentru $\rho = 0$) este ecuația integrală a lui Robin, despre care s-a amintit în introducere. Bineînțeles, în această ecuație, ca și în cele precedente, repartiția densității de sarcină adevărată ρ se consideră cunoscută.

O altă problemă de electrostatică care prezintă interes este aceea a repartiției sarcinii la suprafața conductoarelor plasate într-un dielectric omogen. Ea se poate considera formal ca un caz particular al celei de mai sus, corespunzătoare valorii $\varepsilon_1 = \infty$ a permitivității mediului 1. Notînd cu ρ_s densitatea de suprafață a sarcinii, se obține din (26)

$$\rho_s = \frac{1}{2\pi}\int_{V_\infty}\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\rho\frac{\overline{n}\overline{R}}{R^3}\,\mathrm{d}v' + \frac{1}{2\pi}\oint_{\Sigma}\rho_s\frac{\overline{n}\overline{R}}{R^3}\,\mathrm{d}A' + 2\varepsilon_0\,\overline{n}\overline{E} \tag{27}$$

(unde iarăși ρ se presupune cunoscut). De obicei $\rho = 0$ și $\overline{E}_0 = 0$ și ecuația ia forma simplă

$$\rho_s = \frac{1}{2\pi}\oint_{\Sigma}\rho_s\frac{\overline{n}\overline{R}}{R^3}\,\mathrm{d}A', \tag{28}$$

care a fost studiată de Robin.

Tot pentru această problemă se poate deduce o altă ecuație integrală, dacă se pune condiția ca potențialul la suprafața Σ a conductorului să fie constant. Pentru aceasta se înmulțește ecuația (24) cu $\mathrm{d}\overline{r}$ și se integrează de la un punct fix $\overline{r}_0$ pînă la punctul $\overline{r}$ (care se află pe suprafața Σ). Înlocuind $\varepsilon_1 = \infty$; $\varepsilon_2 = \varepsilon$; $\overline{n}'\overline{D}/\varepsilon = \rho_s$ se obține

$$\text{const.} = \frac{1}{4\pi}\int_{V_\infty}\frac{\rho}{\varepsilon}\frac{1}{R}\,\mathrm{d}v' + \frac{1}{4\pi}\oint_{\Sigma}\frac{\rho_s}{\varepsilon}\frac{1}{R}\,\mathrm{d}A' + V_0, \tag{29}$$

unde V_0 este potențialul corespunzător cîmpului constant $\overline{E}_0$. De obicei $\rho = 0$ și $V_0 = 0$; constanta din membrul stîng fiind chiar potențialul V_Σ al conductorului, ecuația (29) se poate pune sub forma simplă

$$V_\Sigma = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\oint_{\Sigma}\frac{\rho_s}{R}\,\mathrm{d}A'. \tag{30}$$

Ecuațiile (29) și (30), spre deosebire de cele găsite pînă acum, sînt ecuații integrale Fredholm de speța I.

Pentru problemele plane ecuațiile de mai sus rămîn valabile făcînd înlocuirile $1/R \to \ln R$; $\mathrm{d}v' \to \mathrm{d}A'$; $\mathrm{d}A' \to \mathrm{d}s'$; $1/4\pi \to 1/2\pi$; $1/2\pi \to 1/\pi$.

2.2. Probleme de magnetostatică. Înlocuind $\omega = 0$; $\overline{E} = 0$; $\rho = 0$; μ real și $g = 1/R$ se obțin următoarele ecuații: pentru un domeniu mărginit

$$\overline{H} = \frac{1}{4\pi}\int_{V}\left[\overline{J} \times \frac{\overline{R}}{R^3} - \left(\frac{\operatorname{grad}\mu}{\mu}\,\overline{H}\right)\frac{\overline{R}}{R^3}\right]\mathrm{d}v' +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\oint_{\Sigma}\left[-(\overline{n}' \times \overline{H}) \times \frac{\overline{R}}{R^3} - (\overline{n}'\overline{H})\frac{\overline{R}}{R^3}\right]\mathrm{d}A', \tag{31}$$

pentru întreg spațiul

$$\overline{H} = \frac{1}{4\pi}\int_{V_\infty}\left[\overline{J} \times \frac{\overline{R}}{R^3} - \left(\frac{\operatorname{grad}\mu}{\mu}\,\overline{H}\right)\frac{\overline{R}}{R^3}\right]\mathrm{d}v' + \overline{H}_0, \tag{32}$$

iar pentru cazul a două medii omogene de permeabilități μ_1 și μ_2

$$\overline{H} = \frac{1}{4\pi}\int_{V_\infty}\overline{J} \times \frac{\overline{R}}{R^3}\,\mathrm{d}v' + \frac{1}{4\pi}\oint_{\Sigma}\left(\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1}\right)(\overline{n}'\overline{B})\frac{\overline{R}}{R^3}\,\mathrm{d}A' + \overline{H}_0. \tag{33}$$

În cazul unui mediu omogen care ocupă tot spațiul și $\overline{H}_0 = 0$, ecuațiile de mai sus se reduc la formula Biot-Savart-Laplace.

Ca și în cazul problemelor de electrostatică, se pot deduce ecuații integrale pentru densitatea de suprafață a unui curent echivalent pe suprafețele de discontinuitate sau pentru alte mărimi definite în mod adecvat spre a forma potențiale de dublu strat, aplicabile la diverse probleme.

2.3. Probleme de electrocinetică. Conform echivalenței cunoscute dintre ecuațiile regimului electrocinetic și electrostatic, problemele de electrocinetică se pot reduce la probleme de electrostatică [12], pentru care s-au dedus mai sus ecuațiile integrale.

2.4. Probleme de regim cvasistaționar. Regimul cvasistaționar este caracterizat prin posibilitatea de a neglija al doilea termen din membrul drept al legii circuitului magnetic (2) (densitatea curentului de deplasare). Problemele cele mai importante de cîmp electromagnetic în regim cvasistaționar sînt cele privitoare la repartiția curenților alternativi în conductoare. Deoarece la aceste probleme ecuațiile cîmpului trebuie rezolvate în medii omogene pe porțiuni — de cele mai multe ori unul din medii fiind conductor iar celălalt dielectric — ele se pretează în mod deosebit pentru a fi rezolvate cu ajutorul ecuațiilor integrale deduse.

Vom particulariza pentru acest caz ecuațiile integrale generale, considerînd că $\rho = 0$ și $\operatorname{div} \bar{E} = 0$, condiții care sînt îndeplinite în majoritatea problemelor tehnice (pe suprafețele de discontinuitate însă $\rho_s \neq 0$ în general).

O cale posibilă pentru a deduce ecuațiile integrale corespunzătoare regimului cvasistaționar este de a pune formal $\varepsilon = 0$ și $\bar{J} = \sigma\bar{E}$ în ecuațiile generale, în acest mod ecuațiile cîmpului electromagnetic luînd chiar forma valabilă în ipotezele de mai sus. O altă cale este de a presupune $\bar{J} = 0$ și a lua $\varepsilon = \sigma/j\omega$ în conductor și $\varepsilon = 0$ în dielectric.

Vom considera problemele cel mai des întîlnite în care un conductor masiv neferomagnetic — ocupînd un volum V finit sau infinit și mărginit de suprafața Σ — este alimentat fie prin niște conductoare de legătură parcurse de curent de conducție care fac contact cu conductorul masiv (probleme de curenți de aducție), fie prin inducție, datorită unui cîmp magnetic alternativ aplicat din exterior (probleme de curenți turbionari), iar mediul exterior este dielectric. În aceste probleme este avantajos să se ia $g = 1/R$ (respectiv $g = \ln 1/R$ pentru problemele plane) deoarece în acest mod integralele de volum se efectuează numai asupra volumului ocupat de conductor.

Avînd în vedere că pe suprafața Σ a conductorului $\bar{n}\bar{E} = 0$ obținem, înmulțind ecuația (20) cu conductivitatea σ, următoarea ecuație integrală a densității de curent $\bar{J}$

$$\bar{J} = -\frac{j\omega\mu\sigma}{4\pi}\int_{V_\infty}\frac{\bar{J}}{R}\,\mathrm{d}v' + \sigma\bar{E}_0. \tag{34}$$

Din ecuația (21) se obțin două ecuații diferite, după cum se folosește primul sau al doilea din procedeele de particularizare arătate mai sus. Dacă punem $\varepsilon = 0$ se obține relația

$$\bar{H} = \frac{1}{4\pi}\int_{V_\infty}\bar{J}\times\frac{\bar{R}}{R^3}\,\mathrm{d}v' + \bar{H}_0, \tag{35}$$

care este, cu aproximația termenului constant $\bar{H}_0$, chiar formula Biot-Savart-Laplace. Dacă punem $\varepsilon_1 = \sigma/j\omega$; $\varepsilon_2 = 0$ și $\bar{J} = 0$, se obține ecuația integrală

$$\bar{H} = -\frac{j\omega\mu\sigma}{4\pi}\int_{V_\infty}\frac{\bar{H}}{R}\,\mathrm{d}v' - \frac{1}{4\pi}\oint_{\Sigma}\frac{\bar{n}'\times\bar{J}}{R}\,\mathrm{d}A' + \bar{H}_0. \tag{36}$$

Pentru rezolvarea problemelor de curenți de aducție, în care se cunoaște repartiția densității de curent $\bar{J}$ într-o anumită regiune din spațiu (de

exemplu în conductoarele de legătură) se poate folosi ecuația (34), care are o formă simplă. În cazul problemelor de curenți turbionari, dacă se dă $\bar{H}_0$, trebuie aplicată ecuația (36), a cărei rezolvare în cazul general e mai dificilă, deoarece conține și necunoscuta $\bar{J}$. În anumite cazuri particulare însă $\bar{J}$ se poate exprima în funcție de $\bar{H}$ și ecuația se simplifică. De exemplu, dacă problema prezintă simetrie de rotație și $\bar{H}_0 = \bar{k}H_0$, singura componentă diferită de zero a densității de curent $\bar{J}$, în coordonate cilindrice z, ρ, φ este J_φ, iar valoarea acesteia se poate determina cu ajutorul formei integrale a legii inducției

$$\bar{J}(\bar{r}') = \frac{\gamma^2}{2\pi\rho'}\int_{S}\frac{\bar{H}\times\bar{\rho}}{\rho}\,\mathrm{d}A, \tag{37}$$

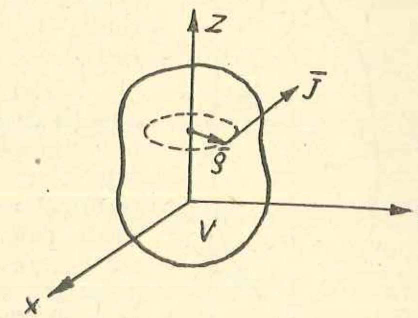

Fig. 1

unde s reprezintă suprafața cercului de rază ρ' situat în planul $z = \text{const.}$ și avînd centrul pe axa Oz (figura 1).

Înlocuind în ecuația (35) se obține ecuația integrală

$$\bar{H} = \frac{\gamma^2}{2\pi}\int_{V}\frac{\bar{R}}{\rho' R^3}\,\mathrm{d}A' \times$$

$$\times\int_{S}\frac{\bar{\rho}\times\bar{H}}{\rho}\,\mathrm{d}A + \bar{k}\bar{H}_0, \tag{38}$$

care conține numai necunoscuta $\bar{H}$. O ecuație integrală analogă se poate obține pentru problemele plane care prezintă simetrie față de o axă paralelă cu direcția lui $\bar{H}_0$.

Pentru problema curenților alternativi în conductoare masive se pot deduce și alte tipuri de ecuații integrale, care în unele cazuri sînt mai avantajoase. Pornind de la ecuațiile generale (8) și (9), considerate numai pentru volumul V al conductorului, în care ε și μ sînt constanți, înlocuind $\varepsilon = \sigma/j\omega$; $\bar{J} = 0$; $\rho = 0$ și alegînd $g = e^{-j\gamma R}/R$, unde $\gamma^2 = -j\omega\mu\sigma$, se obțin ecuațiile integrale (anexa V)

$$\bar{J} = \frac{1}{2\pi}\oint_{\Sigma}\Big[-\gamma^2(\bar{n}'\times\bar{H})\frac{e^{-j\gamma R}}{R} - (\bar{n}'\times\bar{J})\times\operatorname{grad}'\left(\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\right) -$$

$$-(\bar{n}'\bar{J})\operatorname{grad}'\left(\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\right)\Big]\mathrm{d}A', \tag{39}$$

$$\bar{H} = \frac{1}{2\pi}\oint_{R}\Big[-(\bar{n}'\times\bar{J})\frac{e^{-j\gamma R}}{R} - (\bar{n}'\times\bar{H})\times\operatorname{grad}'\left(\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\right) -$$

$$-(\bar{n}'\bar{H})\operatorname{grad}'\left(\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\right)\Big]\mathrm{d}A', \tag{40}$$

în care punctul $\bar{r}$ este considerat pe suprafaţa Σ. Acest sistem de ecuaţii conţine numai integrale de suprafaţă; el se poate rezolva dacă se cunoaşte fie $\bar{n}' \times \bar{H}$, fie $\bar{n}' \times \bar{J}$ pe suprafaţa Σ (componenta tangenţială a lui $\bar{H}$ sau a lui $\bar{J}$), după cum se poate constata uşor avînd în vedere că ecuaţiile (39) şi (40) au fost deduse fără a face vreo ipoteză asupra mediului 2. În principiu, s-ar putea scrie încă două ecuaţii integrale asemănătoare cu (39) şi (40), pornind de la ecuaţiile (8) şi (9) considerate numai pentru volumul exterior conductorului (volumul ocupat de dielectric), ecuaţii care ar avea aceeaşi formă cu (39) şi (40), cu deosebirea că în ele ar apărea $g = 1/R$; sistemul de ecuaţii astfel obţinut ar fi însă prea complicat pentru calcul. Ecuaţiile (39) şi (40) pot fi utile totuşi la problemele care prezintă anumite simetrii.

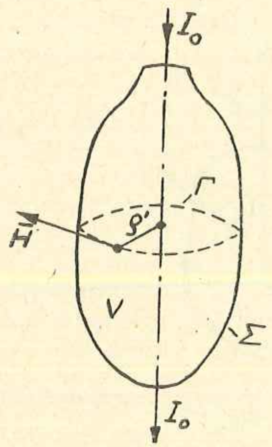

Fig. 2

Astfel, în cazul problemelor de curenţi de aducţie care prezintă simetrie de rotaţie, intensitatea cîmpului magnetic este tangenţială la suprafaţa Σ a conductorului şi cuprinsă în plane perpendiculare pe axa de simetrie. Valoarea ei se poate calcula aplicînd legea circuitului magnetic sub forma integrală, în lungul unei linii de cîmp a lui H, situată la suprafaţa conductorului (figura 2). Se obţine

$$H_{\varphi}(\bar{r}') = \frac{I_0}{2\pi\rho'}, \tag{41}$$

unde I_0 e curentul total din conductor, iar ρ' e raza cercului Γ de intersecţie a suprafeţei Σ cu planul în care se calculează H_{φ}. Înlocuind în ecuaţia (39) se obţine ecuaţia integrală

$$\bar{J} = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Sigma} \left[-(\bar{n}' \times \bar{J}) \times \operatorname{grad}'\left(\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\right) - (\bar{n}'\bar{J}) \operatorname{grad}'\left(\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\right)\right] \mathrm{d}A' -$$

$$- \frac{\gamma^2}{2\pi} \cdot \frac{I_0}{2\pi} \oint_{\Sigma} \frac{\bar{n}' \times \bar{u}_{\varphi}}{\rho'} \cdot \frac{e^{-j\gamma R}}{R} \, \mathrm{d}A', \tag{42}$$

unde $\bar{u}_{\varphi}$ e versorul tangent la cercul Γ.

O ecuaţie asemănătoare cu (42) se poate scrie pentru $\bar{H}$ dacă se înlocuieşte (37) în (40).

Pentru problemele plane se pot deduce ecuaţii integrale asemănătoare; ele diferă de cele de mai sus numai prin forma funcţiei g şi factorii $1/2\pi$ respectiv $1/\pi$ din faţa integralelor.

2.5. Probleme de regim nestaţionar. În categoria aceasta intră problemele cele mai generale ale electrodinamicii macroscopice şi de aceea ecuaţiile integrale (8), (9), (18), (19), (20), (21) se aplică, în principiu, sub forma lor generală la aceste probleme. Simplificări ale acestor ecuaţii se pot efectua în diverse cazuri particulare în care prezintă neomogenităţi fie numai ε, fie numai μ, anulîndu-se astfel unii termeni ai ecuaţiilor.

2.6. Probleme de regim cvasistaţionar pentru corpuri în mişcare. În tehnică se întîlnesc numeroase probleme în care trebuie să se determine repartiţia curenţilor induşi prin mişcarea unui conductor masiv în cîmp magnetic, cum şi forţa sau cuplul care acţionează asupra corpului (diferite tipuri de maşini electrice, frîne de inducţie, cuplaje electromagnetice etc.). Vom deduce o ecuaţie integrală pentru cazul unui conductor neferomagnetic de dimensiuni finite, care ocupă volumul V mărginit de suprafaţa Σ, şi ale cărui puncte se mişcă cu viteze $\bar{v}(\bar{r})$ într-un cîmp magnetic uniform $\bar{H}_0$.

Ecuaţiile cîmpului electromagnetic pentru acest caz pot fi puse sub forma

$$\operatorname{rot} \bar{E} = \mu \operatorname{rot} (\bar{v} \times \bar{H}), \tag{43}$$

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \sigma \bar{E}. \tag{44}$$

Folosind identitatea vectorială (5) se deduce ecuaţia integrală (anexa VI)

$$\bar{H} = \frac{\mu\sigma}{4\pi} \int_{V} (\bar{v} \times \bar{H}) \times \frac{\bar{R}}{R^3} \mathrm{d}v' - \frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma} \frac{\bar{n}' \times \bar{J}}{R} \, dA' +$$

$$+ \frac{\mu\sigma}{4\pi} \oint_{\Sigma} \bar{n}' \times (\bar{v} \times \bar{H}) \mathrm{d}A' + \bar{H}_0, \tag{45}$$

care este utilă în cazurile în care densitatea de curent $\bar{J}$ la suprafaţa conductorului se poate exprima în funcţie de $\bar{H}$. Acest lucru se poate face de exemplu în cazul unui conductor cu simetrie de rotaţie care se roteşte în jurul axei de simetrie, într-un cîmp magnetic uniform dirijat paralel cu axa de simetrie, aplicînd forma integrală a ecuaţiei (43).

3. METODE DE REZOLVARE A ECUAŢIILOR INTEGRALE DEDUSE

Cu toată varietatea formelor pe care le iau ecuaţiile integrale prezentate mai sus, în diverse cazuri particulare, ele se aseamănă între ele în primul rînd prin nucleul lor, care este de tipul $1/R$ sau $e^{-j\gamma R}/R$ pentru problemele în spaţiu şi $\ln 1/R$ sau $\pi H_0^{(2)}(\gamma R)/2j$ pentru problemele plane. Metodele de rezolvare care pot fi aplicate ecuaţiilor integrale depind în primul rînd de nucleul ecuaţiei. În cazul de faţă o caracteristică comună a nucleelor ecuaţiilor integrale obţinute este singularitatea pentru $R \to 0$, de care trebuie să se ţină seama la rezolvarea lor.

Nu ne vom ocupa de metodele de rezolvare exactă a acestor ecuaţii, care sînt în general puţin studiate şi greu aplicabile mai ales problemelor în două sau trei variabile. Vom examina patru categorii de metode de aproximaţie şi posibilităţile de a le aplica ecuaţiilor integrale ale cîmpului electromagnetic: metode de aproximaţii succesive, metoda aproximării nucleului ecuaţiei integrale printr-un nucleu degenerat, metode variaţionale şi metoda reţelelor. Din exemplele de calcul pe care le prezentăm la sfîrşit va reieşi modul în care se pot aplica unele din aceste metode la rezolvarea cîtorva probleme de cîmp electromagnetic.

3.1. Metoda aproximaţiilor succesive (iteraţiei). Această metodă se bazează pe procedeul cunoscut de a înlocui succesiv în membrul drept al ecuaţiilor integrale de speţa II funcţia necunoscută cu soluţii aproximative, obţinîndu-se astfel alte soluţii aproximative din în ce mai bune. De obicei ca primă soluţie aproximativă se ia funcţia cunoscută din membrul drept al ecuaţiei.

Posibilitatea de a rezolva ecuaţiile integrale prin aproximaţii succesive — metodă care nu se poate aplica sau se aplică greu ecuaţiilor cu derivate parţiale — constituie unul din avantajele cele mai importante ale ecuaţiilor integrale. Există un mare număr de probleme în care este suficientă chiar o primă iteraţie pentru a obţine un rezultat apropiat de cel real.

Menţionăm că în electrotehnică se cunoaşte o metodă de iteraţie pentru problemele de curenţi alternativi în conductoare [12], care constă în aplicarea succesivă a legilor inducţiei electromagnetice şi circuitului magnetic, *sub forma lor integrală*. Metoda iteraţiei sub această formă se poate aplica însă numai problemelor care prezintă o anumită simetrie, deoarece în alte cazuri forma integrală a legilor nu permite determinarea valorilor locale ale mărimilor cîmpului. Metoda iteraţiei aplicată ecuaţiei integrale se poate folosi în principiu la orice problemă şi constituie astfel o generalizare a metodei iteraţiei aplicată formelor integrale ale legilor cîmpului electromagnetic.

În cazul problemelor de regim static sau staţionar, convergenţa metodei aproximaţiilor succesive este condiţionată mai ales de forma geometrică a suprafeţelor de discontinuitate. De exemplu, dacă se rezolvă problema repartiţiei electrostatice a sarcinii la suprafaţa unui conductor avînd forma apropiată de cea sferică, iar ca primă aproximaţie se ia repartiţia uniformă, este de aşteptat ca să se obţină un rezultat apropiat de cel real efectuînd doar un număr mic de iteraţii, eventual una singură.

În cazul problemelor de regim variabil, integrala de volum din ecuaţia integrală conţine de obicei un factor proporţional cu frecvenţa sau cu pătratul frecvenţei şi cu anumite constante de material. Soluţia obţinută prin metoda iteraţiei va avea forma unei serii de puteri ale acestui factor. Convergenţa metodei va depinde deci, în afară de proprietăţi geometrice, şi de alţi parametri, cum sînt frecvenţa, conductivitatea şi permeabilitatea materialului etc. De aceea, metoda iteraţiei va da rezultate bune sau slabe, la aceeaşi problemă, în funcţie de diversele valori ale acestui parametru. De exemplu, la probleme de curenţi alternativi în conductoare masive, metoda iteraţiei este convenabilă pentru frecvenţe nu prea mari şi este inaplicabilă practic pentru frecvenţe care depăşesc o anumită valoare.

3.2. Aproximarea nucleului ecuaţiei integrale printr-un nucleu degenerat. Această metodă este şi ea cunoscută în teoria ecuaţiilor integrale (prin nucleu degenerat se înţelege un nucleu de forma $\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(\bar{r})\psi_k(\bar{r}')$, (unde φ_k şi ψ_k sînt funcţii continue de punct). Rezolvarea unei ecuaţii integrale cu nucleu degenerat se poate reduce la rezolvarea unui sistem de n ecuaţii liniare algebrice, ai căror coeficienţi se obţin prin cvadraturi.

În legătură cu această metodă se pun două probleme mai importante: găsirea nucleului degenerat care aproximează nucleul real şi rezolvarea sistemului de ecuaţii algebrice (desigur că o problemă foarte importantă este cea a convergenţei metodei şi a evaluării erorii, de care însă nu ne vom ocupa). În cazul ecuaţiilor integrale de care ne ocupăm, prima din aceste probleme este cea mai dificilă, deoarece procedeul cel mai obişnuit de aproximare a nucleului printr-unul degenerat este de a dezvolta în serie multiplă nucleul, or seriile în care se pot dezvolta nucleele singulare de tipul celor examinate mai sus sînt de cele mai multe ori slab convergente sau divergente. Rămîne să se examineze pentru fiecare problemă concretă în parte posibilitatea de a găsi dezvoltări în serie convenabile ale nucleului.

3.3. Metode variaţionale (sau energetice). Aceste metode constau în a reprezenta soluţia problemei sub forma unei serii de funcţii cu coeficienţi nedeterminaţi şi a determina coeficienţii fie din condiţia de minim al unei forme pătratice construite pe baza ecuaţiilor integrale, fie din anumite condiţii de ortogonalitate pe care trebuie să le satisfacă funcţiile alese.

În cazul ecuaţiilor cu mărimi reale şi în anumite condiţii suplimentare, ecuaţiei integrale i se poate ataşa o funcţională a cărei valoare e minimă pentru acea funcţie care reprezintă soluţia problemei. Asemenea funcţionale se pot defini pentru problemele de regim static şi staţionar şi pentru unele probleme de regim nestaţionar în medii fără pierderi. Pentru rezolvarea acestor probleme se poate aplica cunoscuta metodă a lui Ritz [6], [7], care constă în determinarea coeficienţilor necunoscuţi din expresia soluţiei, căutînd minimul funcţionalei amintite.

În multe probleme este suficient să se determine anumite mărimi globale cum ar fi energia unui sistem; metodele bazate pe minimul funcţionalelor permit uneori calculul comod, prin aproximaţie, al acestor mărimi globale, deoarece valoarea minimă a funcţionalelor ataşate acestor probleme poate fi pusă în corespondenţă cu mărimile globale care interesează. Asemenea metode s-au aplicat şi la probleme de cîmp electromagnetic, însă folosind funcţionale ataşate ecuaţiilor cu derivate parţiale ale cîmpului [10], [15]; în una din aplicaţiile care urmează vom deduce un principiu variaţional bazat pe o funcţională ataşată ecuaţiei integrale a densităţii de sarcină în electrostatică, care permite calculul prin aproximaţie al capacităţilor.

În cazul ecuaţiilor cu mărimi complexe — cum sînt ecuaţiile corespunzătoare regimului cvasistaţionar şi majoritatea ecuaţiilor corespunzătoare regimului nestaţionar — cele mai indicate par metoda Galerkin şi metoda celor mai mici pătrate [6], [7].

Metoda lui Galerkin se bazează pe următoarea idee : dacă reprezentăm funcţia $u(\bar{r})$, care figurează ca necunoscută în ecuaţia integrală

$$\mathrm{A}u - f = 0, \tag{46}$$

unde A este operatorul integral, iar f e o funcţie cunoscută de $\bar{r}$, sub forma

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \varphi_k(\bar{r}), \tag{47}$$

unde funcţiile φ_k formează un sistem complet de funcţii în domeniul dat V, funcţia $\mathrm{A}u - f$ va fi nulă dacă este ortogonală tuturor funcţiilor φ_k. O soluţie aproximativă a ecuaţiei (46) se poate obţine dacă se pune condiţia de ortogonalitate numai primelor n funcţii φ_k. Coeficienţii A_k se determină deci din relaţiile

$$\int_V \varphi_k (\mathrm{A}u - f)\, \mathrm{d}v = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots n. \tag{48}$$

Metoda lui Galerkin conduce formal la aceleaşi ecuaţii ca şi metoda Ritz ; la unele probleme, aceste ecuaţii sînt aceleaşi ca şi cele obţinute prin aproximarea nucleului cu un nucleu degenerat.

Ideea metodei celor mai mici pătrate este următoarea : dacă $u = u_0$ e soluţia ecuaţiei (46) în domeniul dat V, atunci este satisfăcută relaţia

$$\int_V |\mathrm{A}u_0 - f|^2\, \mathrm{d}v = 0. \tag{49}$$

Pentru orice funcţie $u \neq u_0$, funcţionala

$$M = \int_V |\mathrm{A}u - f|^2\, \mathrm{d}v \tag{50}$$

are o valoare pozitivă diferită de zero. O soluţie aproximativă a ecuaţiei (46) se poate obţine construind-o astfel ca valoarea funcţionalei (50) să fie cît mai mică. Reprezentînd funcţia necunoscută a problemei sub forma unei serii de funcţii, coeficienţii seriei se pot determina astfel ca valoarea funcţionalei de mai sus să fie minimă.

Dificultăţile cele mai mari legate de aplicarea metodelor variaţionale constau în efectuarea cvadraturilor. Deoarece în mod obişnuit seriile de tipul (47) sînt fie serii de puteri, fie serii trigonometrice, funcţiile de integrat sînt produse între polinoame algebrice sau trigonometrice şi funcţii care conţin radicali sau logaritmi şi uneori şi exponenţiale, a căror cvadratură necesită de regulă calcule laborioase.

3.4. Metoda reţelelor. Această metodă se bazează pe aproximarea ecuaţiei integrale printr-un sistem de ecuaţii algebrice, descompunînd domeniul V de integrare în subdomenii V_k şi considerînd funcţia necunoscută constantă în interiorul fiecărui asemenea subdomeniu. Integrarea se poate efectua în acest caz în fiecare subdomeniu şi rezultă un sistem de ecuaţii algebrice liniare, al căror număr e egal cu numărul de subdomenii V_k.

Dezavantajul acestei metode constă în primul rînd în dificultăţile legate de rezolvarea unui mare număr de ecuaţii algebrice.

4. APLICAŢII

4.1. Deducerea unei ecuaţii integrale pentru care capacitatea electrostatică a unui conductor e o valoare proprie şi folosirea unui principiu variaţional bazat pe această ecuaţie pentru calculul prin aproximaţie al capacităţii. Ecuaţia integrală (30), în cazul unui conductor mărginit de suprafaţa Σ, se poate scrie şi sub forma

$$\oint_\Sigma \frac{\rho_s}{R}\, \mathrm{d}A' = \frac{4\pi\varepsilon}{C} \oint_\Sigma \rho_s\, \mathrm{d}A', \tag{51}$$

unde $C = \oint_\Sigma \rho_s \mathrm{d}A / V_\Sigma$ este capacitatea electrostatică a conductorului. Ecuaţia (51) are forma generală

$$\mathrm{A}u = \lambda \mathrm{B}u, \tag{52}$$

în care u este funcţia necunoscută, A este un operator autoadjunct limitat inferior, B este un operator pozitiv definit, iar λ este o valoare proprie a ecuaţiei [7]. Rezultă că mărimea $4\pi\varepsilon/C$ este o valoare proprie pentru ecuaţia integrală (51). Această valoare proprie este egală cu minimul funcţionalei

$$\frac{\oint_\Sigma \rho_s dA \oint_\Sigma \frac{\rho_s}{R}\, dA'}{\oint_\Sigma \rho_s dA \oint_\Sigma \rho_s dA'} \tag{53}$$

de unde se deduce că capacitatea C este egală cu maximul funcţionalei

$$C = 4\pi\varepsilon \max \frac{\left[\oint_\Sigma \rho_s dA\right]^2}{\oint_\Sigma \rho_s dA \oint_\Sigma \frac{\rho_s}{R}\, dA'} \tag{54}$$

Această expresie a capacității se mai poate scrie sub forma

$$C = \frac{4\pi\varepsilon}{\min\left[\oint\limits_{\Sigma} \rho_s dA \oint\limits_{\Sigma} \frac{\rho_s}{R} dA'\right]} \tag{55}$$

cu condiția suplimentară

$$\oint\limits_{\Sigma} \rho_s \, \mathrm{d}A = 1, \tag{56}$$

formă care este mai adecvată pentru aplicarea metodei Ritz. Este de remarcat că valorile obținute pentru capacitate pe această cale sînt totdeauna mai mici decît cea reală, ceea ce permite calculul capacităților printr-o metodă de încadrare, o valoare mai mare decît cea reală putîndu-se calcula cu ajutorul principiului cunoscut al lui Dirichlet.

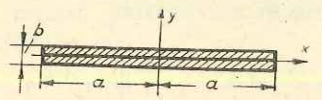

Fig. 3

4.2. Repartiția curentului alternativ într-o bandă metalică subțire (figura 3). Aceasta este o problemă plană de regim cvasistaționar, la care se poate folosi ecuația integrală (34) transcrisă pentru două variabile

$$J = \frac{j\omega\mu\sigma}{2\pi} \int\limits_{S} J \ln R \, \mathrm{d}A' + C, \tag{57}$$

unde C e o constantă, J e componenta în lungul lui z a densității de curent (singura diferită de zero), iar S e suprafața secțiunii conductorului. Vom considera grosimea b a conductorului suficient de mică, astfel încît densitatea de curent J să nie independentă de y, iar nucleul ecuației să poată fi scris cu aproximație astfel

$$\ln R \approx \ln |x' - x|. \tag{58}$$

Avînd în vedere simetria problemei față de axa Oy, adică $J(x) = J(-x)$, ecuația integrală (57) devine

$$J(x) = \frac{j\omega\mu\sigma b}{2\pi} \int\limits_{0}^{a} J(x') \ln |x'^2 - x^2| \, \mathrm{d}x' + C. \tag{59}$$

Căutăm soluția acestei ecuații sub forma unei serii de puteri

$$J(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k} x^{2k}. \tag{60}$$

Pentru determinarea coeficienților α_{2k}, se poate dezvolta în serie de puteri nucleul (58), se efectuează apoi integralele în raport cu x' și se identifică coeficienții din cei doi membri ai ecuației. O cale echivalentă cu aceasta este de a efectua mai întîi integrarea în raport cu x' și a dezvolta după aceasta în serie de puteri termenii din membrul drept. Am preferat această a doua cale, care conduce la calcule mai puține, deoarece integralele de forma $\int x^m \ln |x^2 - p^2| \mathrm{d}x$ există rezolvate în tabele [13].

Introducînd (60) în (59) și efectuînd integralele se obține

$$\begin{aligned} J = C + \frac{j\omega\mu\sigma b}{2\pi}\Big\{ & \alpha_0 \left[a \ln (a^2 - x^2) - 2a + x \ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)\right] + \\ & + \alpha_2\left[\frac{a^3}{3} \ln (a^2 - x^2) - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} a^3 - \frac{2}{3} a x^2 + \frac{x^3}{3} \ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right) + \right. \\ & + \alpha_4\left[\frac{a^5}{5} \ln (a^2 - x^2) - \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} a^5 - \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} a^3 x - \frac{1}{5} \cdot 2ax^4 + \frac{x^5}{5} \ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)\right] + \\ & + \alpha_6\left[\frac{a^5}{7} \ln (a^2 - x^2) - \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{7} a^7 - \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{5} a^5 x^2 - \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{3} a^3 x^4 - \frac{1}{7} \cdot 2ax^6 + \right. \\ & \left. + \frac{x^7}{7} \ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)\right] + \dots \Big\} \end{aligned} \tag{61}$$

Dezvoltăm în serie logaritmi care intervin în această egalitate

$$\ln (a^2 - x^2) = 2 \ln a - \frac{x^2}{a^2} - \frac{1}{2} \frac{x^4}{a^4} - \frac{1}{3} \frac{x^6}{a^6} - \dots \tag{62}$$

$$\ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right) = 2 \frac{x}{a} + \frac{2}{3} \frac{x^3}{a^3} + \frac{2}{5} \frac{x^5}{a^5} + \dots \tag{63}$$

Introducînd aceste dezvoltări în serie, precum și expresia (60) a lui J în (61) și identificînd coeficienții mărimilor x^{2k} din stînga și dreapta se obține

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= C + j\nu \left[(\ln a - 1)\alpha_0 + \frac{1}{3} a^2 \left(\ln a - \frac{1}{3}\right) \alpha_2 + \frac{1}{5} a^4 \left(\ln a - \frac{1}{5}\right) \alpha_4 + \right. \\ & \qquad \left. + \frac{1}{7} a^6 \left(\ln a - \frac{1}{7}\right)\alpha_6 + \dots \right]; \\ \alpha_2 &= j\nu \frac{1}{2a^2}\left(\alpha_0 - a^2\alpha_2 - \frac{1}{3} a^4 \alpha_4 - \frac{1}{5} a^6 \alpha_6 - \dots\right) \\ \alpha_4 &= j\nu \frac{1}{2a^4} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} \alpha_0 + a^2\alpha_2 - a^4\alpha_4 - \frac{1}{3} a^6 \alpha - \dots\right) \\ \alpha_6 &= j\nu \frac{1}{2a^6} \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5} \alpha_0 + \frac{1}{3} a^2\alpha_2 + a^4\alpha_4 - a^6\alpha_6 - \dots\right) \end{aligned} \tag{64}$$

unde s-a notat

$$\nu = \frac{\omega\mu\sigma}{2\pi} \cdot 2ab. \tag{65}$$

Relațiile (64) reprezintă un sistem de ecuații algebrice liniare în necunoscutele α_{2k}, care se poate rezolva prin metode numerice. Constanta C se determină după rezolvarea acestui sistem, cunoscînd curentul total I_0 prin conductor, cu ajutorul relației

$$2b \int_0^a J \, \mathrm{d}x = I_0. \tag{66}$$

4.3. Repartiția curentului alternativ într-un conductor de secțiune pătrată. Problema este asemănătoare cu cea precedentă, vom folosi însă o altă metodă pentru rezolvarea ecuației integrale (57) și anume metoda rețelelor.

1 J_1	2 J_2	3 J_3	4 J_2	5 J_1
6 J_2	7 J_4	8 J_5	9 J_4	10 J_2
11 J_3	12 J_5	13 J_6	14 J_5	15 J_3
16 J_2	17 J_4	18 J_5	19 J_4	20 J_2
21 J_1	22 J_2	23 J_3	24 J_2	25 J_1

Fig. 4

Împărțim suprafața pătratului în 25 de pătrate, ca în figura 4. Datorită simetriei, vom avea numai 6 valori necunoscute distincte ale densității de curent J, deci vom obține un sistem de 6 ecuații cu 6 necunoscute.

Un sistem de ecuații algebrice care aproximează ecuația integrală (57) este

$$J_k = \frac{j\omega\mu\sigma A_0}{2\pi} \sum_{l=1}^{n} J_l \ln R_{kl} + C, \tag{67}$$

unde n este numărul pătratelor elementare (în cazul nostru $n = 25$), A_0 este aria fiecărui pătrat elementar, iar R_{kl} este distanța medie geometrică dintre suprafața pătratului k și suprafața pătratului l (mărimile R_{kk} reprezintă distanța medie geometrică proprie a suprafeței pătratului k).

În cazul problemei de față sistemul de ecuații este puțin modificat, întrucît datorită simetriei numărul de necunoscute e mai mic decît numărul de ecuații. De exemplu, prima ecuație este (cu notațiile din figura 4) :

$$\begin{aligned} J_1 = \frac{j\omega\mu\sigma A_0}{2\pi} [&\ln (R_{1,1}R_{1,5}R_{1,21}R_{1,25})J_1 + \\ &+ \ln (R_{1,2}R_{1,4}R_{1,6}R_{1,10}R_{1,16}R_{1,20}R_{1,22}R_{1,24})J_2 + \ln (R_{1,3}R_{1,11}R_{1,15}R_{1,23})J_3 + \\ &+ \ln (R_{1,7}R_{1,9}R_{1,17}R_{1,19})J_4 + \ln (R_{1,8}R_{1,12}R_{1,14}R_{1,18})J_5 + \\ &+ \ln R_{1,13} J_6] + C. \end{aligned} \tag{68}$$

Aproximînd distanțele medii geometrice dintre subdomeniile pătratice prin distanța dintre centrele lor și calculînd distanțele medii geometrice proprii cu formulele din literatură [5], am determinat pentru secțiunea pătrată avînd latura egală cu 2,5 unități (alegerea lungimii laturii pătratului nu particularizează rezultatul, el rămînînd valabil pentru orice dimensiuni ale secțiunii) coeficienții ecuațiilor (68). Pentru a calcula constanta C am folosit relația

$$J_0 = \frac{I_0}{A} = \frac{4J_1 + 8J_2 + 4J_3 + 4J_4 + 4J_5 + J_6}{25}, \tag{69}$$

unde I_0 e curentul total din conductor, iar A e aria secțiunii conductorului, de unde a rezultat constanta C ca funcție liniară de $J_1, J_2, J_3, \ldots$ și de J_0. Înlocuind această expresie în ecuațiile obținute, am ajuns la următorul sistem de ecuații :

$$\begin{aligned} J_1 &= j\frac{\nu}{25}(-0{,}42 J_1 + 1{,}29\, J_2 + 1{,}11\, J_3 + 1{,}36\, J_4 + 1{,}71\, J_5 + 0{,}48\, J_6) + J_0, \\ J_2 &= j\frac{\nu}{25}(0{,}02\, J_1 - 0{,}10\, J_2 + 0{,}24\, J_3 + 0{,}47\, J_4 + 0{,}74\, J_5 + 0{,}25\, J_6) + J_0, \\ J_3 &= j\frac{\nu}{25}(0{,}28\, J_1 + 0{,}09\, J_2 - 0{,}62\, J_3 + 0{,}27\, J_4 + 0{,}22\, J_5 + 0{,}13\, J_6) + J_0, \\ J_4 &= j\frac{\nu}{25}(-0{,}01\, J_1 - 0{,}56\, J_2 - 0{,}28\, J_3 - 1{,}12\, J_4 - 0{,}87\, J_5 - 0{,}21\, J_6 + J_0, \\ J_5 &= j\frac{\nu}{25}(0{,}09\, J_1 - 0{,}49\, J_2 - 0{,}57\, J_3 - 1{,}12\, J_4 - 1{,}91\, J_5 - 0{,}56\, J_6) + J_0, \\ J_6 &= j\frac{\nu}{25}(0{,}06\, J_1 - 0{,}52\, J_2 - 0{,}51\, J_3 - 1{,}33\, J_4 - 2{,}47\, J_5 - 1{,}37\, J_6) + J_0, \end{aligned} \tag{70}$$

unde $\nu = \omega\mu\sigma A/2\pi$. Acest sistem de ecuații se poate rezolva prin metodele numerice cunoscute.

O posibilitate de rezolvare a sistemului de ecuații (69) este metoda iterației, considerînd mai întîi $J_1 = J_2 = J_3 = J_4 = J_5 = J_6 = J_0$ și introducînd aceste valori în membrii drepți ai ecuațiilor. Valorile astfel calculate se introduc din nou în ecuații ș.a.m.d. Soluțiile pe care le-am obținut pe această cale sînt următoarele;

$$\begin{aligned} \frac{J_1}{J_0} &= 1 + j\,0{,}222\,\nu + 0{,}0235\,\nu^2 - j\,0{,}00282\,\nu^3 - 0{,}000348\,\nu^4 - \ldots \\ \frac{J_2}{J_0} &= 1 + \mathrm{j}\,0{,}0648\,\nu + 0{,}0101\,\nu^2 - j\,0{,}00132\,\nu^3 - 0{,}000167\,\nu^4 - \ldots \\ \frac{J_3}{J_0} &= 1 + j\,0{,}0148\,\nu + 0{,}00184\,\nu^2 - j\,0{,}00028\,\nu^3 - 0{,}000038\,\nu^4 - \ldots \\ \frac{J_4}{J_0} &= 1 - j\,0{,}122\,\nu - 0{,}0122\,\nu^2 + j\,0{,}00144\,\nu^3 + 0{,}000181\,\nu^4 + \ldots \\ \frac{J_5}{J_0} &= 1 - j\,0{,}182\,\nu - 0{,}0241\,\nu^2 + j\,0{,}00306\,\nu^3 + 0{,}000385\,\nu^4 + \ldots \\ \frac{J_6}{J_0} &= 1 - j\,0{,}246\,\nu - 0{,}0368\,\nu^2 + j\,0{,}00486\,\nu^3 + 0{,}000619\,\nu^4 + \ldots \end{aligned} \tag{71}$$

Cunoscînd repartiția curentului în conductor, se poate calcula și rezistența în curent alternativ R_{ca}. Raportul R_{ca}/R_{cc}, unde R_{cc} este rezistența în curent continuu, este dat de

$$\frac{R_{ca}}{R_{cc}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{J_k}{J_0}\right|^2, \tag{72}$$

expresie care rezultă direct din formula generală (79) de la exemplul următor. Introducînd (70) în (71) rezultă

$$\frac{R_{ca}}{R_{cc}} = 1 + 0{,}0194\nu^2 - 0{,}000294\nu^4 + \ldots \tag{73}$$

Convergența seriilor (71) și (73) este suficientă pentru calcule practice dacă $\nu < 4$. Metoda nu se poate aplica deci pentru frecvențe prea înalte (efect pelicular pronunțat).

4.4. Reducerea problemei determinării rezistenței în curent alternativ a unui conductor de secțiune oarecare la cvadraturi. Pornind de la ecuația integrală a densității de curent (57) de la unul din exemplele precedente, se poate exprima rezistența în curent alternativ a unui conductor de secțiune oarecare printr-o serie, ai cărei termeni se calculează prin cvadraturi. Menționăm că în literatură nu există formule generale de calcul pentru rezistența în curent alternativ a unui conductor, decît în cazul particular al secțiunii circulare.

Forma (57) a ecuației integrale nu este potrivită pentru aplicarea directă a aproximațiilor succesive. Integrînd ecuația pe suprafața S a secțiunii conductorului, împărțind cu aria A a acestei suprafețe și scăzînd rezultatul din (57) se obține

$$J(\bar{r}) = \frac{j\omega\mu\sigma}{2\pi}\int_S J(\bar{r}')\ln\frac{R}{R_m}\,\mathrm{d}A' + \frac{I_0}{A}, \tag{74}$$

unde $\ln R_m = \frac{1}{A}\int_S \ln R\,\mathrm{d}A$ este logaritmul distanței medii geometrice a punctului $\bar{r}'$ față de suprafața S, iar I_0 este curentul total prin conductor. Termenul liber al acestei ecuații este chiar cel corespunzător repartiției staționare a curentului. Notăm $\omega\mu\sigma A/2\pi = \nu$ și $I_0/A = J_0$. Aplicînd metoda aproximațiilor succesive ecuației (67) se obține

$$\frac{J}{J_0} = 1 + j\nu P_1 - \nu^2 P_2 - j\nu^3 P_3 + \nu^4 P_4 + \ldots, \tag{75}$$

unde $P_1, P_2, P_3, \ldots$ sînt funcții de x, y, avînd expresiile

$$P_1 = \frac{1}{A}\int_S \ln\frac{R}{R_m}\,\mathrm{d}A'; \quad P_2 = \frac{1}{A^2}\int_S \ln\frac{R}{R_m}\,\mathrm{d}A\int_S \ln\frac{R}{R_m}\,\mathrm{d}A'; \tag{76}$$

$$P_3 = \frac{1}{A^3}\int_S \ln\frac{R}{R_m}\,\mathrm{d}A\int_S \ln\frac{R}{R_m}\,\mathrm{d}A'\int_S \ln\frac{R}{R_m}\,\mathrm{d}A''; \ldots$$

Puterea activă consumată pe unitatea de lungime a conductorului este

$$P = \frac{1}{\sigma}\int_S |J|^2\,\mathrm{d}A, \tag{77}$$

iar rezistența în curent alternativ este (considerînd I_0 real)

$$R_{ca} = \frac{P}{I_0^2} = \frac{1}{\sigma I_0^2}\int_S |J|^2\,\mathrm{d}A = \frac{1}{\sigma}\int_S\left|\frac{J}{J_0}\right|^2\mathrm{d}A. \tag{78}$$

Rezistența în curent continuu pe unitatea de lungime fiind $R_{cc} = 1/\sigma A$, obținem următoarea expresie a raportului dintre R_{ca} și R_{cc}

$$\frac{R_{ca}}{R_{cc}} = \frac{1}{A}\int_S\left|\frac{J}{J_0}\right|^2\mathrm{d}A. \tag{79}$$

Înlocuind expresia (75) a densității de curent relative J/J se găsește

$$\frac{R_{ca}}{R_{cc}} = 1 + \left[\frac{1}{A}\int_S P_1^2\,\mathrm{d}A\right]\nu^2 + \left[\frac{1}{A}\int_S (P_2^2 - 2P_1P_3)\,\mathrm{d}A\right]\nu^4 +$$
$$+ \left[\frac{1}{A}\int_S (P_3^2 + 2P_1P_5 - 2P_1P_4)\,\mathrm{d}A\right]\nu^6 + \ldots \tag{80}$$

Se poate demonstra că această expresie se reduce la

$$\frac{R_{ca}}{R_{cc}} = 1 + \frac{\nu^2}{A}\int_S P_1^2\,\mathrm{d}A - \frac{\nu^4}{A}\int_S P_2^2\,\mathrm{d}A + \frac{\nu^6}{A}\int_S P_3^2\,\mathrm{d}A - \ldots \tag{81}$$

Expresiile (80) și (82) au forma unor serii de puteri ale parametrului ν^2, ai căror coeficienți depind numai de forma geometrică a secțiunii și care pot fi calculați prin cvadraturi. Efectuarea acestor cvadraturi, pentru nu conductor avînd forma secțiunii dată, este posibilă prin metode numerice.

ANEXE

Anexa I

Mărimile care figurează în membrul stîng al identităţii (5) se transformă în modul următor

$$\mathrm{rot}'\,\mathrm{rot}'\,\overline{F} = \mathrm{rot}'\,\mathrm{rot}'\,(\overline{a}g) = \mathrm{grad}'\,\mathrm{div}'\,(\overline{a}g) - \Delta'(\overline{a}g)\,;$$

$$\mathrm{rot}'\,\mathrm{rot}'\,\overline{G} = \mathrm{rot}'\,\mathrm{rot}'\,\overline{E}.$$

Avînd în vedere comportarea funcţiei $g(R)$ pentru $R \to 0$, integrala de volum devine improprie pentru $\overline{r}' = \overline{r}$. Izolînd punctul $\overline{r}' = \overline{r}$ cu o sferă Σ' de rază R, avînd centrul chiar în acest punct, membrul drept al relaţiei (5) devine

$$\oint_{\Sigma} [\overline{E} \times \mathrm{rot}'\,(\overline{a}g) - g\overline{a} \times \mathrm{rot}'\,\overline{E}]\,\overline{n}'\,\mathrm{d}A' + \oint_{\Sigma} [\overline{E} \times \mathrm{rot}'\,(\overline{a}g) - g\overline{a} \times \mathrm{rot}'\,\overline{E}]\,\overline{n}'\,\mathrm{d}A'.$$

Pentru R suficient de mic putem înlocui în a doua integrală $g = 1/R$, iar $\overline{E}$ poate fi considerat constant. Obţinem

$$\oint_{\Sigma'} [\overline{E} \times \mathrm{rot}'\,(\overline{a}g)]\overline{n}'\,\mathrm{d}A' = \overline{E}\oint_{\Sigma'} [\mathrm{rot}'\,(\overline{a}g) \times \overline{n}']\,\mathrm{d}A' =$$

$$= \overline{E}\oint_{\Sigma'}\left[\left(\mathrm{grad}'\,\frac{1}{R} \times \overline{a}\right) \times \overline{n}'\right]\mathrm{d}A' = \overline{E}\oint_{\Sigma'}\left[\left(\frac{\overline{R}}{R^3} \times \overline{a}\right) \times \frac{\overline{R}}{R}\right]\mathrm{d}A' =$$

$$= \overline{E}\oint_{\Sigma'}\left[\overline{a}\,\frac{1}{R^2} - \frac{\overline{R}\,(\overline{a}\overline{R})}{R^4}\right]\mathrm{d}A' = 4\pi\overline{a}\overline{E} - \overline{E}\oint_{\Sigma'}\frac{\overline{R}\,(\overline{a}\overline{R})}{R^4}\,\mathrm{d}A'.$$

Folosind coordonate sferice, alese astfel ca $\overline{a} = \overline{i}\cdot a$, rezultă

$$\overline{R} = R(\overline{i}\cos\theta\cos\varphi + \overline{j}\cos\theta\sin\varphi + \overline{k}\sin\theta),$$
$$\mathrm{d}A' = R^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi,$$
$$\overline{a}\overline{R} = aR\cos\theta\cos\varphi,$$

$$\oint_{\Sigma'}\frac{\overline{R}\,(\overline{a}\overline{R})}{R^4}\,\mathrm{d}A' = \overline{i}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\right] +$$

$$+\overline{j}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\cos\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\right] +$$

$$+\overline{k}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\right] = 0.$$

Rezultă de asemenea

$$\lim_{R\to 0}\oint_{\Sigma'}(-g\overline{a} \times \mathrm{rot}'\,\overline{E})\,\overline{n}'\,\mathrm{d}A' = -\overline{a} \times \mathrm{rot}\,\overline{E},$$

$$\lim_{R\to 0}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{R}\cdot\frac{\overline{R}}{R}\cdot R^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = 0.$$

În consecinţă, făcînd $R \to 0$ membrul drept al identităţii (5) devine

$$\oint_{\Sigma}[\overline{E} \times \mathrm{rot}'\,(\overline{a}g) - g\overline{a} \times \mathrm{rot}'\,\overline{E}]\overline{n}'\,\mathrm{d}A' + 4\pi\overline{a}\overline{E},$$

de unde rezultă imediat relaţia (6).

Anexa II

Calculăm pe rînd termenii din egalitatea (6)

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\overline{E} = -j\omega\,\mathrm{rot}\,(\mu\overline{H}) = -j\omega\,\mathrm{grad}\,\mu \times \overline{H} - j\omega\mu\,\mathrm{rot}\,\overline{H} =$$
$$= -j\omega\,\mathrm{grad}\,\mu \times \overline{H} - j\omega\mu\,\overline{J} + \omega^2\varepsilon\mu\,\overline{E}.$$

$$\Delta(\overline{a}g) = \overline{a}\Delta g,$$

$$-\overline{E}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,(\overline{a}g) = -\overline{E}\,\mathrm{grad}\,(\overline{a}\,\mathrm{grad}\,g) = -\mathrm{div}\,[\overline{E}\,(\overline{a}\,\mathrm{grad}\,g)] +$$
$$+ (\overline{a}\,\mathrm{grad}\,g)\,\mathrm{div}\,\overline{E} = -\mathrm{div}\,[\overline{E}\,(\overline{a}\,\mathrm{grad}\,g)] + (\overline{a}\,\mathrm{grad}\,g)\left(\frac{\rho}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon}\overline{E}\,\mathrm{grad}\,\varepsilon\right),$$

unde am ţinut seama că

$$\varepsilon\,\mathrm{div}\,\overline{E} = \mathrm{div}\,(\varepsilon\overline{E}) - \overline{E}\,\mathrm{grad}\,\varepsilon\,;$$

$$[-\overline{E} \times \mathrm{rot}\,(\overline{a}g)]\overline{n} = -(\overline{n} \times \overline{E})\,\mathrm{rot}\,\overline{a}g = -(\overline{n} \times \overline{E})(\mathrm{grad}\,g \times \overline{a}) =$$
$$= -[(\overline{n} \times \overline{E}) \times \mathrm{grad}\,g]\,\overline{a}\,;$$

$$(g\overline{a} \times \mathrm{rot}\,\overline{E})\overline{n} = j\omega\mu g(\overline{n} \times \overline{H})\overline{a}.$$

Anexa III

Presupunem că μ variază continuu de la valoarea μ_1 pînă la μ_2 în volumul V' cuprins între două suprafeţe Σ_1 şi Σ_2 care îmbracă exterior, respectiv interior suprafaţa Σ. Considerăm grosimea acestei „coji" suficient de mică pentru ca în interiorul ei $\overline{H}$ să fie independent de distanţa ν, a punctului considerat, de la suprafaţa Σ_1. Notînd cu $\overline{n}'$ versorul normal la Σ, orientat dinspre mediul 1 înspre mediul 2, şi ţinînd seama de continuitatea mărimii $\overline{n}' \times \overline{H}$, se obţine

$$\operatorname{grad} \mu = n' \frac{d\mu}{d\nu} ;$$

$$-\frac{j\omega}{4\pi}\int_{V_\infty}(\operatorname{grad}\mu \times \overline{H})\, g\, dv' = -\frac{j\omega}{4\pi}\int_{V'}(\overline{n}' \times \overline{H})\frac{d\mu}{d\nu} g\, dv' =$$

$$= -\frac{j\omega}{4\pi}\oint_{\Sigma}(\overline{n}' \times \overline{H}) g\, dA' \int_1^2 \frac{d\mu}{d\nu} d\nu = -\frac{j\omega}{4\pi}\oint_{\Sigma'}(\overline{n}' \times \overline{H}) g\, dA' \int_{\mu_1}^{\mu_2} d\mu =$$

$$= -\frac{j\omega}{4\pi}\oint_{\Sigma'}(\overline{n}' \times \overline{H})(\mu_2 - \mu_1)\, g\, dA'$$

(am înlocuit $dv' = dA' \cdot d\nu'$, ceea ce devine posibil dacă suprafaţa Σ este suficient de netedă).

Asemănător, ţinînd seama de continuitatea mărimii $\varepsilon \cdot \overline{n}'\overline{E} = \overline{n}'\overline{D}$ — unde $\overline{D}$ este vectorul inducţie electrică — se obţine

$$-\frac{1}{4\pi}\int_{V_\infty}\frac{1}{\varepsilon}(\overline{E} \operatorname{grad} \varepsilon) \operatorname{grad}' g\, dv' = -\frac{1}{4\pi}\int_{V'}\frac{1}{\varepsilon}(\overline{n}'\overline{E})\frac{d\varepsilon}{d\nu}\operatorname{grad}' g\, dv' =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\oint_{\Sigma}\overline{n}'\overline{D} \operatorname{grad}' g\, dA' \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2} = -\frac{1}{4\pi}\oint_{\Sigma}\overline{n}'\overline{D}\left(\frac{1}{\varepsilon_4} - \frac{1}{\varepsilon_2}\right)\operatorname{grad}' g\, dA'.$$

În acelaşi fel se calculează şi integralele conţinînd pe grad ε şi grad μ din ecuaţia (19).

Anexa IV

Notăm cu $\overline{n}$ normala la suprafaţa Σ în punctul $\overline{r}$. Dacă punctul $\overline{r}$ se află pe suprafaţa Σ apropiindu-se de ea dinspre mediul 1 se obţine, înmulţind scalar ecuaţia (24) cu $\overline{n}$

$$\overline{n}\overline{E}_1 = \frac{1}{4\pi}\int_{V_\infty}\frac{\rho}{\varepsilon}\frac{\overline{n}\overline{R}}{R^3}dv' + \frac{1}{4\pi}\oint_{\Sigma}\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right)(\overline{n}'\overline{D})\frac{\overline{n}\overline{R}}{R^3}dA' -$$

$$-\frac{1}{4\pi}\cdot 2\pi\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right)\overline{n}\overline{D} + \overline{n}\overline{E}_0,$$

unde am ţinut seama de proprietăţile potenţialului de strat dublu. Asemănător, dacă punctul $\overline{r}$ se apropie de suprafaţa Σ dinspre mediul 2, se obţine

$$\overline{n}\overline{E}_2 = \frac{1}{4\pi}\int_{V_\infty}\frac{\rho}{\varepsilon}\frac{\overline{n}\overline{R}}{R^3}dv' + \frac{1}{4\pi}\oint_{\Sigma}\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right)(\overline{n}'\overline{D})\frac{\overline{n}\overline{R}}{R^3}dA' +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\cdot 2\pi\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right)\overline{n}\overline{D} + \overline{n}\overline{E}_0.$$

Înmulţim prima din aceste două relaţii cu ε_1, pe a doua cu ε_2 şi le scădem; ţinînd seama că $\varepsilon_1\overline{n}\overline{E}_1 = \varepsilon_2\overline{n}\overline{E}_2$ se obţine

$$0 = \frac{1}{4\pi}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\int_{V_\infty}\frac{\rho}{\varepsilon}\frac{\overline{n}\overline{R}}{R^3}dv' + \frac{1}{4\pi}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right)\oint_{\Sigma}(\overline{n}'\overline{D})\frac{\overline{n}\overline{R}}{R^3}dA' -$$

$$-\frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right)\overline{n}\overline{D} + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\overline{n}\overline{E}_0.$$

Ţinînd seama de (25) se găseşte, după înmulţirea cu $2\varepsilon_0/(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$ (presupunînd $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$), ecuaţia căutată (26).

Anexa V

Primul termen din integrala de suprafaţă din (8) rămîne neschimbat pentru $\overline{r} = \overline{r}'$. Pentru a calcula ceilalţi doi termeni, izolăm punctul $\overline{r} = \overline{r}'$ de pe suprafaţa Σ cu o emisferă Σ' de rază R suficient de mică. Înlocuind $g = 1/R$ şi $\overline{n}' = -\overline{R}/R$ se obţine

$$-\frac{1}{4\pi}\oint_{\Sigma}[(\overline{n}' \times \overline{E}) \times \operatorname{grad}' g + (\overline{n}'\overline{E}) \operatorname{grad}' g]\, dA' =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\oint_{\Sigma}\left[\left(\frac{\overline{R}}{R} \times \overline{E}\right) \times \frac{\overline{R}}{R^3} + \left(\frac{\overline{R}}{R}\overline{E}\right)\frac{\overline{R}}{R^3}\right] dA' = \frac{1}{4\pi}\overline{E}\oint_{\Sigma'}\frac{1}{R^2}dA' = \frac{1}{2}\overline{E}.$$

Rezultă că dacă punctul $\overline{r}$ se află pe suprafaţa Σ, integralei de suprafaţă din membrul drept al ecuaţiei integrale (8) trebuie să i se adauge termenul $(1/2)\overline{E}$ sau, ceea ce e acelaşi lucru, factorul $1/4\pi$ din faţa acestor integrale trebuie înlocuit prin $1/2\pi$.

Asemănător se face demonstraţia pentru ecuaţia (9).

Anexa VI

Pornim de la relaţia analogă formulei (6), scrisă pentru $\overline{H}$, în care luăm $g = 1/R$. Ţinînd seama de ecuaţiile (43) şi (44) se obţine

$$\overline{a}g \operatorname{rot}\operatorname{rot}\overline{H} = \overline{a}g \operatorname{rot}(\sigma\overline{E}) = \overline{a}g \operatorname{grad}\sigma \times \overline{E} + \sigma\,\overline{a}g \operatorname{rot}\overline{E} =$$

$$= \overline{a}g \operatorname{grad}\sigma \times \overline{E} + \sigma\mu\,\overline{a}g \operatorname{rot}(\overline{v} \times \overline{H}) = \overline{a}g \operatorname{grad}\sigma + \overline{E} -$$

$$-\sigma\mu \operatorname{div} [g\bar{a} \times (\bar{v} \times \overline{H})] + \sigma\mu \operatorname{rot} (g\bar{a}) \cdot (\bar{v} \times \overline{H}) = \bar{a}g \operatorname{grad} \sigma \times \overline{E} -$$
$$-\mu \operatorname{div} [\sigma g\bar{a} \times (\bar{v} \times \overline{H})] + \mu \operatorname{grad} \sigma [g\bar{a} \times (\bar{v} \times \overline{H})] +$$
$$+ \mu\sigma\bar{a} [(\bar{v} \times \overline{H}) \times \operatorname{grad} g] = \bar{a}g \operatorname{grad} \sigma \times \overline{E} - \mu \operatorname{div} [\sigma g\bar{a} \times (\bar{v} \times \overline{H})] +$$
$$+ \mu\bar{a} [(\bar{v} \times \overline{H}) \times \operatorname{grad} \sigma] + \mu\sigma\bar{a} [(\bar{v} \times \overline{H}) \times \operatorname{grad} g].$$

Ceilalţi termeni din integrala de volum din (6) sînt fie nuli, deoarece $\Delta g = 0$, fie dau termeni care se pot transforma în integrale de suprafaţă.

Scriind ecuaţia pentru spaţiul întreg, termenul $- \mu \operatorname{div} [\sigma g\bar{a} \times (\bar{v} \times \overline{H})]$ dă o integrală de suprafaţă nulă (deoarece în mediul exterior $\sigma = 0$), iar celelalte integrale de suprafaţă dau termenul constant $\overline{H}_0$. Se obţine astfel ecuaţia

$$\overline{H} = \frac{\mu\sigma}{4\pi} \int_{\mathring{V}} (\bar{v} \times \overline{H}) + \frac{\overline{R}}{R^3} \mathrm{d}v' + \frac{1}{4\pi} \int_{\mathring{V}_\infty} \frac{\operatorname{grad} \sigma \times \overline{E}}{R} \mathrm{d}v' +$$
$$+ \frac{\mu}{4\pi} \int_{\mathring{V}_\infty} (\bar{v} \times \overline{H}) \times \operatorname{grad} \sigma \, \mathrm{d}v' + \overline{H}_0.$$

Procedînd ca la anexa III, se obţine

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\mathring{V}_\infty} \frac{\operatorname{grad} \sigma \times \overline{E}}{R} \mathrm{d}v' = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma} \frac{\bar{n}' \times \overline{E}}{R} (-\sigma) \, \mathrm{d}A' = -\frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma} \frac{\bar{n}' \times \overline{J}}{R} \mathrm{d}A';$$

$$\frac{\mu}{4\pi} \int_{\mathring{V}_\infty} (\bar{v} \times \overline{H}) \times \operatorname{grad} \sigma \, \mathrm{d}v' = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{\Sigma} (\bar{v} \times \overline{H}) \times \bar{n}' \cdot (-\sigma) \, \mathrm{d}A' =$$
$$= \frac{\mu\sigma}{4\pi} \oint_{\Sigma} \bar{n}' \times (\bar{v} \times \overline{H}) \, \mathrm{d}A'.$$

Făcînd înlocuirile se găseşte ecuaţia integrală (45).

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ И ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ С ИХ ПОМОЩЬЮ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

РЕЗЮМЕ

В электротехнике известно лишь несколько частных задач, решенных с помощью интегральных уравнений. В работе выводится система общих интегральных уравнений, удовлетворяемые макроскопическим величинам электромагнитного поля для случая неоднородных, но изотопных сред, линейных и неподвижных, в предположении синусоидального изменения величин во времени. В большинстве случаев полученные интегральные уравнения лучше поддаются численному расчету, чем уравнения в частных производных для электромагнитного поля с соответствующими граничными условиями. Эти интегральные уравнения применяются в нескольких случаях, представляющих интерес для электротехники, и указываются основные возможности численного их решения, но не определяется математически строго область применимости и сходимость предлагаемых методов.

В качестве приложения приводится несколько конкретных примеров задач электротехники, решенных с помощью выведенных интегральных уравнений.

ÉQUATIONS INTÉGRALES DU CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE DANS DES MILIEUX NON HOMOGÈNES ET RÉSOLUTION NUMÉRIQUE À LEUR AIDE DE CERTAINS PROBLÈMES D'ÉLECTROTECHNIQUE

RÉSUMÉ

L'électrotehnique ne connaît que quelques problèmes particuliers résolus par des équations intégrales. L'auteur déduit un système d'équations intégrales générales satisfaites par les grandeurs macroscopiques du champ électromagnétique, dans le cas de milieux non homogènes, mais isotropes, linéaires et immobiles, en supposant une variation sinusoïdales dans le temps, des grandeurs. Dans la plupart des cas, les équations intégrales obtenues se prêtent mieux au calcul numérique que les équations aux dérivées partielles du champ électromagnétique, avec les conditions aux limites correspondantes. L'auteur particularise ces équations intégrales dans plusieurs cas qui sont intéressants en électrotechnique, et il en indique les principales possibilités de résolution numérique, sans pourtant déterminer, d'une manière rigoureuse, le domaine d'applicabilité et la convergence des méthodes présentées.

Comme applications, il présente quelques exemples concrets de problèmes d'électrotechnique résolus grâce aux équations intégrales déduites.

BIBLIOGRAFIE

1. *** *Антенны*, Изд. Советское Радио, 1951.
2. Durand E., *Électrostatique et Magnétostatique*. Paris, 1955
3. Фельд Я. Н., *Основы теории щелевых антенн*. Изд. Советское Радио, 1948.
4. Gross H. G, *Die Berechnung der Stromverteilung in zylindrischen Leitern mit rechteckigem und elliptischem Querschnitt*. Archiv für Elektrotechnik, 34, 241 (1940).
5. Kalantarov P. L., Ţetlin L. A, *Calculul inductanţelor* (trad. din limba rusă). Edit. Tehnică, Bucureşti.

6. Канторович Л. В., Крылов В. И., *Приближённые методы высшего анализа.* Гостехиздат, Москва—Ленинград, 1950.

7. Михлин С. Г., *Прямые методы в математической физике.* Гостехиздат, Москва—Ленинград, 1950.

8. Millea A, *Formularea problemelor plan-paralele de efect pelicular.* Bul. Instit. Politehnic Bucureşti, XXI, 2 (1959).

9. — *Exprimarea rezistenţei în curent alternativ a barelor prin densitatea de curent la suprafaţa conductorului.* Bul. Instit. Politehnic Bucureşti, XXII, *4* (1960).

10. — *Calculul cu aproximaţie al frecvenţelor critice ale ghidurilor de undă cu secţiune poligonală.* Bul. Instit. Politehnic Bucureşti, XX, 3 (1958).

11. Морс Ф. М., Фешбах Г., *Методы теоретической физики.* Изд. Ин. Лит., Москва, 1960.

12. Răduleţ R, *Bazele teoretice ale electrotehnicii,* vol. II şi IV. Lit. Învăţămîntu'ui Bucureşti, 1956

13. Rîjik I. M, Gradstein I. S, *Tabele de integrale, sume, serii şi produse* (trad. din limba rusă) Edit. Tehnică, Bucureşti, 1955.

14. Smirnov V. I., *Curs de matematici superioare,* vol. IV. (trad. din limba rusă), Edit. tehnică, Bucureşti, 1956.

15. Ţugulea A., *Calculul prin încadrare al permeanţei în cîmpuri cu simetrie.* Teză de disertaţie, Institutul Politehnic Bucureşti, 1958.

Primit la 8. XII. 1960.