TRAIECTORIILE ORTOGONALE ALE PLANELOR TANGENTE LA CONUL CIRCULAR. APLICAŢIE LA ROŢILE CONICE

DE

ALEXANDRU NICOLESCU

(Bucureşti)

Lucrare prezentată la Colocviul de analiză numerică din 8–13 decembrie 1960, Cluj

Considerăm conul cu vîrful în originea axelor şi avînd axa Oz ca axă de rotaţie; notăm $k_0 = \operatorname{tg} \varphi$, în care φ este unghiul $\left(< \frac{\pi}{2}\right)$ format de generatoarea oarecare OM cu axa pozitivă Oz. Ecuaţia conului este $x^2 + y^2 - k^2 z^2 = 0$, iar coordonatele unui punct M_0 de pe generatoarea OM sînt

$$x_0 = \frac{k_0}{\sqrt{1 + k_0^2}} \rho \cos \theta ; \quad y = \frac{k_0}{\sqrt{1 + k_0^2}} \rho \sin \theta ; \quad z_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + k_0^2}} \rho,$$

astfel că planul tangent la con în acest punct se va scrie $x \cos \theta + y \sin \theta - k_0 z = 0$, unde am însemnat $\rho = OM_0$; $\theta = \sphericalangle (Ox, Om)$, m fiind proiecţia lui M pe planul xOy.

Pentru a fixa coordonatele unui punct $P(u, v)$ din planul tangent, determinăm un sistem de axe format din dreptele OM şi ON, respectiv generatoarea conului şi urma planului tangent pe planul xOy.

Cosinusii directorii ai acestor drepte vor fi

$$(OM): \alpha = \frac{k_0 \cos \theta}{\sqrt{1 + k_0^2}}, \quad \beta = \frac{k_0 \sin \theta}{\sqrt{1 + k_0^2}}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + k_0^2}},$$

$$(ON): \alpha_1 = \sin \theta, \quad \beta_1 = -\cos \theta, \quad \gamma_1 = \theta_0.$$

Coordonatele punctului P vor fi atunci

$$x = \lambda k_0 \cos \theta + v \sin \theta, \; y = \lambda k_0 \sin \theta - v \cos \theta, \; z = \lambda$$

$$\lambda = \frac{u}{\sqrt{1 + k_0^2}}. \tag{1}$$

Considerăm că la fiecare poziţie a planului tangent există un punct $P(u, v)$ în acest plan astfel că tangenta la curba descrisă de P să fie perpendiculară pe planul tangent; în acest caz (x, y, z) sînt funcţii de θ, deci şi u, v.

Condiţiile sînt date de ecuaţiile

$$\frac{x'\theta}{\cos\theta} = \frac{y'\theta}{\sin\theta} = \frac{z'\theta}{-k_0}$$

sau

$$k_0\lambda' + v' \operatorname{tg}\theta - k_0\lambda \operatorname{tg}\theta + v = k_0\lambda' - v' \operatorname{ctg}\theta + k_0\lambda \operatorname{ctg}\theta + v = -\frac{1}{k_0}\lambda';$$

deducem imediat sistemul diferenţial

$$v' = k_0\lambda,$$

$$\lambda' k_0 + v = -\frac{\lambda'}{k},$$

din care rezultă $\lambda'' + m^2\lambda = 0 \left(m = \frac{k_0}{\sqrt{1+k_0^2}}\right)$ şi de aici

$$\lambda = A\cos(m\theta) + B\sin(m\theta),$$

$$u = \frac{k_0}{m}[A \cdot \cos(m\theta) + B\sin(m\theta)],$$

$$v = \frac{k_0}{m}[A\sin(m\theta) - B\cos(m\theta)].$$

Rezultă imediat că locul geometric al punctelor P în planul tangent este format din familia de cercuri

$$u^2 + v^2 = \frac{k_0^2}{m^2}(A^2 + B^2). \tag{2}$$

Execuţiile parametrice ale traiectoriei punctului P vor fi atunci date de ecuaţile (1), în care u şi v se înlocuiesc cu valorile lor de mai sus.

Să presupunem că în condiţiile iniţiale

$$\theta = 0,\ x_0 = k_0,\ y_0 = 0,\ z_0 = 1,$$

de unde obţinem imediat $A = 1$ şi $B = 0$, iar curba descrisă de P va fi

$$\left.\begin{aligned} x &= k_0\cos\theta\cos(m\theta) + \frac{k_0}{m}\sin\theta\sin(m\theta),\\ y &= k_0\sin\theta\cos(m\theta) - \frac{k_0}{m}\cos\theta\sin(m\theta),\\ z &= \cos(m\theta). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Această curbă este sferică, deoarece

$$x^2 + y^2 + z^2 = k_0^2\cos^2(m\theta) + (k_0^2 + 1)\sin^2(m\theta) + \cos^2(m\theta) = (k_0^2 + 1).$$

În concluzie:

Traiectoriile ortogonale ale planelor tangente la conul circular drept sînt curbe sferice.

Se observă că în cazul general traiectoria este aşezată pe sfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{k_0^2}{m}(A^2 + B^2),$$

care conţine cercul (2), deci acesta este un cerc mare al sferei. Aşa dar, traiectoria ortogonală se poate genera prin rostogolirea unui cerc mare al sferei, al cărui plan rămîne tangent la un con cu vîrful în centrul sferei, unul din punctele acestui cerc descriind curba.

Acest mod de generare are o mare asemănare cu determinarea evoventelor sferice, *folosite în angrenajele conice*. Într-adevăr, să considerăm cazul angrenajelor formate din doua conuri, avînd vîrful în centrul sferei, bazele (cercurile de bază) pe sferă şi tangente de-alungul unei generatoare (raze sferice) comune. Se ştie că există un cerc mare al sferei, trecînd prin această generatoare, tengent la cercurile de bază ale flancurilor (dinţilor) angrenate. Prin rularea acestui cerc mare pe conul fix iau naştere evolvente sferice, ca desfăşurate ale cercurilor-bază ale flancurilor. Ori, desfăşurata este evident perpendiculară pe planul tangent la con şi determinarea lor coincide astfel cu aceea a traiectoriilor ortogonale ale planurilor tangente la conul circular, adică problema pe care am tratat-o mai înainte.

Se poate face acum un nou studiu aprofundat al acestei curbe sferic ceaece constituie o altă parte a lucrării noastre, dedicată curbelor sferice. curbelor Ţiţeica şi transformatelor acestora.*)

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ТРАЕКТОРИИ ПЛОСКОСТЕЙ, КАСАТЕЛЬНЫХ К КОНУСУ ВРАЩЕНИЯ. ПРИМЕНЕНИЕ К КОНИЧЕСКИМ ШЕСТЕРНЯМ

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе исследуется проблема ортогональных траекторий, касательных к конусу вращения плоскостей, тесно связанная с проблемой конических зацеплений.

Действительно, рассмотрим случай зацеплений, сосотящих из двух конусов вращения, касательных вдоль общей образующей, имеющих общую вершину в центре сферы, две окружности которой являются основаниями конусов.

*) Lucrare susţinută la sesiunea ştiinţifică a Soc. Rom. de ştiinţe ,,Gazeta Matematică", aprilie 1960.

Известно, что существует большая окружность сферы, плоскость которой содержит общую образующую и касается окружностей, образующих фланги (профили) зубцов зацепления.

Перекатыванием этой плоскости по неподвижному конусу образуется сферическая эвольвента как развертка окружности, образующей профиль зубцов. Но эта эвольвента, очевидно, перпендикулярна касательной к конусу, плоскости, и ее определение совпадает с определением ортогональной траектории плоскостей, касательных к неподвижному конусу.

Рассмотрение задачи ведет к установлению уравнения этой кривой в виде (3) где

$$m = \frac{k_0}{\sqrt{1 + k_0^2}}, \; k_0 = \operatorname{tg} \varphi \quad \left(\varphi < \frac{\pi}{2}\right).$$

Доказано, что это — сферическая кривая, радиус сферы зависит от угла φ раствора конуса.

TRAJECTOIRES ORTHOGONALES DES PLANS TANGENTS AU CÔNE CIRCULAIRE. APPLICATION AUX ENGRENAGES CONIQUES

RÉSUMÉ

L'auteur étudie le problème des trajectoires orthogonales des plans tangents au cône circulaire, question étroitement liée au problème des engrenages coniques.

En effet, considérons le cas des engrenages formés de deux cônes circulaires tangents le long d'une génératrice commune et ayant leur sommet commun au centre d'une sphère et comme bases deux cercles de la même sphère.

On sait qu'il existe un grand cercle de la sphère, dont le plan contient la génératrice commune et qui est tangent aux cercles engendrant les flancs (les profils) des dents d'engrenage.

En faisant rouler ce plan sur le cône fixe, on fait naître l'évolvente sphérique comme une développée du cercle générateur du profil des dents. Or cette développée est évidemment perpendiculaire au plan tangent au cône, et sa détermination coïncide avec celle de la trajectoire orthogonale des plans tangents au cône fixe. Examinant ce problème, l'auteur a trouvé l'équation de la courbe développée sous la forme (3), où

$$m = \frac{k_0}{\sqrt{1 + k_0^2}}, \; k_0 = \operatorname{tg} \varphi \quad \left(\varphi < \frac{\pi}{2}\right)$$

étant l'angle d'ouverture du cône, et montre qu'il s'agit d'une courbe sphérique, le rayon de la sphère dépendant de l'angle φ.