ÎNCADRAREA FUNCŢIONALEI DE ENERGIE PENTRU ECUAŢIA LUI LAPLACE CU APLICAŢII ÎN ELECTROTEHNICĂ

DE

ANDREI ŢUGULEA
(Bucureşti)

Lucrare prezentată la Colocviul de analiză numerică din 8—13 decembrie 1960, Cluj.

Determinarea cîmpurilor Laplaceene prezintă importanţă deosebită în fizică şi tehnică. Cîmpurile electrostatice în domenii fără sarcini electrice, cîmpurile magnetostatice, cîmpurile magnetice staţionare în regiuni lipsite de curenţi de conducţie, cîmpurile staţionare de temperatură în domenii lipsite de surse de căldură etc. sînt numai cîteva exemple de astfel de cîmpuri [4].

Metodele utilizate în acest scop, deşi sînt destul de variate, nu reuşesc să acopere toate cazurile care prezintă interes, fapt care justifică atenţia deosebită ce se acordă în continuare şi în prezent acestor probleme. Dintre metodele elaborate mai recent se desprind cu preponderenţă metodele de aproximaţie şi anume metoda reţelelor, metodele grafice, metodele variaţionale directe, metoda pătratelor minime, metoda Monte-Carlo [1], [2], [3].

Rezultate deosebit de preţioase se obţin cu ajutorul modelizării şi al maşinilor de calcul [6].

În anumite probleme nu interesează cîmpurile, ci numai anumite funcţii globale în care intervin aceste cîmpuri.

Calculul capacităţilor electrostatice, al permeanţelor magnetice, al conductanţelor electrice, al rezistenţelor termice etc. constituie exemple în care sînt necesare mărimi globale exprimabile cu ajutorul cîmpurilor, cum sînt fluxul electric şi magnetic, fluxul de căldură, intensitatea curentului electric etc.

Aceste mărimi se pot însă calcula şi dacă se cunoaşte energia electrică, respectiv energia magnetică, energia transformată prin efect Joule-Lenz în conductoare, căldura transmisă etc. pentru domeniile în care se determină cîmpurile şi se pot exprima cu ajutorul integralei de volum a pătratului gradientului de potenţial extinsă la volumul domeniului considerat.

Dacă $V(\bar{r})$ este potenţialul care satisface ecuaţia lui Laplace (potenţial electrostatic, magnetostatic, electrocinetic, termic etc.) vom numi integrală de energie a cîmpului considerat expresia

$$E(V) = \int_{V_\Sigma} (\text{grad } V)^2 \, dv.$$

Prin extensie, pentru orice funcţie scalară continuă $\varphi(\bar{r})$ care satisface aceleaşi condiţii pe frontiera domeniului ca şi $V(\bar{r})$ vom numi *funcţională de energie* expresia

$$E(\varphi) = \int_{V_\Sigma} (\text{grad } \varphi)^2 \, dv,$$

observînd că $V(\bar{r})$ reprezintă funcţia care asigură minimul acestei expresii, ecuaţia lui Laplace fiind ecuaţia de tip Euler a problemei variaţionale considerate, [2], [3].

În lucrare se prezintă o metodă de încadrare a integralei de energie între o valoare superioară şi una inferioară faţă de valoarea minimă pe care o ia pentru $\varphi(r) = V(\bar{r})$. Metoda se bazează pe o teoremă a lui Rayleigh [5] utilizată în acelaşi scop de acesta şi de Maxwell şi pe o consecinţă a acestei teoreme stabilită de autor [7].

Conform acestei teoreme orice funcţie $\varphi(\bar{r})$ continuă într-un domeniu D mărginit de suprafaţa Σ care nu satisface ecuaţia lui Laplace peste tot şi care ia pe această suprafaţă valori egale cu valorile potenţialului $V(\bar{r})$, soluţie a problemei Dirichlet pentru domeniul considerat, conduce la o valoare superioară a funcţionalei de energie. Demonstraţia este evidentă dacă luăm în considerare aspectul variaţional al problemei.

Dacă se consideră diferenţa $\psi(\bar{r}) = \varphi(r) - V(\bar{r})$ relaţia dintre $E(V)$ şi $E(\varphi)$ este

$$E(\varphi) \equiv \int_{V_\Sigma} (\text{grad } \varphi)^2 \, dv =$$

$$= \int_{V_\Sigma} (\text{grad } V)^2 \, dv + \int_{V_\Sigma} (\text{grad } \psi)^2 \, dv + 2\int_{V_\Sigma} \text{grad } V \text{ grad } \psi \, dv =$$

$$= E(V) + E(\psi), \tag{1}$$

deoarece $\int_{V_\Sigma} \text{grad } V \text{grad } \varphi \, dv = \int_{\Sigma} (\psi \text{ grad } V) \, d\bar{A} - \int_{V_\Sigma} \psi \Delta V dv = 0$, în virtutea faptului că $\psi(\bar{r}) = \varphi(\bar{r}) - V(\bar{r})$ este identic nulă pe frontieră iar $\Delta V = 0$. Diferenţa dintre cele două funcţionale $E(\psi) = E(\varphi) - E(V)$ este mereu pozitivă şi este cu atît mai mică cu cît diferenţa $|\psi(r)|$ este mai mică.

Conform formulei lui Green,

$$E(\psi) = \int_{V_\Sigma} |\text{grad } \psi|^2 \, dv = \int_{V_\Sigma} \psi \text{ grad } \psi \, d\bar{A} - \int_{V_\Sigma} \psi \Delta \psi \, dv =$$

$$= -\int_{V_\Sigma} (\varphi - V) \, \Delta\varphi \, dv = \int_{V_\Sigma} V\Delta\varphi \, dv - \int_{V_\Sigma} \varphi \, \Delta\varphi \, dv, \tag{2}$$

substituind (2) în (1) rezultă

$$E(\varphi) + \int_{V_\Sigma} \varphi\Delta\varphi \, dv = E(V) + \int_{V_\Sigma} V\Delta\varphi \, dv, \tag{3}$$

sau

$$E(V) > | \, E(\varphi) + \int_{V_\Sigma} \varphi\Delta\varphi \, dv \, | - V_{\max} \int_{V_\Sigma} |\Delta\varphi| \, dv = D(\varphi). \tag{4}$$

Prin urmare, funcţiile $D(\varphi)$ şi $E(\varphi)$ încadrează valoarea extremă a funcţionalei $E(V)$,

$$E(\varphi) > E(V) > D(\varphi).$$

Dacă prin metode adecvate diferenţa $E(\varphi) - D(\varphi)$ dintre aceste valori de încadrare se face mică în raport cu valorile lor absolute, atunci oricare din ele, sau eventual o medie a lor, pot aproxima cu precizia corespunzătoare semidiferenţei lor, valoarea extremă a funcţionalei.

Din expresia (4) rezultă că această diferenţă este cu atît mai mică cu cît sînt mai restrînse regiunile în care $\Delta\varphi = 0$ în domeniul considerat. Dacă se găseşte o astfel de funcţie, ea poate conduce la valori de încadrare foarte apropiate între ele.

Pentru probleme Dirichlet, care interesează de obicei în aplicaţiile amintite la început, şi pentru domenii complexe care se pot împărţi în subdomenii pentru care se poate scrie efectiv expresia analitică a soluţiei ecuaţiei lui Laplace o metodă adecvată este următoarea:

Fie D_Σ domeniul complex pentru care se cere să se determine funcţia $\varphi(\bar{r})$ cu ajutorul căreia se încadrează valoarea extremă a funcţionalei de energie. Se cunoaşte pe frontiera domeniului D_Σ distribuţia valorilor potenţialului.

Fie $D_{\Sigma_1}, D_{\Sigma_2}, \ldots, D_{\Sigma_n}$ cele n subdomenii în care se poate împărţi domeniul D_Σ şi pentru care soluţia ecuaţiei lui Laplace se poate scrie analitic şi fie $S_1, S_2, \ldots, S_n$ suprafeţele prin care se realizează această împărţire. Dacă s-ar cunoaşte valorile potenţialului şi pe aceste suprafeţe de împărţire, problema s-ar reduce la n probleme Dirichlet. Deoarece aceste valori nu se cunosc, ele se aleg în acord cu proprietăţile pe care trebuie să le satisfacă potenţialul (care este funcţie armonică în domeniul D_Σ) şi anume:

a) să fie continuu împreună cu derivatele sale pînă la ordinul al doilea,

b) să ia valorile extreme pe frontiera domeniului.

Prin rezolvarea celor n probleme Dirichlet cu condiţiile pe frontiere astfel completate, se obţine o funcţie $\varphi(\bar{r})$ continuă în întregul domeniu D, luînd valorile $\varphi_1(\bar{r}), \varphi_2(\bar{r}), \ldots, \varphi_n(\bar{r})$ în cele n subdomenii şi avînd discontinue, în general, derivatele după normala la suprafeţele de separaţie $S_1, S_2, \ldots, S_n$. În acest caz, observînd că peste tot în afară de punctele suprafeţelor de separaţie în subdomenii este îndeplinită condiţia $\Delta\psi = \Delta\varphi = 0$ din relaţia (2), rezultă

$$E(\psi) = \int_{\Sigma} \psi \, \text{grad } \varphi \, d\bar{A} + \int_{S_1+S_2+\ldots+S_n} \psi \, \text{grad } \psi \, d\bar{A} = \sum_{k=1}^{n} \int_{S_k} (\varphi - V) \, \text{grad } \varphi \, d\bar{A}, \tag{2'}$$

integralele efectuîndu-se pe ambele feţe ale suprafeţelor S_k.

În aceste condiţii relaţia de încadrare (4) devine

$$E(\varphi) > E(V) > \left| E(\varphi) - \sum_{k=1}^{n} \int_{S_k} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dA \right| - V_{\max} \sum_{k=1}^{n} \int_{S_k} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right| dA = D(\varphi), \qquad (4')$$

în care integralele $\int_{S_k} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right| dA$ se pot extinde şi numai la acele porţiuni ale suprafeţelor S_k pentru care $\frac{\partial \varphi}{\partial n} < 0$, obţinîndu-se astfel o încadrare mai strînsă [7].

Cum în general domeniile pentru care se pot găsi uşor expresii analitice ale ecuaţiei lui Laplace sînt domenii mărginite de suprafeţe de coordonate, rezultă că metoda îşi poate găsi o largă aplicaţie pentru domenii complexe care se pot împărţi în subdomenii mărginite de suprafeţe de coordonate.

În ceea ce priveşte forma concretă a funcţiei $\varphi(\bar{r})$ pe suprafeţele de separaţie, aceasta se poate exprima fie prin polinoame de puteri ale coordonatelor care variază în lungul suprafeţelor de separaţie, fie prin sume finite de funcţii de aceste variabile, eventual dintr-un sistem complet de funcţii.

Diferenţa valorilor de încadrare se poate micşora dacă, în acord cu metoda lui Ritz, coeficienţii nedeterminaţi ai expresiilor funcţiei $\varphi(\bar{r})$ pe suprafeţele de separaţie se aleg din condiţia suplimentară ca $E(\varphi)$, calculat în funcţie de aceştia, să fie minim, adică anulînd derivatele în raport cu aceşti coeficienţi.

În acelaşi scop se poate utiliza o ecuaţie integrală pentru potenţialul $V(\bar{r})$ pe suprafeţele de separaţie [7].

Remarcăm şi faptul că metoda nu este aplicabilă pentru cazurile în care valorile funcţionalei de energie sînt infinite.

Dacă valorile de încadrare sînt apropiate între ele, funcţia $\varphi(\bar{r})$ aproximează foarte bine potenţialul $V(\bar{r})$, putînd fi luată ca bază de plecare pentru metoda reţelelor, în vederea unor aproximări şi mai bune.

Pentru a ilustra metoda, vom calcula capacitatea electrică pe unitate de lungime între doi electrozi metalici de secţiune dreptunghiulară avînd aşezarea şi dimensiunile din figură (figura 1 *a*). Din punct de vedere matematic problema se reduce la determinarea integralei de energie pentru domeniul cuprins între cele două dreptunghiuri. Fără a restrînge generalitatea putem presupune că potenţialul ia valoarea 1 pe dreptunghiul interior şi valoarea 0 pe cel exterior.

Împărţirea în subdomenii este indicată în figura 1 *b* prin liniile punctate S_1, S_1', S_2, S_2', S_3, S_3', S_4, S_4' pe care presupunem o variaţie liniară a funcţiei $\varphi(\bar{r})$ de la 0 la 1. Datorită simetriei este suficient să rezolvăm ecuaţiile în subdomeniile D_1, D_2 şi D_3.

Pentru D_1 se obţine

$$\varphi_1 = \frac{y}{\delta_2}, \quad \text{unde } \delta_2 = \frac{1}{2}(b - b_1).$$

Pentru D_3 se obţine

$$\varphi_3 = \frac{x}{\delta_1}, \quad \text{unde } \delta_1 = \frac{1}{2}(a - a_1).$$

Pentru D_2 se obţine

$$\varphi_2 = \frac{xy}{\delta_1 \delta_2},$$

care verifică ecuaţia lui Laplace cît şi condiţiile pe frontieră, inclusiv pe frontierele de separaţie în subdomenii.

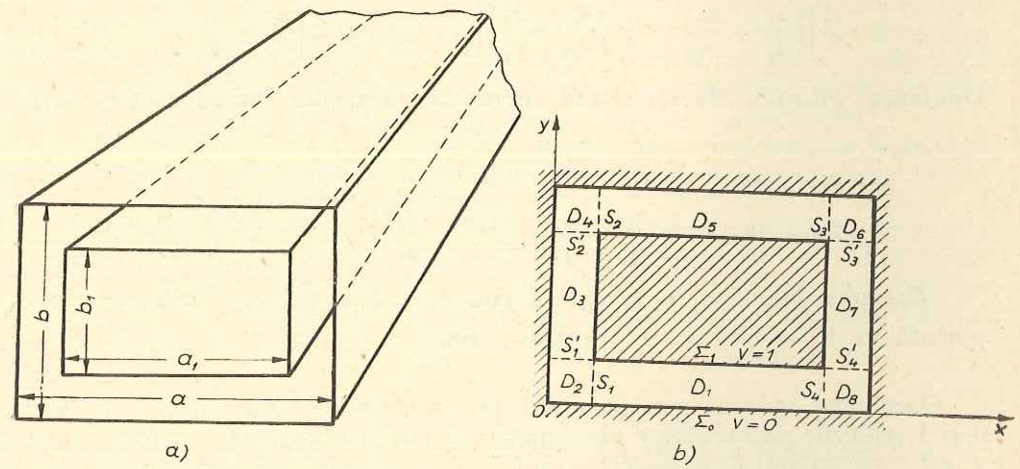

Fig. 1 — Figuri pentru calculul, prin încadrarea funcţionalei de energie a capacităţii, pe unitatea de lungime a unui condensator cilindric cu armături de secţiune dreptunghiulară: *a*) vedere generală cu indicarea dimensiunilor; *b*) alegerea axelor şi împărţirea în subdomenii.

Expresiile corespunzătoare ale funcţionalelor de energie vor fi

$$E(\varphi_1) = \frac{a_1}{\delta_2},$$

$$E(\varphi_3) = \frac{b_1}{\delta_1},$$

$$E(\varphi_2) = \int_0^{\delta_1} \int_0^{\delta_2} \left(\frac{y^2}{\delta_1^2 \delta_2^2} + \frac{x^2}{\delta_1^2 \delta_2^2} \right) dx\, dy = \frac{1}{3} \left(\frac{\delta_1}{\delta_2} + \frac{\delta_2}{\delta_1} \right).$$

Expresia pentru întregul domeniu este

$$E(\varphi) = 2E(\varphi_1) + 2E(\varphi_3) + 4E(\varphi_2) = \frac{2a_1}{\delta_2} + \frac{2b_1}{\delta_1} + \frac{4}{3} \left(\frac{\delta_1}{\delta_2} + \frac{\delta_2}{\delta_1} \right).$$

Observînd că $\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = 0$ şi $\frac{\partial\varphi_3}{\partial n} = 0$ pe suprafeţele de separaţie iar $\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} > 0$, pentru expresia lui $D(\varphi)$, se poate considera

$$D(\varphi) = \left| E(\varphi) - \sum_{k=1}^{m} \int_{S_k} \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} \mathrm{d}A \right| = \left| \int \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} \mathrm{d}A \right| = \left| \int \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} \mathrm{d}s \right| =$$

$$= 2\left(\frac{a_1}{\delta_2} + \frac{b_1}{\delta_1}\right),$$

integrala extinzîndu-se numai pe suprafeţele frontieră ale întregului domeniu.

Rezultă deci:

$$2\left[\left(\frac{a_1}{\delta_2} + \frac{b_1}{\delta_1}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{\delta_1}{\delta_2} + \frac{\delta_2}{\delta_1}\right)\right] > E(V) > 2\left[\frac{a_1}{\delta_2} + \frac{b_1}{\delta_1}\right].$$

Diferenţa valorilor de încadrare raportată la media lor aritmetică este

$$\frac{E(\varphi) - D(\varphi)}{\frac{1}{2}[E(\varphi) + D(\varphi)]} = \frac{\frac{4}{3}\left(\frac{\delta_1}{\delta_2} + \frac{\delta_2}{\delta_1}\right)}{2\left[\frac{a_1}{\delta_2} + \frac{b_1}{\delta_1} + \frac{1}{3}\left(\frac{\delta_1}{\delta_2} + \frac{\delta_2}{\delta_1}\right)\right]} = \frac{1}{0{,}5 + \frac{3}{2}\frac{a_1\delta_1 + b_1\delta_2}{\delta_1^2 + \delta_2^2}},$$

Exemplu numeric: $a_1 = b_1 = 1$ cm, $\delta_1 = \delta_2 = 0{,}1$ cm. Diferenţa raportată va fi $\frac{1}{15 + 0{,}5} = \frac{1}{15{,}5} \approx 0{,}06 = 6\%$.

Deoarece valorile potenţialului pe frontierele domeniului s-au luat 0 şi 1, valorile de încadrare ale capacităţii vor fi $\varepsilon E(\varphi) > C > \varepsilon D(\varphi)$, unde ε este permitivitatea dielectricului.

În concluzie, pentru calculul capacităţii electrice a sistemului se poate recomanda formula

$$C = \frac{\varepsilon[E(\varphi) + D(\varphi)]}{2} = \frac{2\varepsilon}{\delta_1\delta_2}\left[a_1\delta_1 + b_1\delta_2 + \frac{1}{3}(\delta_1^2 + \delta_2^2)\right],$$

care în cazul exemplului numeric considerat dă erori sub 3%.

O încadrare şi mai strînsă s-ar fi obţinut dacă se introduceau numai suprafeţele de separaţie S_1, S_2, S_3 şi S_4, renunţîndu-se la subdomeniile D_2, D_4, D_6 şi D_8. În acest caz soluţia ecuaţiei lui Laplace pentru subdomeniile rămase nu ar fi avut o expresie chiar atît de simplă, rezultatul obţinîndu-se sub formă de serie.

Un număr de exemple rezolvate pe această cale sînt date în lucrările autorului [7]. Se observă că formulele obţinute în acest exemplu particular conduc la erori mari atunci cînd valorile δ_1 şi δ_2 sînt comparabile cu a_1 şi b_1. În acest caz considerarea pentru $\varphi(\bar{r})$ a unei variaţii liniare pe suprafeţele de separaţie nu este potrivită şi în locul ei se pot considera polinoame de x, respectiv de y, ai căror coeficienţi se determină din condiţia ca aceste funcţii să ia valorile 0 şi 1 pe frontierele domeniului şi să asigure o valoare minimă pentru funcţionala $E(\varphi)$, încadrarea efectuîndu-se cu această valoare minimă.

Concluzii

Încadrarea funcţionalei de energie constituie o metodă preţioasă în tratarea unor probleme în care se caută valoarea sa extremă, permiţînd în acelaşi timp aprecierea erorii cu care se efectuează aproximaţia. Acest fapt constituie un avantaj în raport cu alte metode de aproximaţie în care eroarea se evaluează mai greu sau este imposibil de evaluat.

Apropierea valorilor de încadrare poate fi realizată prin mijloace relativ simple cum ar fi metoda Ritz, mărindu-se astfel precizia aproximaţiei. Funcţiile φ cu ajutorul cărora se calculează valorile de încadrare aproximează bine şi valorile potenţialului, putînd constitui o bază de plecare pentru anumite metode numerice (de exemplu pentru metoda reţelelor). În acest caz nu se poate evalua eroarea aproximaţiei.

Spre deosebire de metodele de aproximare numerice, metoda încadrării permite obţinerea rezultatelor sub formă analitică, fiind din acest punct de vedere o metodă mai generală.

Spre deosebire de metodele numerice care se pot aplica în principiu oricărui domeniu, metoda încadrării are aplicabilitate mai restrînsă, fiind potrivită pentru domenii care se pot împărţi în subdomenii mărginite de suprafeţe de coordonate pentru care ecuaţia lui Laplace se poate rezolva prin metoda separării variabilelor.

ОЦЕНКА ФУНКЦИОНАЛА ЭНЕРГИИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА С ПРИМЕНЕНИЕМ В ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ

РЕЗЮМЕ

В работе излагается метод оценки снизу и сверху функционала энергии для уравнения Лапласа $E(\varphi) = \int_{V_\Sigma} (\mathrm{grad}\ \varphi)^2 \mathrm{d}v$ на основе на риационного аспекта задачи. Указывается метод построения функций φ, обеспечивающих значения для оценки функционала. Полученные результаты применяются для вычисления близких между собой оценок для электрической емкости.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКА

Рисунки для вычисления оценок функционала энергии на единицу длины цилиндрического конденсатора с обкладками прямоугольного сечения: *а)* общий вид с указанием размеров; *б)* выбор осей и разделение на подобласти.

ENCADREMENT DE LA FONCTIONNELLE D'ÉNERGIE CONCERNANT L'ÉQUATION DE LAPLACE, AVEC DES APPLICATIONS EN ÉLECTROTECHNIQUE

RÉSUMÉ

L'auteur décrit une méthode d'encadrement de la fonctionnelle d'énergie concernant l'équation de Laplace, $E(\varphi) = \int\limits_{V_\Sigma} (\text{grad } \varphi)^2 \, dv$, entre une valeur inférieure et une valeur supérieure, méthode fondée sur l'aspect variationnel du problème. Il indique un procédé pour construire les fonctions φ et qui est capable d'assurer les valeurs d'encadrement de la fonctionnelle. Les résultats obtenus sont appliqués au calcul des valeurs d'encadrement, voisines entre elles, de la capacité électrique.

EXPLICATION DES FIGURES

Figures pour calculer, par encadrement de la fonctionnelle d'énergie, la capacité par unité de longueur d'un condensateur cylindrique portant des armatures desection rectangulaire : *a*) vue générale avec indication des dimensions ; *b*) choix des axes et divisionensous-domaines.

BIBLIOGRAFIE

1. Beckenbach E. F. (red.), *Modern mathematics for the engineer*. Mc. Graw-Hill, New-York-Toronto — London, 1956.
2. Канторович Л. В., Крылов R. И., *Приближенные методы высшего анализа.* Москва—Ленинград, 1950.
3. Михлин С. Г., *Прямые методы в математической физике.* Москва—Ленинград, 1950.
4. Rădulet R., *Bazele teoretice ale electrotehnicii*, I şi II, (curs litografiat). Bucureşti, 1955.
5. Релей, *Теория звука* (trad. din limba engleză), II, XVI. Москва, 1955.
6. Тетелбаум И. М., *Электрическое моделлирование*, Москва, 1959.
7. Ţugulea A., *Calculul prin încadrare al permeanţelor în cîmpuri de simetrie.* Lucrare de disertaţie, Institutul politehnic, Bucureşti, 1957.

Primit la 8. XII. 1960.