EVALUAREA ERORILOR DE CALCUL ÎN INTERPOLAREA PRIN POLINOAME

DE

T. POPOVICIU

Membru al Academiei R. P. R.

(Cluj)

1. Utilizarea practică a formulei de interpolare a lui Lagrange

$$f(x) \approx L(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f|x), \tag{1}$$

unde în membrul al doilea avem polinomul lui Lagrange de gradul n care ia valorile funcţiei $f(x)$ pe nodurile (distincte) de interpolare x_i ($i = 1, 2, \ldots, n + 1$), depinde în mare măsură de forma sub care este pus acest polinom. Acest lucru este mai cu seamă important atunci cînd este vorba de calculul efectiv al valorilor polinomului pentru diferitele valori ale variabilei x. Aici ne ocupăm numai de cazul cînd variabila x şi funcţia $f(x)$ sînt reale. În acest caz, pentru aflarea valorii polinomului trebuie efectuate un număr finit de operaţii elementare de adunare, scădere, înmulţire şi împărţire asupra unor numere reale, deobicei fracţii zecimale limitate, şi într-o ordine determinată. Forma sub care se pune polinomul lui Lagrange este în legătură tocmai cu această ordine a operaţiilor. În ceea ce priveşte operaţiile, ele se execută, pe baza unor procedee cunoscute, direct sau cu maşina, şi care în mod practic revin la determinarea succesivă a cifrelor zecimale ale rezultatului fiecărui calcul parţial, exact sau aproximativ, în parte.

Procedeul de calcul întrebuinţat comportă erori inerente datorită faptului că calculele succesive se fac cu aproximaţie, de exemplu din cauza limitării la un anumit număr de zecimale ale rezultatelor parţiale obţinute. Aceste erori se reflectă asupra rezultatului final, determinînd o corecţie care, în problema de interpolare considerată, va trebui adăugată la corecţiile determinate de erorile de care sînt afectate datele problemei.

Vom presupune întîi că nodurile nu sînt neapărat echidistante și ne vom ocupa de calculul membrului al doilea al formulei (1) pentru $x = x_0$, cu ajutorul formulei lui Newton

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f \mid x_0) = \sum_{i=0}^{n} (x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \ldots (x_0 - x_i) D_1^i, {}^{*)} \tag{2}$$

unde coeficienții D_1^i, $(i = 0, 1, \ldots, n)$, se obțin din tabloul 1 al diferențelor divizate în care avem în general

$$D_i^j = D_i^j[f] = [x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+j}; f], \quad D_i^0 = f_i = f(x_i), \tag{3}$$

folosind notațiile obișnuite pentru diferențele divizate ale funcției $f(x)$.

Formarea tabloului 1 al diferențelor divizate se face calculînd succesiv coloanele cu ajutorul formulei de recurență

$$D_i^j[f] = \frac{D_{i+1}^{j-1}[f] - D_i^{j-1}[f]}{x_{i+j} - x_i} \quad (D_i^0[f] = f_i) \tag{4}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n + 1 - j; \quad j = 1, 2, \ldots, n).$$

Se vede că acest calcul necesită împărțiri (cu diferențe de noduri) din care cauză, în general, diferențele divizate nu se pot calcula, de exemplu, sub forma practică de fracții zecimale limitate, decît cu o anumită aproximație, chiar dacă nodurile și valorile funcției pe aceste noduri sînt date sub această formă.

Tabloul 1

x	$f(x)$	D^1	D^2	D^3	…	D^{n-1}	D^n
x_1	f_1						
		D_1^1					
x_2	f_2		D_1^2				
		D_2^1		D_1^3	…		
x_3	f_3		D_2^2			D_1^{n-1}	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮			D_1^n
						D_2^{n-1}	
x_{n-1}	f_{n-1}		D_{n-2}^2		⋰		
		D_{n-1}^1		D_{n-2}^3			
x_n	f_n		D_{n-1}^2				
		D_n^1					
x_{n+1}	f_{n+1}						

*) Pentru $i = 0$ termenul corespunzător al sumei se reduce la D_1^0. O convenție analoagă se aplică și formulelor (6), (22), (24).

Dacă însă elementele tabloului 1 se calculează aproximativ, erorile comise se transpun asupra polinomului de interpolare.

Pe de altă parte, înmulțirile care intervin în calculul valorii polinomului de interpolare se fac de asemenea cu erori. În cele ce urmează ne propunem să examinăm pe rînd efectul acestor două feluri de erori, care se suprapun. Pentru simplificare vom presupune că nodurile și punctul x_0, unde se interpolează, nu sînt afectate de erori.

2. Ne ocupăm în primul rînd de efectul erorilor ce apar la calculul diferențelor divizate, presupunînd că înmulțirile indicate în formula (2) se fac exact.

Coloanele tabloului 1 se calculează succesiv cu anumite aproximații. Fie $\tilde{f}_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n + 1)$, niște valori aproximative ale valorilor funcției pe noduri, $c_i^{(0)}$, $(i = 1, 2, \ldots, n + 1)$, corecțiile respective, deci $f_i = \tilde{f}_i + c_i^{(0)}$, $(i = 1, 2, \ldots, n + 1)$. Fie apoi, în general, $\tilde{D}_i^j = \tilde{D}_i^j[f]$, $(i = 1, 2, \ldots, n + 1 - j)$, valorile aproximative ale elementelor coloanei j, calculate cu ajutorul elementelor deja calculate ale coloanei $j - 1$ și $c_i^{(j)}$, $(i = 1, 2, \ldots, n + 1 - j)$, corecțiile respective. Vom avea atunci

$$\tilde{D}_i^j + c_i^{(j)} = \frac{\tilde{D}_{i+1}^{j-1} - \tilde{D}_i^{j-1}}{x_{i+j} - x_i} \quad (\tilde{D}_i^0 = \tilde{f}_i) \tag{5}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n + 1 - j, \quad j = 1, 2, \ldots, n)$$

Tabloul 1 al diferențelor divizate se înlocuiește atunci cu tabloul 2 al valorilor aproximative calculate ale diferențelor divizate.

Tabloul 2

x	$\tilde{f}(x)$	$\tilde{D}^1$	$\tilde{D}^2$	$\tilde{D}^3$	…	$\tilde{D}^{n-1}$	$\tilde{D}^n$
x_1	$\tilde{f}_1$						
		$\tilde{D}_1^1$					
x_2	$\tilde{f}_2$		$\tilde{D}_1^2$				
		$\tilde{D}_2^1$		$\tilde{D}_1^3$	…		
x_3	$\tilde{f}_3$		$\tilde{D}_2^2$			$\tilde{D}_1^{n-1}$	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮			$\tilde{D}_1^n$
						$\tilde{D}_2^{n-1}$	
x_{n-1}	$\tilde{f}_{n-1}$		$\tilde{D}_{n-2}^2$		⋰		
		$\tilde{D}_{n-1}^1$		$\tilde{D}_{n-2}^3$			
x_n	$\tilde{f}_n$		$\tilde{D}_{n-1}^2$				
		$\tilde{D}_n^1$					
x_{n+1}	$\tilde{f}_{n+1}$						

O valoare aproximativă $\widetilde{L}$ a expresiei (2) se obţine atunci cu ajutorul tabloului 2 cu formula

$$\widetilde{L} = \sum_{i=0}^{n} (x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \ldots (x_0 - x_i)\widetilde{D}_1^i \tag{6}$$

şi vom avea

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f|x_0) = \widetilde{L} + \lambda, \tag{7}$$

λ fiind corecţia respectivă.

În vederea delimitării corecţiei λ se introduc funcţionalele liniare $D_i^{j,k}[f]$, definite astfel ($k < n$) :

$$D_i^{j,k}[f] = \frac{D_{i+1}^{j-1,\,k}[f] - D_i^{j-1,\,k}[f]}{x_{i+j+k} - x_i}, \tag{8}$$

pentru $j = 1, 2, \ldots, n-k$, $i = 1, 2, \ldots, n + 1 - k - j$ şi

$$D_i^{0,k}[f] = f_i, \tag{9}$$

pentru $i = 1, 2, \ldots, n + 1 - k$. În lucrarea [1] se stabileşte formula

$$D_i^{j,k}[f] = D_i^{r,\,k+j-r}[D_i^{j-r,\,k}[f]] \qquad (0 \leqslant r \leqslant j), \tag{10}$$

care se mai scrie simbolic

$$D^{\alpha+\beta,\,k} = D^{\alpha,\,\beta+k} D^{\beta,k}.$$

Notaţia folosită se bazează pe observaţia că orice şir de $n + 1$ numere $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n+1}$ poate fi considerat ca fiind format de valorile $\varphi_i = \varphi(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n + 1$ ale unei funcţii $\varphi(x)$, definite pe nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$.

Ţinînd seama de formula (10) s-a obţinut în lucrarea citată următoarea expresie pentru corecţia λ :

$$\lambda = \sum_{i=0}^{n} (x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \ldots (x_0 - x_i)\left[\sum_{r=0}^{i} D_1^{r,\,i-r}[c^{(i-r)}]\right]. \tag{11}$$

Pentru a delimita corecţia λ avem nevoie de o delimitare convenabilă pentru $D_i^{j,k}[f]$.

Diferenţa divizată $D_1^n = [x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f]$ se delimitează uşor ţinînd seama de formula binecunoscută

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f] = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{f_i}{l'(x_i)},$$

unde $l(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n+1})$. Avem

$$|D_1^n| \leqslant N(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})\, M,$$

unde

$$N(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{|l'(x_i)|} \tag{12}$$

şi $M = \max\limits_{i=1,2,\ldots,n+1} (|f_i|)$.

O delimitare analoagă a lui $D_1^{n-k,k}[f]$ se poate scrie

$$|D_1^{n-k,\,k}[f]| \leqslant N_k(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})M, \tag{13}$$

unde, de altfel, M se poate înlocui cu $\max\limits_{i=1,2,\ldots,n+1-k} (|f_i|)$.

În formula (13) avem

$$N_k(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = \sup_{\substack{|f_i| \leqq 1 \\ i=1,2,\ldots,n+1-k}} |D_1^{n-k,\,k}[f_i]|.$$

şi deci

$$N_k(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = D_1^{n-k,\,k}[f],$$

cu condiţia să alegem toate numerele f_i, $i = 1, 2, \ldots, n + 1 - k$, egale cu 1 sau -1, în mod convenabil.

Avem

$$N_0(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = N(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}),$$

membrul al doilea fiind dat de (12). Pentru $k > 0$, expresia lui $N_k(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ este însă mai complicată.

În formarea lui $D_1^{n-k,\,k}[f]$ intervin efectiv numai nodurile x_i pentru $i = 1, 2, \ldots, n - k$, $k + 2$, $k + 3, \ldots, n + 1$. Dacă deci $2k \leqslant n - 1$, vor interveni toate nodurile. Dacă însă $2k > n - 1$ nu vor interveni decît primele $n - k$ şi ultimele $n - k$ dintre nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$. Deducem de aici următoarea formulă :

$$N_k(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = N_{n-k-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-k}, x_{k+2}, x_{k+3}, \ldots, x_{n+1}) \tag{14}$$

dacă $2k > n - 1$. Este suficient să presupunem $k < n$, deoarece avem evident

$$N_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = 1. \tag{15}$$

În cazul particular

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1} \tag{16}$$

se arată că are loc formula

$$N_k(x_1, x_2, \ldots, x_{j+k+1}) = \frac{N_k(x_1, x_2, \ldots, x_{j+k}) + N_k(x_2, x_3, \ldots, x_{j+k+1})}{x_{k+k+1} - x_1}, \tag{17}$$

Formulele (14), (15), (17) determină complet pe $N_k(x_1, x_2, \ldots, x_i)$ şi avem

$$|D_i^{j,k}[f]| \leqslant N_k(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+j+k})\, M,$$

unde $M = \max\limits_{r=i,\, i+1, \ldots,\, i+j} (|f_r|)$.

În particular, dacă toate corecţiile $c_i^{(j)}$ rămîn, în valoare absolută cel mult egale cu ε, pe baza formulei (15) avem

$$|D_1^{r,\, i-r}[c^{(i-r)}]| \leqslant N_{i-r}(x_1, x_2, \ldots, x_{i+1})\, \varepsilon$$

şi putem scrie

$$|\lambda| \leqslant V(x_0)\varepsilon, \tag{18}$$

unde

$$V(x) = \sum_{i=1}^{n} |(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_i)| \times$$
$$\times \left[\sum_{r=0}^{i} N_{i-r}(x_1, x_2, \ldots, x_{i+1})\right]. \tag{19}$$

Cînd valorile funcţiei sînt exacte, deci cînd $c_i^0 = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n + 1$, se poate lua chiar

$$V(x) = \sum_{i=1}^{n} |(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_i)| \times$$
$$\times \left[\sum_{r=0}^{i-1} N_{i-r}(x_1, x_2, \ldots, x_{i+1})\right]. \tag{20}$$

3. Ne vom ocupa în continuare de efectul erorilor ce provin de la înmulţirile indicate în formula (2), presupunînd că diferenţele divizate D_1^i care intervin în această formulă sînt calculate exact. Pentru aceasta sînt necesare anumite consideraţii teoretice asupra formulei de interpolare (1).

La orice permutare

$$x_{\nu_1}, x_{\nu_2}, \ldots, x_{\nu_{n+1}} \tag{21}$$

a nodurilor

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \tag{22}$$

va corespunde o formulă de interpolare de forma

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} (x - x_{\nu_1})(x - x_{\nu_2}) \ldots (x - x_{\nu_i}) \times$$
$$\times\ [x_{\nu_1}, x_{\nu_2}, \ldots, x_{\nu_{i+1}}; f] + R(x). \tag{23}$$

Bineînţeles că restul $R(x)$ nu depinde de permutarea considerată şi se poate scrie

$$R(x) = l(x)\ [x, x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f], \tag{24}$$

unde

$$l(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n+1}). \tag{25}$$

Utilizarea practică a formulei de interpolare (23) va depinde de rapiditatea şi exactitatea calculului coeficienţilor

$$[x_{\nu_1}, x_{\nu_2}, \ldots x_{\nu_{i+1}}; f],\ i = 0, 1, \ldots, n, \tag{26}$$

ai acestei formule.

Aceşti coeficienţi se vor găsi pe latura superioară (descendentă) a tabloului de diferenţe divizate corespunzător nodurilor luate în ordinea (21). Însă, pentru formarea acestui tablou, va fi avantajos ca nodurile (21) să fie aşezate în ordinea crescătoare a valorilor lor numerice, căci atunci toate împărţirile ce se fac cu diferenţe de noduri în vederea formării tabloului, se fac cu numere pozitive. În felul acesta sînt eliminate erorile care ar putea proveni din neatenţie la semnele diferenţelor de noduri.

Pentru simplificarea notaţiilor, să presupunem că nodurile, pe care le considerăm distincte, sînt luate în ordinea crescătoare, deci că

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}.$$

Atunci, pe baza observaţiei precedente, tabloul 1 este cel mai avantajos dintre toate cele $(n + 1)\,!$ tablouri analoage obţinute permutînd în toate modurile cele $n + 1$ noduri.

Observăm că nu numai formula (2) se bucură de proprietatea că toţi coeficienţii săi sînt cuprinşi în tabloul 1. Să găsim atunci toate formulele (23) care au toţi coeficienţii lor în tabloul 2. Vom zice că aceste formule aparţin tabloului 1. Pentru aceasta este necesar şi suficient ca pentru orice $i = 0, 1, \ldots, n$ punctele $x_{\nu_1}, x_{\nu_2}, \ldots, x_{\nu_{i+1}}$ să fie $i + 1$ puncte consecutive (luate într-o anumită ordine) ale şirului (22), deci ca permutarea

$$\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_{n+1} \tag{27}$$

a numerelor $1, 2, \ldots, n + 1$ să se bucure de proprietatea că orice secţiune

$$\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{i+1},\quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

a şirului (27) să fie formată din $i + 1$ numere naturale consecutive, luate într-o anumită ordine.

Dacă convenim a spune despre o astfel de permutare (27) că este o permutare consecutivă permutării iniţiale $1, 2, \ldots, n + 1$, vedem că: *condiţia necesară şi suficientă pentru ca formula de interpolare* (23) *să aparţină tabloului* 1 *este ca permutarea* (27) *să fie o permutare consecutivă permutării iniţiale* $1, 2, \ldots, n + 1$ [permutării cu care s-a format tabloul 1].

Să numim *elemente vecine* unui element al tabloului 1, acei termeni ai tabloului, care se găsesc în coloana imediat precedentă şi în coloana imediat următoare, situate imediat deasupra şi imediat dedesubtul elementului considerat. Elementele vecine elementului $[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+j}; f]$ sînt atunci figurate în schema

$$\begin{array}{ccc} [x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+j-1}; f] & & [x_{i-1}, x_j, \ldots, x_{i+j}; f] \\ & \diagdown \qquad \diagup & \\ & [x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+j}; f] & \\ & \diagup \qquad \diagdown & \\ [x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+j}; f] & & [x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+j+1}; f] \end{array}$$

Coeficienţii (26) ai formulelor (23) care aparţin tabloului 1 sînt atunci caracterizaţi de proprietatea că doi coeficienţi consecutivi oarecare sînt elemente vecine în tabloul 1.

Numărul formulelor de interpolare (23) aparţinînd tabloului 1 se poate uşor determina. O formulă (23) se obţine alegînd coeficienţi, cîte unul din fiecare coloană, doi coeficienţi consecutivi fiind vecini. Numărul N_n al acestor formule este deci egal cu numărul drumurilor ce se pot descrie plecînd din prima coloană pînă în ultima, trecînd numai prin elemente vecine.

Să presupunem că $(n+1)!$ se divide cu 2^n şi fie atunci $(n+1)! = 2^n p$. Se poate pune însă întrebarea dacă nu pot fi găsite p tablouri de diferenţe divizate, obţinute prin permutări convenabile ale nodurilor (1), astfel ca ele să conţină toate cele $(n+1)!$ formule (5). În acest caz ar trebui ca fiecare din cele $(n+1)!$ formule (5) să aparţină unuia şi numai unui singur tablou dintre cele p tablouri considerate. În lucrarea [2] se arată că *acest lucru este imposibil, afară de cazul banal* $n = 1$.

Tot în lucrarea [2] se mai arată că numărul formulelor (23) aparţinînd tabloului nr. 1 în care primele j noduri sînt $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+j-1}$ într-o ordine oarecare, este egal cu $2^{j-1}\binom{n-j+1}{i-1}$.

Cu aceste consideraţii introductive ne propunem să determinăm permutarea (21) a nodurilor, astfel ca efectul erorilor ce provin din înmulţirile (2) să fie cel mai mic, atunci cînd aceste înmulţiri se fac ca deobicei după schema

$$\alpha_0(D_1^0 + \alpha_1)(D_1^1 + \ldots + \alpha_{n-1}(D_1^{n-1} + \alpha_n D_1^n)\ldots)),$$

unde s-a notat $\alpha_i = x_0 - x_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Aceasta revine la determinarea permutării (21) astfel ca şirul

$$|x - x_{\nu_1}|,\ |x - x_{\nu_2}|,\ \ldots,\ |x - x_{\nu_{n+1}}| \tag{28}$$

să fie nedescrescător.

Prin această proprietate, permutarea (2) nu este neapărat determinată în mod unic, dar:

x fiind un punct dat al axei reale, orice permutare (21) *pentru care şirul* (28) *este nedescrescător este o permutare consecutivă permutării iniţiale* $1, 2, \ldots, n+1$.

Proprietatea aceasta subzistă indiferent de faptul că x coincide sau nu cu un nod.

Dacă permutarea (21) se bucură de proprietatea că este posibil de a găsi un x, astfel ca şirul (28) să fie nedescrescător, vom zice că această permutare sau formula (23) corespunzătoare *verifică proprietatea de minimum*.

Formulele de interpolare (23), pentru care şirul (28) devine nedescrescător pentru un x convenabil, aparţin deci toate tabloului 1 format cu nodurile luate în ordinea crescătoare.

Nu toate cele 2^n formule (23) aparţinînd tabloului 1 verifică proprietatea de minimum studiată.

Se arată în lucrarea [2] că cel puţin $2n$ dintre aceste formule verifică proprietatea de minimum.

Pentru $n = 1, 2$ cele 2, respectiv 4 formule aparţinînd tabloului 1 verifică proprietatea de minimum.

Dacă $n = 3$ şi $x_1 + x_4 \neq x_2 + x_3$, 7 dintre cele 8 formule aparţinînd tabloului 1 verifică proprietatea de minimum, iar dacă $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$, toate cele 8 formule verifică proprietatea de minimum.

În cazul $n = 4$, dintre cele 16 formule (23) aparţinînd tabloului 1, cel puţin 11 şi cel mult 14 verifică proprietatea de minimum.

Ar fi interesant de văzut, pentru n oarecare, care este numărul minim ($\geqslant 2n$) şi care este numărul maxim ($< 2^n$ dacă $n > 3$) de permutări consecutive permutării iniţiale, care pot verifica proprietatea de minimum.

Pentru o configuraţie dată de noduri, numărul formulelor care verifică proprietatea de minimum se poate determina uşor. Pentru determinarea acestui număr nu este nevoie să examinăm monotonia şirului (28) pentru toate valorile lui x, ci, din motive de continuitate, numai acele valori ale lui x pentru care şirul (28) este nedescrescător fără a fi crescător. Aceasta revine la a examina valorile (în număr finit) ale lui x, pentru care avem

$$|x - x_r| = |x - x_s| \qquad (r \neq s),$$

egalitate care nu poate avea loc decît dacă

$$x = \frac{x_r + x_s}{2}$$

Este destul deci să examinăm numai punctele x care coincid cu mijloacele segmentelor determinate de două noduri.

În particular, dacă nodurile (22) sînt echidistante, punctele x care intervin sînt nodurile însişi precum şi mijloacele segmentelor determinate de cîte două noduri consecutive.

O enumerare detaliată, pe care nu o mai reproducem, ne conduce la rezultatul că dacă nodurile sînt echidistante, numărul formulelor (23) aparţinînd tabloului 1, care verifică proprietatea de minim, este egal cu

$$4.2^{\left[\frac{n}{2}\right]} + 2.3^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} - 2n - 6,$$

unde $[\alpha]$ este întregul cuprins în α.

Pentru aplicarea formulei de interpolare, în punctul x se va alege acea formulă (23) care verifică proprietatea că şirul (28) este nedescrescător.

Să presupunem, în particular, că nodurile sînt simetrice față de un punct al axei reale. Acest punct poate fi originea 0. Trebuie atunci să distingem două cazuri, după cum nodurile sînt în număr impar sau par. Dacă presupunem că se interpolează în vecinătatea originii, trebuie de asemenea să distingem două cazuri după cum punctul x este la stînga sau la dreapta lui O.

Cazul I. Număr impar de noduri. Nodurile în ordine crescătoare se pot scrie atunci ($n = 2k$)

$$-t_k,\ -t_{k-1},\ \ldots,\ -t_1,\ 0,\ t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_k,$$

iar permutările care verifică proprietatea de minimum corespund următoarelor permutări ale nodurilor :

$$0,\ -t_1,\ t_1,\ -t_2,\ t_2,\ \ldots,\ -t_k,\ t_k,$$

$$0,\ t_1,\ -t_1,\ t_2,\ -t_2,\ \ldots,\ t_k,\ -t_k,$$

după cum x este la stînga sau la dreapta lui O.

Dacă x este suficient de aproape de origine, acestea sînt de altfel singurele permutări care verifică proprietatea de minimum.

Formulele de interpolare corespunzătoare sînt generalizări cunoscute ale unor formule ale lui Euler, la care se reduc cînd nodurile sînt echidistante. Făcînd media aritmetică a acestor formule, se deduce o generalizare cunoscută a formulei de interpolare a lui Stirling (inutil să scriem aici explicit aceste formule).

Cazul II. Număr par de noduri. Nodurile în ordine crescătoare se pot scrie atunci ($n = 2k - 1$)

$$-t_k,\ -t_{k-1},\ \ldots\ -t_1,\ t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_k,$$

iar permutările care verifică proprietatea de minimum corespund următoarelor permutări ale nodurilor :

$$-t_1,\ t_1,\ -t_2,\ t_2,\ \ldots,\ -t_k,\ t_k,$$

$$t_1,\ -t_1,\ t_2,\ -t_2,\ \ldots,\ t_k,\ -t_k,$$

după cum x este la stînga sau la dreapta lui 0. Aceste permutări sînt dealtfel singurele care verifică proprietatea de minimum dacă x este suficient de aproape de origine.

Formulele de interpolare corespunzătoare sînt generalizări cunoscute ale altor formule ale lui Euler, la care dealtfel se reduc dacă nodurile sînt echidistante. Făcînd media aritmetică a acestor două formule, obținem o generalizare cunoscută a formulei de interpolare a lui Bessel (inutil să mai scriem explicit aceste formule).

Proprietatea de minimum pe care am stabilit-o constituie o justificare a utilizării acestor formule, în cazul cînd se interpolează în mijlocul tabloului diferențelor divizate.

4. Ne ocupăm în continuare cu cazul particular important al nodurilor echidistante, studiat în lucrarea [3]. Atunci printr-o transformare simplă, problema de interpolare se pune sub forma egalității aproximative.

$$f(a + xh) \approx \sum_{n=0}^{r} \frac{x(x-1)\ldots(x-\nu+1)}{\nu!}\,\Delta_h^\nu f(a), \tag{29}$$

unde coeficienții $\Delta_h^\nu f(a)$ se calculează cu ajutorul tabloului de diferențe ale valorilor $f(a + \nu h)$, $\nu = 0, 1, \ldots, n$, ale funcției $f(x)$ pe noduri.

Calculul valorii polinomului

$$L(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{x(x-1)\ldots(x-\nu+1)}{\nu!}\,\Delta_h^\nu f(a), \tag{30}$$

pentru o valoare dată a lui x, se face pe baza schemei

$$y_{\nu+1} = \Delta_h^{n-\nu} f(a) + \frac{x-n+\nu}{n-\nu+1}\,y_\nu, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n, \quad (y_0 = 0). \tag{31}$$

Atunci

$$y_{n+1} = L(x). \tag{32}$$

Într-o astfel de schemă de calcul însă, în mod practic, fiecare număr $y_{\nu+1}$ se calculează aproximativ, folosind valorile aproximative deja obținute ale numerelor precedente $y_1, \ldots, y_{\nu-1}, y_\nu$. Dacă notăm cu $\bar{y}_\nu$ valoarea aproximativă astfel calculată a lui y_ν și cu c_ν corecția respectivă, succesiunea de calcule se va face, în loc de (4), pe baza schemei

$$\bar{y}_{\nu+1} + c_{\nu+1} = \Delta_h^{n-\nu} f(a) + \frac{x-n+\nu}{n-\nu+1}\,\bar{y}_\nu, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n \quad (\bar{y}_0 = 0). \tag{33}$$

Avem atunci

$$L(x) = \bar{y}_{n+1} + c, \tag{34}$$

unde corecția c este dată de formula

$$c = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{x(x-1)\ldots(x-\nu+1)}{\nu!}\,c_{n-\nu+1}. \tag{35}$$

Dacă eroarea absolută maximă în calculul valorilor aproximative ale numerelor y_ν este $\leqslant \varepsilon$, deci dacă

$$|c_\nu| \leqslant \varepsilon, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n+1, \tag{36}$$

avem

$$|c| \leqslant \varepsilon K_1(x), \tag{37}$$

unde

$$K_1(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \left| \frac{x(x-1)\ldots(x-\nu+1)}{\nu!} \right|. \tag{38}$$

Formula de interpolare (29) este avantajoasă în special cînd x este aproape de 0. Această afirmaţie este justificată, de ex., de cercetările noastre anterioare asupra utilizării practice a formulelor de interpolare [2].

Este deci suficient să studiem aici cazul cînd $0 < x < 1$. Avem atunci

$$K_1(x) = 2 - \frac{(1-x)(2-x)\dots(n-x)}{n!}, \quad x \in (0, 1) \tag{39}$$

şi se vede că $K_1(x)$ este crescător în intervalul (0, 1). Rezultă că

$$1 = K_1(0) < K_1(x) < K_1(1) = 2, \quad x \in (0, 1), \tag{40}$$

deci

$$|c| < 2\varepsilon. \tag{41}$$

Un tablou al valorilor lui $K_1(x)$ poate fi utilizat în practică pentru obţinerea unei delimitări mai bune.

Dăm mai jos tabloul valorilor lui $K_1(x)$ pentru $x = v \cdot 10^{-1}$, $v = 1, 2, \dots 9$, şi $n = 2, 3, 4, 5, 6$.

Tabloul 3

x \ n	2	3	4	5	6
0,1	145	1735	1941625	21027925	2234412625
0,2	28	328	3616	387136	4075648
0,3	405	4645	5046625	53438375	5576636125
0,4	52	584	6256	655552	6785152
0,5	625	6975	7265625	75390625	7744140625
0,6	72	776	8096	832448	8492032
0,7	805	8505	8766625	89392975	9063046125
0,8	88	912	9296	940864	9487488
0,9	945	9615	9701625	97553325	9792032625

În acest tablou valorile sînt calculate exact şi nu figurează decît partea lor zecimală. Partea întreagă este evident 1 peste tot. Pentru o valoare a lui x care nu figurează în tablou, se delimitează superior $K_1(x)$ prin valoarea sa pentru valoarea imediat superioară a lui x care figurează în tablou. Este clar că pentru $0{,}9 < x < 1$ nu putem obţine pe această cale o delimitare mai bună decît (41). În practică este suficient să luăm nişte valori aproximative convenabile ale valorilor care figurează în tablou.

Formula (37) dă pentru c delimitarea

$$-\varepsilon K_1(x) \leqslant c \leqslant \varepsilon K_1(x) \tag{42}$$

inferioară şi superioară. Cînd natura calculului indică anumite condiţii suplimentare verificate de corecţiile c_ν, o analiză mai amănunţită permite ă precizăm aceste delimitări.

Să presupunem că sîntem în cazul în care $0 < x < 1$ şi, ceea ce se întîmplă des în practică, că numerele y_ν sînt pozitive. Aceasta va avea loc aproape totdeauna cînd $\Delta_h^\nu f(a)$, $\nu = 0, 1, \dots, n$ sînt numere pozitive. Pentru a calcula produsul

$$\frac{x - n + \nu}{n - \nu + 1} y \tag{43}$$

se calculează totdeauna întîi o valoare aproximativă, de exemplu prin lipsă, a valorii sale absolute, care în cazul nostru este

$$\left| \frac{x - n + \nu}{n - \nu + 1} \right| \bar{y}_\nu. \tag{44}$$

Acest caz are loc de exemplu dacă se calculează numerele (44) cu un număr oarecare de zecimale exacte.

Dacă presupunem că $c_1 = 0$, ceea ce practic este acceptabil, deoarece presupunem aici că valorile funcţiei pe noduri nu sînt afectate de erori, vedem că în condiţiile de mai sus corecţiile $c_2, c_3, \dots, c_n$ sînt $\leqslant 0$ (şi $\geqslant -\varepsilon$) iar $c_{n+1} \geqslant 0$ (şi $\leqslant \varepsilon$).

Vom avea atunci

$$-\varepsilon[K_1(x) - K_2(x)] \leqslant c \leqslant \varepsilon K_2(x), \tag{45}$$

unde

$$K_2(x) = \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{x(1-x)(2-x), \dots, (2\nu - 1 - x)}{(2\nu)!}. \tag{46}$$

Pentru delimitarea lui $K_2(x)$ observăm că pentru $n = 2$ avem $K_2(x) = 1$, iar pentru $n > 2$ putem scrie

$$K_2(x) = 1 + xK_3(x), \tag{47}$$

unde

$$K_3(x) = \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{(1-x)(2-x)\dots(2\nu - 1 - x)}{(2\nu)!} \tag{48}$$

Funcţia $K_3(x)$ este descrescătoare în intervalul (0, 1) şi vom putea utiliza un tablou de valori ale funcţiei $K_3(x)$ pentru delimitarea lui $K_2(x)$ cu ajutorul formulei (47).

Dacă formăm un tablou al valorilor lui $K_3(x)$, pentru valorile ξ_ν, $\nu = 0, 1, \dots, m-1$ $(m > 1)$, ale variabilei, unde

$$0 = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_{m-1} < 1, \quad \xi_m = 1, \tag{49}$$

şi dacă x nu figurează în acest tablou, formula (47) ne dă delimitarea

$$K_2(x) < 1 + xK_3(\xi_i), \tag{50}$$

presupunînd că $\xi_i < x < \xi_{i+1}$.

Trebuie să observăm că din (13) şi din faptul că $K_1(x) - K_2(x) > 0$ rezultă că

$$K_2(x) < 2, \tag{51}$$

aşa că pentru $\xi_i < x < \xi_{i+1}$, delimitarea (50) nu ne va da o delimitare mai bună decît delimitarea imediată (51), decît dacă $xK_3(\xi_i) < 1$. Deci pentru ca tabloul construit să dea o delimitare mai bună decît (51) pentru orice $0 < x < 1$, este necesar şi suficient ca să avem

$$\xi_{i+1}K_3(\xi_i) < 1, \qquad i = 0, 1, \ldots, m - 1. \tag{52}$$

În particular, prima condiţie (52) se scrie

$$\xi_1 \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{1}{2\nu} < 1, \tag{53}$$

care, din cauza divergenţei seriei armonice, nu este verificată pentru n destul de mare. Dacă deci numerele ξ_ν, $\nu = 0, 1, \ldots, m - 1$, sînt date, pentru n destul de mare, condiţiile (52) nu sînt toate verificate. Aceste condiţii sînt însă verificate dacă, de exemplu, ξ_ν sînt punctele care împart intervalul (0, 1) în 10 părţi egale şi dacă $n \leqslant 8$. Pentru aceste valori ale lui ξ_ν şi n avem următorul tablou de valori ale funcţiei $K_3(x)$.

Tabloul 4

x \ n	3,5	5,6	7,8
0,0	5	75	$91\overline{6}$
0,1	45	656625	788245125
0,2	4	568	670144
0,3	35	483875	561477875
0,4	3	404	461408
0,5	25	328125	369140625
0,6	2	256	$283925\overline{3}$
0,7	15	187375	205053375
0,8	1	122	131856
0,9	05	059625	$063702791\overline{6}$

În acest tablou valorile sînt calculate exact şi nu figurează decît partea lor zecimală. Partea întreagă este peste tot egală cu 0. Pentru a delimita pe $K_2(x)$ cu ajutorul formulei (47) pentru o valoare a lui x care nu figurează în tablou, se ia din tablou valoarea lui $K_3(x)$, pentru valoarea lui x imediat inferioară şi care figurează în tablou. Se verifică că condiţiile (52) sînt satisfăcute în aceste cazuri. În practică, se pot lua bineînţeles şi aici nişte valori aproximative prin adaos, convenabile, ale valorilor din tablou.

Pentru $n = 3$, 4, în multe cazuri se poate obţine destul de uşor direct, delimitarea lui $K_2(x)$ cu ajutorul formulei

$$K_2(x) = 1 + \frac{x(1-x)}{2} = \frac{(1+x)(2-x)}{2}. \tag{54}$$

Pentru delimitarea numărului $K_1(x) - K_2(x)$ observăm că el este egal cu x pentru $n = 2, 3$, iar pentru $n > 3$ se poate scrie

$$K_1(x) - K_2(x) = xK_4(x), \tag{55}$$

unde

$$K_4(x) = \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} \frac{(1-x)(2-x)\ldots(2\nu - x)}{(2\nu+1)!} \tag{56}$$

este o funcţie descrescătoare în intervalul (0, 1). Se pot face observaţii analoage cu cele de mai sus, relativ la utilizarea unui tablou al valorilor lui $K_4(x)$ pentru delimitarea lui $K_1(x) - K_2(x)$ prin formula (55). Din formula (40) şi din $K_2(x) > 1$ rezultă

$$K_1(x) - K_2(x) < 1, \qquad x \in (0, 1) \tag{57}$$

şi condiţiile pentru ca tabloul să dea o delimitare mai bună decît (57) pentru $\xi_i < x < \xi_{i+1}$ sînt ca $xK_4(\xi_i) < 1$. Aici ξ_ν sînt numerele (49). Dacă $i = m - 1$, această condiţie cu siguranţă nu este verificată pentru orice x, deoarece $K_4(\xi_{m-1}) > 1$. În cazul acesta nu poate fi deci vorba decît ca tabloul să dea o delimitare mai bună decît (57) pentru orice $0 < x \leqslant \xi_{m-1}$ şi orice $\xi_{m-1} \leqslant x \dfrac{1}{K_4(\xi_{m-1})}$. Condiţiile necesare şi suficiente pentru ca să fie astfel se scriu

$$\xi_{i+1}K_4(\xi_i) < 1, \qquad i = 0, 1, \ldots, m - 2. \tag{58}$$

În tabloul 5 dăm valorile lui $K_4(x)$ pentru valorile lui x care împart intervalul (0, 1) în 10 părţi egale şi pentru $4 \leqslant n \leqslant 9$.

Tabloul 5

x \ n	4,5	6,7	8,9
0,0	$\overline{3}$	$5\overline{3}$	$\overline{6761804}$
0,1	285	4461675	5571044625
0,2	24	38288	4675136
0,3	1983	$2974008\overline{3}$	$3605917458\overline{3}$
0,4	16	23488	2808064
0,5	125	1796875	2119140625
0,6	$09\overline{3}$	$13141\overline{3}$	15295573
0,7	065	0896675	$1030525553\overline{571428}$
0,8	04	05408	0614016
0,9	$018\overline{3}$	$0243008\overline{3}$	02727179583

În acest tablou figurează părțile zecimale exacte ale valorilor funcției $K_4(x)$. Partea întreagă este peste tot egală cu 1. Delimitarea lui $K_1(x) - K_2(x)$ cu ajutorul lui (55), utilizînd acest tablou, se face în același fel cum s-a procedat la delimitarea lui $K_2(x)$ cu ajutorul tabloului 2.

Condițiile (58) sînt îndeplinite în aceste cazuri. În felul arătat mai sus, tabloul 5 dă o delimitare mai bună decît (57) pentru

$$\left.\begin{cases} 0 < x < 0{,}981996\ldots \ (n = 4{,}5), \\ 0 < x < 0{,}976275\ldots \ (n = 6{,}7), \\ 0 < x < 0{,}973452\ldots \ (n = 8{,}9), \end{cases}\right\} \tag{59}$$

respectiv.

5. Rezultatele precedente se pot extinde la cazul interpolării prin polinoame de două variabile [4].

Să considerăm $(m + 1)(n + 1)$ puncte (x_i, y_j), $i = 1, 2, \ldots, m + 1$, $j = 1, 2, \ldots, n + 1$, în plan, formînd o rețea dreptunghiulară de noduri. Pentru fixarea notațiilor vom presupune că $x_1 < x_2 < \ldots < x_{m+1}$, $y_1 < y_2 < \ldots < y_{n+1}$. Permutarea $P(r_1, r_2, \ldots, r_{m+1}; s_1, s_2, \ldots, s_{n+1})$ a rețelei de noduri este definită de o permutare $r_1, r_2, \ldots, r_{m+1}$ a indicilor $1, 2, \ldots, m + 1$, de o permutare $s_1, s_2, \ldots, s_{n+1}$ a indicilor $1, 2, \ldots, n + 1$ și de renumerotarea coordonatelor nodurilor rețelei, astfel ca să avem $x'_i = x_{r_i}$, $i = 1, 2, \ldots, m + 1$, $y' = y_{s_j}$, $j = 1, 2, \ldots, n + 1$.

Să introducem notațiile

$$D^{i,j}_{\nu,\mu}[f] = \begin{bmatrix} x'_\nu, x'_{\nu+1}, \ldots, x'_{\nu+i} \\ y'_\mu, y'_{\mu+1}, \ldots, y'_{\mu+j} \end{bmatrix}; f \tag{60}$$

pentru diferențele divizate pe punctele $(x'_{\nu+\alpha}, y'_{\eta+\beta})$, $\alpha = 0, 1, \ldots, i$, $\beta = 0, 1, \ldots, j$, relative la funcția $f(x, y)$.

D.d. = (diferența divizată sau diferențele divizate).

$$D^{i,j}_{\nu,\mu}[f], \ \nu = 1, 2, \ldots, m + 1 - i, \ \mu = 1, 2, \ldots, n + 1 - j,$$
$$i = 0, 1, \ldots, m, \ j = 0, 1, \ldots, n \tag{61}$$

constituie tabloul d.d. corespunzător permutării a rețelei de noduri.

$$P(r_1, r_2, \ldots, r_{m+1}; \ s_1, s_2, \ldots, s_{n+1})$$

Sistemul de $(m + 1)(n + 1)$ d.d.

$$D^{i,j}_{1,1}[f], \ i = 0, 1, \ldots, m; \ j = 0, 1, \ldots, n, \tag{62}$$

formează un sistem înlănțuit de d.d.

Dacă fiecare termen al unui sistem înlănțuit de d.d. aparține unui aceluiași tablou de d.d. vom zice că sistemul înlănțuit considerat aparține acestui tablou de d.d. În particular, sistemul înlănțuit (62) aparține tabloului 2. Bineînțeles însă sistemul înlănțuit (62) aparține în același timp și altor tablouri de d.d.

În particular, tabloul 2, corespunzător permutării inițiale $P(1, 2, \ldots, m + 1; 2, \ldots, n + 1)$ a rețelei de noduri, se va numi

tabloul *normal* de d.d. și orice sistem înlănțuit de d.d. aparținînd acestui tablou se va numi un sistem înlănțuit normal de d.d.. În cazul permutării inițiale avem

$$r_i = i, \ s_j = j, \ D^{i,j}_{\nu,\mu}[f] = \begin{bmatrix} x_\nu, x_{\nu+1}, \ldots, x_{\nu+i} \\ y_\mu, y_{\mu+1}, \ldots, y_{\mu+j} \end{bmatrix}; f$$

pentru toate valorile posibile ale lui i, j, ν, μ.

*

Permutării $P(r_1, r_2, \ldots, r_{m+1}; s_1, s_2, \ldots, s_{n+1})$ a rețelei de noduri, îi corespunde polinomul de interpolare de două variabile, care sub forma sa generală este [2]

$$L(x, y) =$$
$$= \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n_i} (x - x_{r_1})(x - x_{r_2}) \ldots (x - x_{r_i})(y - y_{s_1})(y - y_{s_2}) \ldots (y - y_{s_j}) \ D^{i,j}_{1,1}[f], \tag{63}$$

unde $0 = n_i \leqslant n$, $i = 0, 1, \ldots, m$, iar pentru $i = 0$ respectiv $j = 0$ produsul $(x - x_{r_1})(x - x_{r_2}) \ldots (x - x_{r_i})$ respectiv $(y - y_{s_1})(y - y_{s_2}) \ldots (y - y_{s_j})$ este înlocuit cu 1.

Pe un punct de interpolare dat (x, y), determinarea unei valori aproximative pentru $f(x, y)$ cu ajutorul polinomului (63) necesită calculul valorii numerice a acestui polinom. Acest calcul se face prin executarea, exact sau aproximativ, a unei anumite succesiuni de operații elementare: adunări, scăderi, înmulțiri și împărțiri. Deoarece operațiile se execută în general aproximativ, va rezulta o eroare de calcul care depinde de precizia cu care s-au executat calculele precum și, bineînțeles, de ordinea efectuării acestor calcule, adică de programul pe baza căruia ele au fost executate. Nu vom lua în considerare erorile de care sînt eventual afectate datele problemei, deci coordonatele nodurilor și valorilor funcției $f(x, y)$ pe aceste noduri.

*

Pentru a calcula valoarea numerică a polinomului (63), poate fi utilă și o modificare a expresiei lui, punînd

$$X_0 = 1, \ X_i = \frac{x - x_{r_i}}{k_i}, \ Y_0 = 1, \ Y = \frac{y - y_{s_i}}{l_j},$$

unde $k_0 (= 1)$, $k_1, k_2, \ldots, k_m$, $l_0 (= 1)$, $l_1, l_2, \ldots, l_n$ sînt niște numere date, diferite de 0. Avem atunci

$$L(x, y) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n_i} X_0 X_1 \ldots X_i Y_0 Y_1 \ldots Y_j E_{i,j},$$

care se calculează, deobicei efectuînd suma

$$\sum_{i=0}^{m} X_0X_1 \ldots X_iA_i, \tag{64}$$

în prealabil fiind calculate sumele

$$A_i = \sum_{j=0}^{n_i} Y_0Y_1 \ldots Y_i E_{i,j},\ i = 0, 1, \ldots, m. \tag{65}$$

Fiecare dintre sumele (64), (65) este de forma

$$c_0C_0 + c_0c_1C_1 + \ldots + c_0c_1 \ldots C_\alpha C_\alpha. \tag{66}$$

Să presupunem că adunările şi scăderile nu comportă erori (ele se efectuează exact, sau, în orice caz, cu nişte erori care se neglijează). Atunci dacă calculăm suma (66) pe baza schemei

$$c_0(C_0 + c_1(C_1 + \ldots + c_{\alpha-1}(C_{\alpha-1} + c_\alpha C_\alpha) \ldots)) \tag{67}$$

aşa cum se procedează de obicei, eroarea provine numai din efectuarea celor $\alpha + 1$ înmulţiri succesive cu $c_\alpha, c_{\alpha-1}, \ldots, c_0$ respectiv. Este uşor de văzut că dacă aceste înmulţiri se efectuează cu o eroare absolută cel mult egală cu ε, rezultatul aproximativ obţinut va avea o eroare absolută mai mică decît

$$\varepsilon(1 + \sum_{i=0}^{\alpha-1} | c_0\, c_1 \ldots c_i |) \quad (= \varepsilon \text{ dacă } \alpha = 0).$$

În cazurile pe care le vom considera efectiv, înmulţirea prin c_0 nu comportă erori (vom avea totdeauna $c_0 = 1$). În acest caz eroarea absolută a rezultatului este mai mică decît

$$\varepsilon \sum_{i=0}^{\alpha-1} | c_0, c_1, \ldots, c_i | \quad (= 0, \text{ dacă } \alpha = 0).$$

Să aplicăm această schemă de calcul sumelor (64) (65). Suma (65) este de forma (66), unde punem

$$\alpha = n_i,\ c_\nu = Y_\nu,\ C_\nu = E_{i,\nu} \qquad \nu = 0, 1, \ldots, n_i.$$

Deci, dacă efectuăm calculele pe baza schemei (67), înmulţirile fiind executate cu o eroare absolută $\leqslant \varepsilon$, rezultatul obţinut $\widetilde{A}_i$ este cu o eroare absolută $\leqslant \varepsilon \sum_{j=0}^{n_i-1} |Y_0\, Y_1 \ldots Y_j|$ $(= 0$, dacă $n_i = 0)$. Rezultă că aproximarea sumei (64),

$$\sum_{i=0}^{m} X_0X_1 \ldots X_i\widetilde{A}_i, \tag{68}$$

are o eroare absolută $\leqslant \varepsilon \sum_{i=0}^{m} |X_0X_1 \ldots X_i| \left(\sum_{j=0}^{n_i-1} | Y_0Y_1 \ldots Y_j |\right)$.

Suma (68) este de asemenea de forma

$$\alpha = m,\ c_\nu = X_\nu,\ C_\nu = \widetilde{A}_\nu, \qquad \nu = 0, 1, \ldots, m.$$

Deci, dacă şi aici efectuăm calculele pe baza schemei (67), înmulţirile fiind executate cu o eroare absolută $\leqslant \varepsilon$, valoarea aproximativă obţinută pentru (68) va avea o eroare absolută cel mult egală cu $\varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} | X_0X_1 \ldots X_i |$ $(= 0$, dacă $m = 0)$.

În definitiv, deci, făcînd calculele pe baza schemei indicate, obţinem pentru $L(x, y)$ o valoare aproximativă cu o eroare absolută $\leqslant \varepsilon M$, unde

$$M = \sum_{i=0}^{m} |X_0X_1 \ldots X_i| \left(\sum_{j=0}^{n_i-1} |Y_0\ Y_1 \ldots Y_j|\right) + \sum_{i=0}^{m-1} |X_0X_1 \ldots X_i|. \tag{69}$$

*

Ne putem pune problema de a găsi, pentru punctul de interpolare dat (x, y), aceea permutare $P(r_1, r_2, \ldots, r_{m+1};\ s_1, s_2, \ldots, s_{n+1})$ a reţelei de noduri, pentru care numărul M dat de formula (69) este cel mai mic posibil. Dacă această condiţie este îndeplinită, vom considera că polinomul (63) este cel mai avantajos pentru calculele numerice (făcute pe baza schemei indicate).

Atît sumele

$$B_i = \sum_{j=0}^{n_i-1} |Y_0Y_1 \ldots Y_j|, \tag{70}$$

cît şi suma (69) sînt de forma

$$S_0 + s_{\nu_1} S_1 + s_{\nu_1}s_{\nu_2} S_2 + \ldots + s_{\nu_1}s_{\nu_2} \ldots s_{\nu_\alpha}S_\alpha, \tag{71}$$

unde $S_0, S_1, \ldots, S_\alpha$ sînt numere pozitive, iar $s_{\nu_1}, s_{\nu_2}, \ldots, s_{\nu_\alpha}$ este o permutare a unui şir $s_1, s_2, \ldots, s_\alpha$ de numere pozitive.

Şirul (70) este de forma (71), unde

$$\alpha = n_i - 1,\ s_j = | y - y_j |,\ \nu_i = s_j,\ S_j = \frac{1}{| l_0l_1 \ldots l_j |},\ j = 1, 2, \ldots, n_i - 1,\ S_0 = 1,$$

iar suma (69) este de forma (71), unde

$$\alpha = m,\ s_i = |x - x_i|,\ \nu_i = r_i,\ S_i = \frac{1}{| k_0k_1 \ldots k_i |}\left(1 + \sum_{j=0}^{n_i-1} | Y_0Y_1 \ldots Y_j |\right),$$

$$i = 0, 1, \ldots, m - 1,\ S_m = \frac{1}{| k_0k_1 \ldots k_m |}\left(\sum_{j=0}^{n_m-1} |Y_2Y_1 \ldots Y_j|\right),\ \nu_m = r_m.$$

Avem acum următoarea

LEMĂ. *Suma* (71) *își atinge cea mai mică valoare a sa dacă șirul* $s_{\nu_1}, s_{\nu_2}, \ldots, s_{\nu_\alpha}$ *este nedescrescător (cu alte cuvinte pentru o permutare nedescrescătoare a șirului* $s_1, s_2, \ldots, s_\alpha$).

Demonstrația este imediată. Se vede ușor că minimul este atins numai pentru permutările nedescrescătoare ale șirului $s_1, s_2, \ldots, s_\alpha$.

Din lema precedentă rezultă atunci următoarea

TEOREMĂ. *Dacă permutarea* $P(r_1, r_2, \ldots, r_{m+1}; \ s_1, s_2, \ldots, s_{n+1})$ *este astfel încît șirurile*

$$|x - x_{r_1}|, \ |x - x_{r_2}|, \ldots, |x - x_{r_m}|; \ |y - y_{s_1}|, \ |y - y_{s_2}|, \ldots, |y - y_{s_{n-1}}|$$

să fie nedescrescătoare, numărul M își atinge cea mai mică valoare a sa.

*

Rezultă din cele precedente că dacă șirurile

$$|x - x_{r_1}|, |x - x_{r_2}|, \ldots, |x - x_{r_{m+1}}|; |y - y_{s_1}|, |y - y_{s_2}|, \ldots, |y - y_{s_{n+1}}| \quad (72)$$

sînt nedescrescătoare, polinomul (63) este cel mai avantajos pentru calculul unei valori aproximative a lui $f(x, y)$. În acest caz, pe baza unui rezultat anterior [2], permutarea $r_1, r_2, \ldots, r_{m+1}$ trebuie să fie consecutivă permutării $1, 2, \ldots, m + 1$, iar permutarea $s_1, s_2, \ldots, s_{n+1}$ consecutivă permutării $1, 2, \ldots, n + 1$. Aceasta înseamnă că pentru orice t ($t = 1, 2, \ldots, m + 1$, respectiv $t = 1, 2, \ldots, n + 1$) șirurile $r_1, r_2, \ldots, r_t$ și $s_1, s_2, \ldots, s_t$, sînt formate din cîte t numere naturale consecutive (într-o anumită ordine).

Cînd șirurile (72) sînt nedescrescătoare și, în acest caz, polinomul (63) este avantajos prin calcule în sensul arătat mai sus, sistemul înlănțuit de d.d. corespunzător este un sistem înlănțuit normal. Este deci suficient să folosim tabloul normal de d.d. pentru a putea construi toate polinoamele (63) avantajoase, după diferitele poziții ale punctului de interpolare.

Putem, ca și în cazul unei singure variabile [2], să studiem diferite cazuri particulare. Dacă punctul de interpolare este în vecinătatea unuia din nodurile extreme (x_1, y_1), (x_1, y_{n+1}), (x_{m+1}, y_1), (x_{m+1}, x_{n+1}), găsim ca cele mai avantajoase polinoamele ordonate după diferențele ascendente și descendente în raport cu x, y, deci acelea pentru care sistemul înlănțuit (62) corespunde permutărilor $P(1, 2, \ldots, m + 1; \ 1, 2, \ldots, n + 1)$, $P(1, 2, \ldots, m + 1; n + 1, n, \ldots, 1)$, $P(m + 1, m, \ldots, 1; 1, 2, \ldots, n+1)$, $P(m + 1, m, \ldots, 1; n + 1, n, \ldots, 1)$. Dacă punctele x_i și y_j sînt respectiv echidistante, deci dacă

$$x_i = x_1 + (i - 1)h, \ i = 1, 2, \ldots, m + 1, \ y_j = y_1 + (j - 1)h',$$
$$j = 1, 2, \ldots, n + 1 \quad (h, h' > 0) \quad (73)$$

și dacă punctul de interpolare este în vecinătatea centrului rețelei de noduri, găsim ca cele mai avantajoase polinoame (63) acelea ordonate după diferențele centrale în raport cu x și y.

În înceiere, observăm că în locul tabloului normal de d.d., putem folosi tabloul format cu numerele $k_0 k_1 \ldots k_j \ l_0 l_1 \ldots l_j \ D^{i, j}_{\nu, \mu}[f]$, d.d. fiind referitoare la permutarea inițială a rețelei de noduri. Dacă luăm $k_i = ih$, $l_j = jh'$, pentru orice i, $j \geqslant 1$, numerele considerate se reduc la diferențele $\Delta^{i, j}_{h, h'} f(x, y)$ ale funcției $f(x, y)$. Tabloul normal de d.d. se poate atunci înlocui cu tabloul diferențelor a cărui formare este deosebit de simplă, deoarece nu necesită decît scăderi succesive.

În sfîrșit, considerațiile precedente se pot extinde la cazul a mai mult de două variabile independente.

BIBLIOGRAFIE

1. Popoviciu T, *Despre precizia calculului numeric în interpolarea prin polinoame*. Bul. științ. — Acad R P R., Secția de științe matematice și fizice, VIII, 954—961 (1955).
2. — *Considerații teoretice asupra utilizării practice a unor formule de interpolare*. Bul. științ. — Acad. R.P.R., Secția de științe matematice și fizice, III, 441—449 (1951).
3. — *Despre precizia calculului numeric în interpolarea prin polinomul lui Newton cu noduri echidistante*. Studii și cercetări științifice, Ser. I, VI, *3—4*, 27—35 (1955).
4. — *Asupra preciziei calculului numeric în interpolarea prin polinoame de două variabile*. Studii și cercetări de matematică (Cluj), XI, fascicula anexă, 159—165 (1960).
5. Steffensen J. F., *Interpolation*, New York, 1950.