PROBLEMA INTERPOLĂRII ŞI NOŢIUNEA DE FUNCŢIE CONVEXĂ

DE

E. MOLDOVAN

(Cluj)

Ideea de funcţie convexă obişnuită este legată de o clasă de ecuaţii funcţionale importante şi de interpolarea prin polinoame de gradul întîi. Studiul funcţiilor convexe de ordin superior este legat de interpolarea prin polinoame de un grad dat oarecare şi se bazează pe proprietăţile diferenţelor divizate.

Funcţia reală, de o variabilă reală, $f(x)$, definită pe o mulţime liniară E, se numeşte convexă, neconcavă, polinomială, neconvexă sau concavă de ordinul n, după cum $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f] >, \geqslant, =, \leqslant$ sau < 0, oricare ar fi sistemul de puncte distincte $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$ ale mulţimii E. Aici prin $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f]$ se înţelege diferenţa divizată de ordinul $n + 1$ a funcţiei $f(x)$ pe punctele $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$, n poate lua valorile $-1, 0, 1, 2, \ldots$, iar mulţimea E conţine cel puţin $n + 2$ puncte. Această definiţie este dată de T. Popoviciu [16]. Ea conduce la studiul comportării funcţiilor definite pe mulţimea E, faţă de mulţimea polinoamelor de grad cel mult egal cu n. Este firesc deci să ne propunem de a da o definiţie analoagă, înlocuind mulţimea polinoamelor de grad cel mult egal cu n, cu o altă mulţime de funcţii, care are proprietăţi asemănătoare.

DEFINIŢIA 1. *Mulţimea F_n de funcţii reale de o variabilă reală, definite pe o mulţime liniară E, spunem că este interpolatoare de ordinul n pe mulţimea E, dacă sînt îndeplinite următoarele condiţii:*

(A) *elementele mulţimii F_n sînt funcţii continue pe mulţimea E;*

(B) *oricare ar fi sistemul de n puncte distincte ale mulţimii E,*

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \tag{1}$$

şi ori care ar fi numerele

$$y_1, y_2, \ldots, y_n, \tag{2}$$

există în mulțimea F_n *o funcție și una singură* $g(x)$, *care satisface relațiile de egalitate*

$$g(x_i) = y_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Pentru simplificarea limbajului, o mulțime înterpolatoare de ordinul n pe E o vom numi și mulțime de tipul $I_n\langle E\rangle$. În particular, E poate să fie un interval închis $[a, b]$, sau un interval deschis (a, b), semideschis $(a, b]$ sau $[a, b)$. Tipul corespunzător se va nota prin $I_n[a, b]$, sau $I_n(a, b)$, $I_n(a, b]$ sau $I_n[a, b)$. Funcția $g(x)$ din definiția 1, o notăm prin simbolul $L(F_n; x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n|x)$ sau, pentru a pune în evidență faptul că numerele (2) sînt valorile unei funcții $f(x)$ definite pe punctele (1), $f(x_i) = y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, vom folosi pentru $g(x)$ notația

$$L(F_n; x_1, x_2, \ldots, x_n; f\,|\,x).$$

Mulțimile de funcții interpolatoare au mai fost studiate de I. S. Pinsker și E. P. Novodvorski [14], M. I. Morozov [13], L. Tornheim [22]. Acești autori s-au ocupat îndeosebi de problema celei mai bune aproximării a unei funcții $f(x)$, supusă la anumite condiții, prin funcții dintr-o mulțime înterpolatoare.

În lucrarea [2] (a se consulta de asemenea lucrările [4], [6] și [8]) s-au dat mai multe teoreme de medie, pe baza cărora s-au studiat unele proprietăți ale funcțiilor convexe față de o mulțime interpolatoare. Un astfel de studiu a impus o prealabilă examinare a proprietăților unei mulțimi oarecare de tipul $I_n[a, b]$. În acest scop s-au introdus definițiile 2 și 3 :

DEFINIȚIA 2. *Se dau punctele* $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \ldots, M_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1})$, $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ *fiind puncte distincte ale intervalului* $[a, b]$, *iar* F_n *o mulțime de tipul* $I_n[a, b]$, $n \geqslant 2$. *Mulțimea funcțiilor din* F_n *care pe punctele* x_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, *iau respectiv valorile* y_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, *o numim spic interpolator de ordinul* $n-1$ *al mulțimii* F_n, *relativ la punctele* $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ *și îl notăm prin*

$$S\left\{F_n; \begin{matrix} x_1, x_2, \ldots x_{n-1} \\ y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}\end{matrix}\right\}.$$

În lucrarea [6] (vezi de asemenea [8]) s-a arătat că dacă intervalul $[a, b]$ este finit, are loc următoarea proprietate : *pentru ca mulțimea* $\mathcal{M}$ *de funcții aparținînd spicului*

$$S\left\{F_n; \begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \\ y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}\end{matrix}\right\}$$

să fie compactă, este necesar și suficient să existe un punct $x_0 \in [a, b]$, $x_0 \neq x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ *și un număr* K, astfel ca pentru ori ce funcție $h(x) \in \mathcal{M}$ să avem $|h(x_0)| \leqslant K$.

Un rol important în teoria funcțiilor convexe o are noțiunea de funcție n-valentă față de o mulțime interpolatoare.

DEFINIȚIA 3. *O funcție* $f(x)$, *definită pe intervalul* $[a, b]$, *spunem că este* n-valentă *față de o mulțime* F_n *de tipul* $I_n[a, b]$, *dacă, oricare ar fi* $g(x) \in F_n$, *diferența* $f(x) - g(x)$ *nu se anulează de cît pe cel mult* n *puncte din* $[a, b]$.

Noțiunea de funcție n-valentă, în cazul cînd mulțimea F_n din definiție se înlocuiește cu mulțimea P_n a polinoamelor de grad cel mult egal cu $n-1$, a fost introdusă de T. Popoviciu [19]. În cazul $n = 1$, regăsim noțiunea clasică de univalență pentru funcții reale de o variabilă, reală.

În lucrarea [6] (vezi de asemenea [8]) se stabilesc teoreme de medie pentru funcții definite pe un număr finit de puncte și pentru funcții continue pe un interval finit și închis.

Dintre aceste teoreme le enunțăm pe cele mai frecvent utilizate în restul expunerii. Fie F_n o mulțime de tipul $I_n[a, b]$. Fie E_m mulțimea de puncte

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_m, \qquad m \geqslant n + 1,$$

situate în $[a, b]$, iar

$$y_1, y_2, \ldots, y_m$$

numere arbitrare. Fie $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}$, n puncte oarecare din E_m, astfel ca $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_n \leqslant m$.

TEOREMA 1. *Dacă* $x_{i_n} < x_0 \leqslant b$, *atunci*

$$\min_{j = i_1, i_2+1, \ldots, i_n-n+1} L(F_n; x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+n-1}; y_j, y_{j+1}, \ldots, y_{j+n-1}\,|\,x_0) \leqslant$$

$$\leqslant L(F_n; x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}; y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_n}|x_0) \leqslant$$

$$\max_{j=i_1, i_2+1, \ldots, i_n-n+1} L(F_n; x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+n-1}; y_j, y_{j+1}, \ldots, y_{j+n-1}\,|\,x_0).$$

Această teoremă, prin aplicarea ei la mulțimea P_n, are drept consecință o teoremă de medie dată de T. Popoviciu [16] pentru diferențe divizate : diferența divizată a unei funcții $f(x)$ pe $n+1$ puncte oarecare $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n+1}}$ din mulțimea E_m este o medie aritmetică generalizată a diferențelor divizate ale lui $f(x)$ pe cîte $n+1$ puncte consecutive

$$x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+n}, \qquad j = i_1, i_1 + 1, \ldots, i_{n+1} - n.$$

Dîndu-se punctele $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$ din $[a, b]$ și funcția $f(x)$ definită pe aceste puncte, se introduce notația

$$D[F_n; x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}, x_i; f] =$$

$$= f(x_i) - L(F_n; x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}; f|x_i).$$

TEOREMA 2. *Dacă $f(x)$ este continuă pe intervalul $[a, b]$ şi dacă pentru două sisteme distincte de puncte*

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1} \text{ şi } x_1' < x_2' < \ldots < x_n' < x_{n+1}'$$

din $[a, b]$ avem

$$D[F_n;\, x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1};\, f] = A, \quad D[F_n;\, x_1', x_2', \ldots, x_n', x_{n+1}';\, f] = B$$

iar $A \neq B$, atunci, oricare ar fi numărul C cuprins între A şi B, ($A < C < B$ sau $B < C < A$), există în cel mai mic interval care conţine punctele x_i şi x_i', $i = 1, 2, \ldots, x_{n+1}$, un sistem de $n + 1$ puncte $x_1'' < x_2'' < \ldots < x_n'' < x_{n+1}''$, astfel ca $D[F_n;\, x_1'', x_2'' \ldots, x_n'', x_{n+1}'';\, f] = C$.

TEOREMA 3. *Dacă $f(x)$ este o funcţie continuă pe intervalul $[a, b]$ şi pentru un sistem de $n + 1$ puncte $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1}$ din $[a, b]$ are loc relaţia $D[F_n;\, x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1};\, f] = 0$, atunci există un punct $x_0 \in (x_1, x_{n+1})$, astfel ca în orice vecinătate a sa să existe $n + 1$ puncte $x_1'' < x_2'' < \ldots < x_n'' < x_{n+1}''$ pentru care $D[F_n;\, x_1'', x_2'', \ldots, x_n'', x_{n+1}'';\, f] = 0$.*

Teoremele 2 şi 3 generalizează mai multe teoreme de medie cunoscute în analiză. Printre acestea se numără teoremele de medie pentru diferenţe divizate, teoremele de medie pentru alte funcţionale care generalizează diferenţele divizate etc.

Pe baza teoremei 2 se demonstrează

TEOREMA 4. *Dacă $f(x)$ este o funcţie continuă pe intervalul $[a, b]$ şi n-valentă faţă de mulţimea F_n de tipul $I_n[a, b]$, atunci*

$$D[F_n;\, x_1, x_2, \ldots, \ldots, x_n, x_{n+1};\, f]$$

păstrează acelaşi semn oricare ar fi punctele $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1}$ din $[a, b]$.

DEFINIŢIA 4. *Funcţia $f(x)$ definită pe o mulţime E de puncte ale intervalului $[a, b]$, se numeşte F_n-convexă, F_n-neconcavă, F_n-polinomială, F_n-neconvexă sau F_n-concavă, după cum*

$D[F_n;\, x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1};\, f] >, \geqslant, =, \leqslant$ sau < 0 pe orice sistem de $n + 1$ puncte $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1}$ ale mulţimii E. Mulţimea E se presupune că are cel puţin $n + 1$ puncte.

În lucrările [4], [6] şi [8] s-au studiat proprietăţi ale funcţiilor introduse prin definiţia 4 şi pe care pe scurt le numim funcţii de ordinul n faţă de mulţimea F_n. Dintre aceste proprietăţi amintim:

TEOREMA 5. *Pentru ca funcţia $f(x)$, definită pe mulţimea E formată din punctele $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$, $m \geqslant n + 1$, să fie F_n-convexă pe E, este necesar şi suficient ca ea să fie F_n-convexă pe fiecare sistem de cîte $n + 1$ puncte consecutive* din *E*.

Demonstraţia teoremei 5 se bazează pe teorema 1. Pentru fiecare clasă de funcţii de ordinul n faţă de F_n, avem cîte o teoremă analoagă cu teorema 5.

TEOREMA 6. *Dacă $f(x)$ este definită pe intervalul $[a, b]$ şi este de ordinul n faţă de mulţimea F_n, $n \geqslant 2$, pe acest interval, atunci ea este continuă pe intervalul deschis (a, b).*

TEOREMA 7. *Dacă $f(x)$ este o funcţie de ordinul n faţă de F_n pe intervalul $[a\ b]$ şi ea este F_n-polinomială pe $n + 1$ puncte $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1}$ din $[a, b]$, atunci ea este F_n-polinomială pe intervalul $[x_1, x_{n+1}]$.*

În lucrarea [6] (vezi de asemenea [8]) s-a elaborat un studiu al mulţimilor de F_n-polinomialitate ale unei funcţii de ordinul n faţă de F_n, precum şi un studiu al punctelor de discontinuitate ale unei funcţii de ordinul 1 faţă de o mulţime de tipul $I_1[a, b]$, care generalizează funcţiile monotone.

TEOREMA 8. *Dacă $f(x)$ este o funcţie continuă pe intervalul $[a, b]$, condiţia necesară şi suficientă ca ea să fie F_n-convexă sau F_n-concavă pe $[a, b]$ este ca ea să fie n-valentă faţă de mulţimea F_n pe intervalul $[a, b]$.*

Această teoremă explică legătura dintre definiţia noţiunii de convexitate dată de noi şi cea dată de L. T o r n h e i m [22], observîndu-se totodată că definiţia noastră e mai generală decît cea a lui L. Tornheim.

Tot în lucrarea [6] (vezi de asemenea [8]) s-au studiat funcţiile de ordinul n faţă de o mulţime F_n, care conţine un şir de submulţimi $F_1 \subset \subset F_2 \subset \ldots \subset F_{n+1}$, astfel ca F_k să fie de tipul $I_k[a, b]$ (în acest caz se zice că F_n conţine un lanţ interpolator de ordinul $(1, 2, \ldots, n - 1)$). Introducerea acestei noţiuni permite studierea proprietăţilor de descompunere ale mulţimii de definiţie a unei funcţii de ordinul n faţă de F_n. Acest studiu se bazează pe o clasificare a punctelor de ordinul k, $k = 1, 2, \ldots, n - 1$, faţă de submulţimea F_k a lui F_n, $n \geqslant 2$, ale unei funcţii $f(x)$ despre care se presupune că este F_n-convexă sau F_n-concavă.

Rezultatele prezentate mai sus ne conduc la interesante aplicaţii cu privire la ecuaţii diferenţiale. Funcţiile de ordinul n faţă de mulţimea G_n a integralelor unei ecuaţii diferenţiale de ordinul n, în ipoteza că această mulţime este interpolatoare de ordinul n pe un interval, prezintă anumite proprietăţi diferenţiale, studiate în lucrările [2], [4], [6], [7], [11].

Se consideră ecuaţia diferenţială

$$y^{(n)} - G(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = 0, \tag{3}$$

asupra căreia se fac următoarele ipoteze:

1°. funcţia $G(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ este continuă în raport cu ansamblul variabilelor sale $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ pe domeniul definit de înegalităţile

$$a < x < b, \quad -\infty < y < +\infty, \quad -\infty < y^{(i)} < +\infty,$$

$$i = 1, 2, \ldots, n + 1;$$

2°. pentru orice punct $x_0 \in [a, b]$, există o integrală şi una singură $y(x)$ a ecuaţiei (3), astfel ca

$$y(x_0) = y_0, \quad y^{(i)}(x_0) = y_0^{(i)}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n - 1,$$

numerele y_0, $y_0^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$ fiind date arbitrar.

DEFINIŢIA 5. *Ecuaţia (3) spunem că este de tipul $J_n[a, b]$, dacă sînt îndeplinite condiţiile 1°–2° şi mulţimea G_n a integralelor sale este de tipul $I_n[a, b]$.*

TEOREMA 9. *Fie $f(x)$ o funcție continuă pe intervalul $[a, b]$ și cu a n — a derivată continuă pe (a, b). Dacă ecuația* (3) *este de tipul $J_n[a, b]$ și are o integrală care pe $n+1$ puncte $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$ din $[a, b]$ coincide cu $f(x)$, atunci există un punct $x_0 \in (x_1, x_{n+1})$ astfel ca*

$$f^{(n)}(x_0) - G(x_0, f(x_0), \ldots, f^{(n-1)}(x_0)) = 0.$$

Pe baza teoremei 9 se găsesc inegalitățile diferențiale care caracterizează funcțiile de ordinul n față de mulțimea G_n a integralelor ecuației (3), presupusă de tipul $J_n[a, b]$. Are loc, spre exemplu, următoarea proprietate :

Dacă $f(x)$ este o funcție cu a n — a derivată continuă pe intervalul $[a, b]$ și ecuația (3) *este de tipul $J_n[a, b]$ atunci inegalitatea*

$$f^{(n)}(x) - G(x, f(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)) > 0, \quad x \in [a, b]$$

este suficientă pentru ca $f(x)$ să fie G_n-convexă pe $[a, b]$.

Aceste inegalități diferențiale își găsesc aplicații în studiul problemei n-locale pentru ecuații diferențiale.

În lucrările [6], [11] se mai dau teoreme care conțin condiții suficiente pentru ca o mulțime de funcții continue pe un interval dat să fie interpolatoare de ordinul n pe acest interval, $n \geqslant 1$.

Tot ca aplicații ale noțiunii de funcție convexă s-au pus în evidență în lucrarea [6] (vezi de asemenea [8]), cîteva proprietăți legate de cea mai bună aproximație în sensul lui P. L. Cebîșev. Aceste proprietăți se referă mai ales la funcții de ordinul n față de o mulțime de tipul $I_n[a, b]$. Se generalizează cu această ocazie o teoremă a lui T. Popoviciu dată în lucrarea [20] și se dau exemple de mulțimi interpolare F_n pentru care rămîne adevărată proprietatea că în cazul unei funcții $f(x)$, F_n-convexă, funcția din F_n care se abate cel mai puțin de la $f(x)$ în $[a, b]$ atinge abaterea maximă în extremitățile intervalului $[a, b]$.

Ca o aplicație a teoremei lui de la Vallée Poussin s-a obținut în lucrarea [6] următoarea generalizare a unei teoreme a lui Helly :

TEOREMA 11. *Dacă se dau segmentele $s_1, s_2, \ldots, s_m$, $m \geqslant n+1$, de lungimi egale, situate pe direcția paralelă cu axa OY, cu proiecțiile în intervalul $[a, b]$, și mulțimea F_n de tipul $I_n[a, b]$, are loc proprietatea : dacă pentru orice sistem de cîte $n+1$ segmente $s_{i_1}, s_{i_2}, \ldots, s_{i_{n+1}}$ există o funcție în F_n al cărei grafic le intersectează, atunci există o funcție în F_n, al cărei grafic intersectează toate cele m segmente date.*

Menționăm de asemenea următoarele două teoreme de medie obținute în lucrarea [6], privind funcționalele definite pe mulțimea funcților continue pe un interval finit $[a, b]$. Fie F_{n+1} o mulțime de tipul $I_{n+1}[a, b]$ iar F_n o submulțime a ei de tipul $I_n[a, b]$, $n \geqslant 1$.

TEOREMA 12. *Dacă $A[f]$ este o funcțională definită pe mulțimea funcțiilor continue pe intervalul $[a, b]$ și sînt îndeplinite condițiile :*

1°. $A[f] = 0$, dacă $f \in F_n$

2°. $A[f] \neq 0$, dacă f este F_n-convexă sau F_n-concavă pe $[a, b]$,

atunci, dacă $g(x)$ este o funcție continuă pe $[a, b]$ și $A[g] = 0$, există $n+1$ puncte $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$; în $[a, b]$, astfel ca

$$A[L(F_{n+1}, x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; g|x)] = 0.$$

Această teoremă conține ca un caz particular cunoscuta teoremă dată de T. Popoviciu [18] :

Dacă $A[f]$ este o funcțională liniară, definită pe mulțimea funcțiilor continue pe intervalul finit $[a, b]$, și :

1°. $A[1] = A[x] = \ldots = A[x^{n-1}] = 0$, $A[x^n] \neq 0$,

2°. $A[f] \neq 0$ *oricare ar fi funcția $f(x)$ convexă de ordinul $n-1$, atunci există pentru orice f din mulțimea de definiție, $n+1$ puncte $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, în $[a, b]$, astfel ca $A[f] = A[x^n][x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, f]$.*

Aceste teoreme au fost aplicate la cea mai bună aproximație a funcțiilor continue prin polinoame (a se vedea lucrările [6] și [8]).

O extindere a teoremei 13 la cazul neliniar, în ipoteza că $A(f)$ este o funcțională continuă pe mulțimea sa de definiție, a fost dată în lucrarea [6] (vezi de asemenea [8]).

Rezultatele de mai sus au condus la extinderea noțiunii de mulțime interpolatoare la spații abstracte. Aceste rezultate sînt conținute în [10], [12].

BIBLIOGRAFIE

1. Moldovan E., *Asupra unei generalizări a noțiunii de convexitate*. Studii și cercetări științifice, Cluj, **VI**, 65—73 (1955).
2. — *Asupra unor teoreme de medie*. Comunicările Acad. R.P.R., **VI**, *1*, 7—12 (1956).
3. — *Proprietăți ale mulțimilor de funcții imterpolatoare*. Bul. Univ. V. Babeș-Bolyai, Ser. Șt. naturii, I, 31—42 (1957).
4. — *Proprietăți ale funcțiilor convexe generalizate*. Studii și cercetări de matematică (Cluj) **VIII**, *1—2*, 21—35 (1957).
5. — *Funcții cu variație mărginită*. Studii și cercetări de matematică (Cluj), **VIII** *3—4*, 313—317 (1957).
6. — *Asupra noțiunii de funcție convexă față de o mulțime de funcții interpolatoare*. Studii și cercetări de matematică (Cluj), **IX**, 161—224 (1958).
7. — *Некоторые замечания относителнно одного признака неколеблемости для линейных дифференциальных уравнений*. Mathematica, **1**(**24**), 45—48 (1959).
8. — *Sur une généralisation des fonctions convexes*. Mathematica, **1** (**24**), 49—80 (1959)
9. *Asupra unei generalizări a teoremei de contracție a lui L. Ciakaloff*. Comunicare prezentată la sesiunea din 1957 a Univ. Babeș-Bolyai (Cluj).
10. — *Interpolarea în spații abstracte*. Studii și cercetări de matematică (Cluj), **X**, 329—335 (1959).
11. — *Aplications des fonctions convexes généralisées*. Mathematica, **1** (**24**), *2*, 281—286 (1959).
12. — *Sur l'intepolation généralisée*. Mathematica, **2**(**25**), 1, 143—147 (1960).
13. Морозов М. И., *О некоторых вопросах равномерного приближения непрерывных функции посредством функции интерполяционных классов*. Изв. Акад. Наук, Сер. мат., **16**, 75—100 (1952).
14. Новодворский Е. П., Пинскер И. Ш., *Процесс уравневания максимумов*. Успехи мат. наук, **VI**, *6* (*46*), 174—181 (1951).

15. Popoviciu T., *Cea mai bună aproximație a funcțiilor continue prin polinoame*. Cluj, 1937.
16. — *Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou des deux variables réelles*. Mathematica, **8**, 1—86 (1934).
17. — *Notes sur les généralisations des fonctions convexes d'ordre supérieur (II)*. Bullet. de la section scientifique de l'Academie Roumaine, **XXII**, 10, 373—377 (1940).
18. — *Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur (IX)*. Bull. Math. de la Soc. Roum Sci., **43**, 85—141 (1941).
19. — *Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur (I)*. Mathematica, **12**, 81—92 (1936).
20. — *Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur (VI)*. Revue de l'Union Interbalkanique, **2**, 31—40 (1939).
21. — *Les fonctions convexes*. Actualités Sci. et Ind., **992**, Paris, 1945.
22. Tornheim L., *On n-parameter families of functions and associated convexe functions*. Trans. Amer. Math., Soc., **69**, 457—469, 1950.