NOMOGRAME, ŢESUTURI ŞI CVASIGRUPURI

DE

F. RADÓ

(Cluj)

Cercetările din domeniul nomografiei, făcute la Institutul de calcul din Cluj, se încadrează în următoarele categorii de probleme :

1) stabilirea condiţiilor în care o ecuaţie poate fi reprezentată cu un anumit tip de nomogramă ;

2) forme canonice ale ecuaţiilor reprezentabile cu anumite nomograme ;

3) precizia calculului nomografic şi determinarea transformărilor nomogramei, care conduc la precizia maximă ;

4) noi tipuri de nomograme.

Relativ la prima categorie de probleme, menţionăm de la început că sînt cunoscute în multe cazuri condiţii de reprezentare nomografică, dar de cele mai multe ori aceste condiţii se referă la clasa funcţiilor, care admit derivate parţiale de un anumit ordin, iar condiţiile se exprimă sub formă de ecuaţii cu derivate parţiale. Am considerat că restricţia de derivabilitate nu este o condiţie firească impusă de natură nomogramei şi de aceea am căutat condiţii de reprezentare nomografică şi în clase mai vaste de funcţii, în particular în clasa funcţiilor continue şi strict monotone în raport cu fiecare variabilă. Condiţiile iau forma unor ecuaţii funcţionale sau a unor condiţii de închidere relative la ţesutul format din curbele nomogramei. În acest fel am ajuns pe de o parte la studiul unor ecuaţii funcţionale legate de nomografie, pe de altă parte la studii din teoria ţesuturilor. De teoria ţesuturilor este legată foarte strîns teoria cvasigrupurilor, căci ori ce ţesut generază un cvasigrup şi invers. Rezultatele din acest domeniu le vom expune pe următoarele paragrafe :

5) ţesuturile regulate şi cvasigrupurile care le sînt asociate ;

6) aplicaţiile teoriei ţesuturilor în nomografie ;

7) aplicaţii la rezolvări de ecuaţii funcţionale ;

8) generalizări pentru ţesuturi spaţiale.

§ 1. Stabilirea condițiilor în care o ecuație poate fi reprezentată cu un anumit tip de nomogramă

În acest paragraf vom presupune că funcțiile care intervin admit derivatele parțiale care vor figura în formule.

Ecuația $z = f(x, y)$, în anumite condiții de regularitate, poate fi reprezentată cu o nomogramă cu linii cotate. Fie $w = f(x, y, z)$ o ecuație cu patru variabile; dacă funcția f admite descompunerea (sau separarea de variabile)

$$f(x, y, z) = \psi[\varphi(x, y), z], \tag{1}$$

atunci ecuația $w = f(x, y, z)$ poate fi reprezentată cu o nomogramă compusă. Condiția necesară și suficientă pentru existența descompunerii (1) a fost dată de E. Goursat sub forma

$$f''_{xz} f'_y - f''_{yz} f'_x = 0.$$

În cazul (1) funcția f apare ca superpoziția funcțiilor de două variabile φ și ψ.

L. Bal și F. Radó au generalizat acest rezultat [7], [8]:

Condițiile necesare și suficiente pentru ca ecuația

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = 0 \tag{2}$$

să admită separarea variabilelor sub forma

$$x_{n+1} = \Phi[\varphi^1(x_1, \ldots, x_{p_1}), \varphi^2(x_{p_1} + 1, \ldots, x_{p_2}), \ldots$$
$$\ldots, \varphi^r(x_{p_{r-1}+1}, \ldots, x_{p_r}), x_{p_r+1}, \ldots, x_n]$$

sînt

$$\frac{1}{F_{x_1}} \frac{D(F, F_{x_1})}{D(x_i, x_{i+1})} = \ldots = \frac{1}{F_{x_{p_k}}} \frac{D(F, F_{x_{p_k}})}{D(x_i, x_{i+1})} = \frac{1}{F_{x_{p_{k+1}+1}}} \frac{D(F, F_{x_{p_{k+1}+1}})}{D(x_i, x_{i+1})} = \ldots$$

$$\ldots = \frac{1}{F_{x_{n+1}}} \frac{D(F, F_{x_{n+1}})}{D(x_i, x_{i+1})}, \quad \begin{array}{l}(k = 0, 1, \ldots, r - 1) \\ (i = p_k + 1, \ldots, p_{k+1} - 1), (p_0 = 0).\end{array}$$

L. Bal și I. Rusu au stabilit condițiile necesare și suficiente pentru ca ecuația (2) să se poată pune sub forma

$$x_{n+1} = \varphi_p(\varphi_{p-1}(\ldots \varphi_2(\varphi_1(x_1, \ldots, x_{r_1}), x_{r_1+1}, \ldots, x_{r_2}) \ldots$$
$$\ldots x_{r_{p+1}} + 1, \ldots, x_{r_p}).$$

Aceste condiții sînt [10]:

$$\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}} \frac{D(F, F_{x_\beta})}{D(x_\alpha, x_{\alpha+1})} = \frac{\partial F}{\partial x_\beta} \frac{D(F, F_{x_{n+1}})}{D(x_\alpha, x_{\alpha+1})} \quad \begin{array}{l}(i = 1, 2, \ldots, p - 1) \\ (\alpha = 1, 2, \ldots, r_i - 1) \\ (\beta = r_i + 1, \ldots, n).\end{array}$$

Nomograma romboidală reprezintă ecuațiile de forma

$$w = F[\varphi(x, y) + h(z), \psi(x, y)]. \tag{3}$$

În lucrarea [17] s-au studiat condițiile în care ecuația $w = f(x, y, z)$ poate fi pusă sub forma (3). Condițiile necesare și suficiente sînt

$$Q'_x = 0, \; Q'_y = 0, \quad Q'_z + Q^2 + pQ + q = 0,$$

unde s-a folosit notația

$$\varphi = \frac{f_x}{f_z}, \quad \psi = \frac{f_y}{f_z},$$

$$p(x, y;\; z) = \frac{\varphi_{z^2}\psi - \psi_{z^2}\varphi}{\varphi\psi_z - \psi\varphi_z}, \quad q(x, y)\; z) = \frac{\varphi_2\psi_{z^2} - \psi_z\varphi_{z^2}}{\varphi\psi_z - \psi\varphi_z}$$

$$Q = -\frac{q_x(x, y; z)}{p_x(x, y; z)}.$$

L. Bal a studiat cazurile cînd ecuația $f(x, y, z, w) = 0$ poate fi reprezentată cu anumite nomograme tangențiale, ale căror ecuații canonice sînt [6]

$$w = F[x, \varphi(y, z)x + \psi(y, z)]$$
$$w = g(x)[\varphi(y, z) + h(x)\psi(y, z)]$$
$$w = F[\varphi(y, z) + g(x)\psi(y, z)]$$
$$\varphi(x, y)\psi(z, w) + g(x, y)h(z, w) + 1 = 0.$$

De exemplu, pentru cazul al treilea condițiile necesare și suficiente sînt

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \; \frac{\partial \Phi}{\partial w} = \psi,$$

unde

$$\Phi = \frac{D\left(w, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big/ \dfrac{\partial w}{\partial x}\right)}{D(y, z)} : \frac{D\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}, w\right)}{D(y, z)},$$

$$\psi = \frac{D\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big/ \dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial w}{\partial x}\right)}{D(y, z)} : \left[\frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{D\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}, w\right)}{D(y, z)}\right].$$

§ 2. Forme canonice ale ecuațiilor reprezentabile cu anumite nomograme

Este cunoscut că ecuația de ordinul al treilea nomografic

$$A f_1 f_2 f_3 + B_1 f_2 f_3 + B_2 f_3 f_1 + B_3 f_1 f_2 + C_1 f_1 + C_2 f_2 + C_3 f_3 = 0,$$

unde

$$f_1 = f_1(x), \quad f_2 = f_2(y), \quad f_3 = f_3(z),$$

se poate pune prin transformările

$$\varphi_i = \frac{\alpha_i f_i + \beta_i}{\gamma_i f_i + \delta_i} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

sub una din următoarele forme canonice :

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0, \quad \varphi_1\varphi_2\varphi_3 = 1, \quad \varphi_1\varphi_2\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3.$$

În volumul „Lecție de nomografie„ L. Bal și F. Radó [9] demonstrează această teoremă pe o cale nouă, mai simplă.

Este incontestabilă utilitatea unui tablou cît mai complet despre formele canonice ale ecuațiilor reprezentabile nomografic. Mărginindu-se la cazul nomogramelor cu transparent orientat, L. Bal a dat un asemenea tablou complet pentru ecuațiile cu patru și cinci variabile. Tabloul pentru ecuații cu 4 variabile este [2], [4]:

$$F(f_{12} + f_{34}, \quad g_{12} + g_{34}) = 0$$

$$F(f_{12} + f_3, \quad g_{12} + g_3, \ x_4) = 0$$

$$F_{12} = G_{34}$$

$$F(f_1 + f_2 + f_3, \quad g_1 + g_2 + g_3, \ x_4) = 0$$

$$F(f_1 + f_2 + f_{34}, \quad g_1 + g_2 + g_{34}) = 0$$

(indicii arată de care dintre variabilele x_1, x_2, x_3, x_4 depind funcțiile respective).

În studiul nomogramelor cu puncte aliniate intervine foarte des ecuația canonică

$$H(z) = F(x) + G(y). \tag{4}$$

Considerîndu-se x, y, z coordonatele unui punct în spațiu, această ecuație reprezintă o clasă de suprafețe, care generalizează suprafețele de translație (de ecuații $z = F(x) + G(y)$).

În două lucrări [3], [5], L. Bal studiază cîteva tipuri de rețele situate pe suprafețele din această clasă și determină suprafețele riglate și cele desfășurabile din această clasă.

§ 3. Precizia calculului normografic și determinarea transformărilor nomogramei care conduce la precizia maximă

În [9] se pune un accent deosebit pe aceste chestiuni, printr-o sistematizare, și expunere nouă și prin unele rezultate originale, dintre care redăm următorul :

La construirea efectivă a unei scări rectilinii se calculează abscisele anumitor puncte în baza ecuației scării, iar celelalte puncte marcate se obțin prin interpolare grafică proiectivă. Acest procedeu foarte simplu constă în căutarea unui centru de proiecție, de unde o scară regulată se proiectează pe scara de construit, în așa fel ca trei puncte să se proiecteze

în trei puncte construite în prealabil, iar imaginile celorlalte puncte ale scării regulate vor furniza gradațiile aproximative. Se dă o evaluare a erorii comise în această construcție. O formă simplificată a evaluării este

$$|R| \leqslant \frac{h^3}{9\sqrt{3}} \left| f'''(z_0) - \frac{3[f''(z_0)]^2}{2f'(z_0)} \right|,$$

unde $x = f(z)$ este ecuația scării și $z_0 - h$, z_0, $z_0 + h$ cotele celor trei puncte. Cunoscînd eroarea admisibilă (de obicei 0,1 mm) se poate calcula h, deci numărul necesar de puncte care trebuie construit în baza ecuației scării.

Fie $x = f(z)$ ecuația scăririi rectilinii a rezultatului la o nomogramă cu puncte aliniate. Să presupunem că intervalului de variație (z_0, z_1) al variabilei z îi corespunde intervalul $(0, 1)$ al axei x. Notînd cu h eroarea geometrică a punctului de intersecție a scării z și a dreptei rezolvente (care la o nomogramă corect construită este cuprinsă între 0,5 mm și 1 mm), avem pentru eroarea absolută, respectiv eroare relativă a rezultatului,

$$|\Delta z| \approx \frac{h}{|f'(z)|} \quad \text{și} \quad \left|\frac{\Delta z}{z}\right| \approx \frac{h}{|zf'(z)|}.$$

Maximul acestor expresii, cînd $z_0 \leqslant z \leqslant z_1$, măsoară eroarea absolută, respectiv cea relativă a nomogramei. Ținînd seamă că planul unei nomograme cu puncte aliniate poate fi supus unei coliniații, se pune problema de a determina această coliniație în așa fel ca eroarea absolută (sau relativă) să devină minimă, fără a depăși dimensiunile admise pentru desen. Ne interesează efectul coliniației asupra scării z, deci trebuie să considerăm proiectivitățile axei x de forma

$$x' = \frac{(\mu + 1)x}{\mu x + 1}, \qquad \mu > -1,$$

care păstrează capetele segmentului $[0, 1]$ (pentru a nu mări dimensiunile). Ecuația scării transformate este

$$x' = \frac{(\mu + 1)f(x)}{\mu f(z) + 1} = f_\mu(z).$$

Așadar, problema se formulează astfel : să se determine μ în așa fel ca $\min\limits_{z_0 \leqq z \leqq z_1} |f'_\mu(z)|$, respectiv $\min\limits_{z_0 \leqq z \leqq z_1} |zf'_\mu(z)|$, să fie cel mai mare posibil.

M. V. Pentkovski a rezolvat această problemă pe cale analitică în anumite cazuri particulare și pe cele grafică în general.

F. Radó a ajuns la următorul rezultat [11] : se notează cu $z_2 = z_2(\mu)$ valoarea lui z pentru care $f_\mu(z) = \frac{1}{2}$ și

$$m_s(\mu) = \min_{z_0 \leqq z \leqq z_2} |f'_\mu(z)|, \qquad m_d(\mu) = \min_{z_2 \leqq z \leqq z_1} |f'_\mu(z)|.$$

Problema de minim pusă pentru eroarea absolută, admite o singură soluție, iar μ corespunzător satisface $m_s(\mu) = m_d(\mu)$. Problema pentru eroarea relativă are o soluţie analoagă. Se regăsesc rezultatele lui M. V. Pentkovski pentru cazurile amintite. Se dă de asemenea o metodă practică pentru aproximarea valorii lui μ, care corespunde soluţiei problemei.

§ 4. Noi tipuri de nomograme

Fie π planul fix şi π' planul mobil la o nomogramă cu transparent. Contactul $P \vdash C'$ (punctul P din π se află pe curba C din π') şi contactul $C \vdash P'$ se zic contacte de tip a, iar contactul $C \vdash C'$ (curbele C şi C' din cele două plante sînt tangente) este de tip b. Aceste două feluri de contacte sînt utilizate la nomogramele cu transparent. Ele pot fi, după caz, contacte fixe sau pot depinde de 1,2 sau 3 variabile (luînd punctele şi curbele din familii de elemente geometrice gradate). Astfel, prin fiecare din cele 3 contacte care fixează poziţia lui π_1 faţă de π şi prin contactul de cetire se introduc variabile.

Să considerăm sistemele de axe rectangulare xOy şi $x'O'y'$ în planele π şi π' şi fie α unghiul orientat format de Ox cu $O'x'$ şi (a, b) coordonatele lui O în sistemul $x'O'y'$. Unui contact fix îi corespunde o relaţie de forma

$$b = \varphi(a, \alpha).$$

F. R a d ó a demonstrat [12] că această relaţie poate fi definită printr-un contact de tip a atunci şi numai atunci cînd cel puţin una din următoarele două matrici are rangul mai mic decît 3:

$$\begin{pmatrix} b_\alpha & -1 & b_a \\ b_{\alpha\alpha} & 0 & b_{a^2} \\ b_2 & b_a & b_{a\alpha}+1 \\ b_{a^2\alpha} & 0 & b_{a^3} \\ b_{a\alpha^2} & b_{a^2} & b_{a^2\alpha} \\ b_{\alpha^3} & 2b_{a\alpha}+1 & b_{a\alpha^2}-b_a \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad \begin{pmatrix} 1 & b_a & a+b_\alpha \\ 0 & b_{a^2} & 1+b_{a\alpha}+b_a^2 \\ 0 & b_{a\alpha} & b_{\alpha^2}+b_ab_\alpha \\ 0 & b_{a^3} & b_{a^2\alpha}+3b_ab_{a^2} \\ 0 & b_{a^2\alpha} & b_{a\alpha^2}+2b_ab_{a\alpha}+b_\alpha b_{a^2} \\ 0 & b_{a\alpha^2} & b_{\alpha^3}+b_ab_{\alpha^2}+2b_\alpha b_{a\alpha} \end{pmatrix}$$

În aceeaşi lucrare se introduce un contact nou, numit contact de tip c, în felul următor: fie $\vec{V}$ un vector legat în planul π cu punctul de aplicaţie P şi C' o familie de curbe în planul π'. Vectorul $\vec{V}$ trebuie să fie tangent la curba din familie, care trece prin P. Acest contact este general în sensul că o relaţie oarecare $b = \varphi(a, \alpha)$ poate fireprezentată cu acest contact. Se dă un exemplu, care poate fi reprezentat nomografic numai prin utilizarea acestui contact.

Dacă în contactul de tip c intră şi o variabilă z, atunci desigur nu orice relaţie $b = \varphi(\alpha; z)$ poate fi reprezentată cu el. Recent, S. G r o z e şi V. G r o z e au studiat acest caz, stabilind condiţia necesară şi suficientă pentru ca relaţia $b = \varphi(a, \alpha; z)$ să se poată reprezenta printr-un contact de tip c cu o variabilă.

§ 5. Ţesuturi regulate şi evasigrupurile care le sînt asociate

Un ţesut este format din trei familii de curbe, astfel ca prin fiecare punct al unui domeniu plan să treacă cîte o singură curbă din fiecare familie şi două curbe din familii diferite să aibă un singur punct comun (sau cel mult un punct, dacă se consideră ţesutul într-un sens mai larg). Un ţesut este regulat, dacă e omeomorf cu trei fascicule de drepte paralele. Ţinînd seama că pentru două din familiile de curbe ale ţesutului pot fi alese drepte paralele la două axe de coordonate rectangulare, familia a treia poate fi considerată ca liniile de nivel ale unei funcţii $f(x, y)$. Ţesutul este regulat dacă

$$H[f(x, y)] = F(x) + G(x), \tag{5}$$

unde F, G, H sînt funcţii continue şi monotone. Se cunosc mai multe condiţii de închidere, fiecare din ele fiind necesară şi suficientă pentru ca ţesut să fie regulat. Astfel avem condiţia lui Thomsen

$$f(x_1, y_2) = f(x_2, y_1) \;\&\; f(x_1, y_3) = f(x_3, y_1) \Rightarrow f(x_2, y_3) = f(x_3, y_2), \tag{T}$$

condiţia lui Reidemeister

$$f(x_1, y_1) = f(x_3, y_3) \;\&\; f(x_1, y_2) = f(x_3, y_4) \;\&\; f(x_2, y_1) = \\ = f(x_4, y_3) \Rightarrow f(x_2, y_2) = f(x_4, y_4) \tag{R}$$

şi condiţia exagonului

$$f(x_1, y_2) = f(x_2, y_1) \;\&\; f(x_1, y_3) = f(x_2, y_2) = f(x_3, y_1) \Rightarrow f(x_2, y_3) = f(x_3, y_2) \tag{E}$$

În lucrarea [13], F. R a d ó a dat o demonstraţie nouă pentru suficienţa condiţiei (E).

Se numeşte ţesut abstract o mulţime de elemente, numite puncte şi trei sisteme de submulţimi, numite drepte de categoriile 1, 2 şi 3, care satisfac axiomele: 1) orice punct aparţine exact unei drepte de fiecare categorie; 2) două drepte de categorii diferite au în comun exact un punct.

Se numeşte cvasigrup o mulţime Q împreună cu o operaţie binară $z = xoy$, definită pe Q, dacă ecuaţiile $xob = c$ şi $aoy = c$ se rezolvă unic în Q $(a, b, c, \in Q)$. Cvasigrupul $(Q,.)$ se numeşte loop, dacă există $e \in Q$, astfel ca $x \cdot e = e \cdot x = x$; în acest caz e se numeşte element neutru. Cvasigrupurile $(Q,.)$ şi $(R, \circ)$ se zic izotope, dacă există transformările biunivoce α, β, γ ale mulţimii Q pe R, astfel ca $(x\alpha) \circ (y\beta) = (x \cdot y)\gamma$ pentru $x, y \in Q$. Dacă $\alpha = \beta = \gamma$, izotopia se reduce la izomorfism. Dacă $R = Q$ şi γ este transformarea identică, $(Q,.)$ şi $(Q, \circ)$ se numesc izotopi principali. Un izotop principal, care este în acelaşi timp un loop, poartă numele de L-P-izotop.

Fie $(Q,.)$ un cvasigrup și $a \in Q$, $b \in Q$. Cvasigrupul $(Q, \circ)$ definit prin

$$(x \cdot b) \circ (a \cdot y) = x \cdot y, \tag{6}$$

este un L-P-izotop al cvasigrupului $(Q,.)$ și orice L-P-izotop al acestuia poate fi obținut pe această cale. Dacă scriem relația $z = x \cdot y$ și sub formele

$$x = z/y \quad \text{și} \quad y = x\backslash z,$$

atunci $(Q, /)$ și $(Q,\backslash)$ sînt de asemenea cvasigrupuri. Relația (6) se scrie

$$x \circ y = (x/b) \cdot (a \backslash y). \tag{6'}$$

Există o legătură foarte strînsă între țesuturile abstracte și cvasigrupuri. G. Bol, W. Blaschke, G. Thomsen, R. H. Bruck și G. Pickert au asociat fiecărui țesut abstract cîte un loop, definind cîte o „adunare de segmente" în țesut. Într-o lucrare comună, J. Aczél, G. Pickert și F. Radó [1] au pornit de la un alt punct de vedere (care se găsește mai aproape de originea nomografică a acestor generalizări) : Unui cvasigrup i se atașează țesutul abstract format din perechile (x, y), unde $x \in Q$, $y \in Q$; perechile (x, y) sînt punctele țesutului ; o dreaptă de categoria 1 este o mulțime de puncte de forma (a, y), unde a este un element fix din Q ; o dreaptă de categoria 2 este o mulțime de forma (x, b), iar o dreaptă de categoria 3 este mulțimea (x, y) care satisface $x \cdot y = c$ (c dat în Q). La cvasigrupuri izotope corespund țesuturi izomorfe. Invers, unui țesut dat i se poate găsi un cvasigrup, astfel ca corespondentul său să fie izomorf cu țesutul dat. Pentru aceasta se aleg corespondențele biunivoce φ ale dreptelor de categoria i $(i = 1, 2, 3)$ pe o mulțime Q (se observă că mulțimile dreptelor de diferite categorii au puteri egale). Fie $a \in Q$, $b \in Q$; prin unicul punct comun al dreptelor $a\varphi_1^{-1}$ și $b\varphi_2^{-1}$ trece o singură dreaptă D_3 de categoria a 3-a. Punem $a \cdot b = D_3\varphi_3$ și, în acest fel, mulțimea Q a devenit un cvasigrup cu proprietatea căutată. Așadar, există o corespondență biunivocă între clasele izomorfe de țesuturi abstracte și clasele izotope de cvasigrupuri.

Un cvasigrup se numește regulat, dacă este izotop cu un grup, și tare regulat, dacă este izotop cu un grup abelian. În aceste cazuri țesuturile asociate se zic de asemenea regulate, respectiv tare regulate. Condiția necesară și suficientă pentru ca un cvasigrup să fie regulat este ca toți L-P-izotopii săi să fie asociativi, iar pentruca să fie tare regulat, ca toți L-P-izotopii săi să fie comutativi (din comutativitatea L-P-izotopilor rezultă asociativitatea lor).

Condițiile de închidere T, R și E sînt de natură algebrică ; schimbînd notația $f(x, y) = x \cdot y$, ele pot fi aplicate la un cvasigrup. Condiția R este necesară și suficientă pentruca un cvasigrup să fie regulat, iar condiția T pentru ca să fie tare regulată. În ceea ce privește condiția E, ea este echivalentă cu asciativitatea L-P-izotopilor pentru puteri.

Toți L-P-izotopii unui cvasigrup regulat sînt izomorfi între ei, dar reciproca nu este adevărată : Din izomorfismul tuturor L-P-izotopilor nu rezultă regularitatea cvasigrupului. Se pune problema de a întări

condiția de izomorfism a L-P-izotopilor în așa fel, ca să devină necesară și suficientă pentru regularitate. F. Radó a demonstrat că pentru regularitatea unui cvasigrup este necesar și suficient ca L-P-izotopii lui, care au ca element neutru un element dat, să coincidă [16]. Din această teoremă rezultă o demonstrație simplă pentru echivalența condiției R cu regularitatea unui țesut abstract.

§ 6. Aplicațiile teoriei țesuturilor în nomografie

În cazul particular cînd Q este un interval al axei reale și cînd se cere ca operația binară x, y să fie continuă, cele trei condiții de închidere T, R și E devin echivalente, deoarece ori ce grup topologic, definit pe un interval real, este comutativ ; chiar mai mult decît atît, orice loop topologic asociativ pentru puteri devine un grup comutativ, după cum a arătat G. Pickert. În acest fel se obține rezultatul clasic că fiecare din condițiile T, R, E este necesară și suficientă pentru ca un țesut în planul euclidian să fie regulat.

Fie acum $z = f(x, y)$ o funcție continuă și strict monotonă în raport cu fiecare variabilă. Ea poate fi reprezentată cu o nomogramă formată din trei fascicule de drepte (formînd un țesut regulat) dacă și numai dacă $f(x, y)$ este un izotop al sumei, adică dacă ecuația are forma (4). Tot atunci poate fi reprezentată cu o nomogramă cu puncte aliniate, avînd trei scări rectilinii (imaginea duală a nomogramei cu trei fascicule de drepte). Aceste nomograme fiind cele mai frecvent utilizate, ne interesează condițiile în care $f(x, y)$ este un izotop al sumei. Pentru cazul în care $f(x, y)$ admite derivate parțiale pînă la al treilea ordin, P. de Saint Robert a dat condiția

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln \frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)} = 0,$$

necesară și suficientă pentruca $f(x, y)$ să fie un izotop al sumei. Pentru cazul mai general, $f(x, y)$ continuu și monoton. avem oricare din condițiile T, R sau E, sau comutativitatea tuturor L-P-izotopilor care se scrie

$$f[\bar{f}(u, x), \tilde{f}(y, v)] = f[\bar{f}(u, y), \tilde{f}(x, v)], \tag{7}$$

unde

$$z = f(x, y) \Leftrightarrow x = \bar{f}(y, z) = z/y \Leftrightarrow y = \tilde{f}(z, x) = x\backslash z.$$

În lucrarea [13] se arată că această condiție (7) este utilă pentru diferite expresii concrete ale funcției $f(x, y)$. În această lucrare s-a ajuns la condiția (7) generalizînd ecuația funcțională a bisimetriei

$$f[f(u, x), f(y, x)] = f[f(u, y), f(x, v)], \tag{8}$$

considerată de J. Aczél, care caracterizează o subclasă a funcțiilor reprezentabile prin nomograme cu puncte aliniate avînd scări rectilinii, anume funcțiile cvasiliniare

$$f(x, y) = F^{-1}[aF(x) + bF(y) + c]$$

(a, b, c numere reale).

Dacă s-a constatat că $z = f(x, y)$ este un izotop al sumei, trebuie să determinăm funcţiile $F(x)$, $G(x)$, $H(x)$ în aşa fel ca

$$H[f(x, y)] = F(x) + G(x), \tag{9}$$

pentru a avea ecuaţiile scărilor nomogramei. În ecuaţia (9) $f(x, y)$ este acum o funcţie cunoscută, iar F, G, H trei funcţii necunoscute de o variabilă, care se caută din clasa funcţiilor continue şi strict monotone. Condiţia necesară şi suficientă pentruca ecuaţia (9) să aibă asemenea soluţii este ca funcţia continuă şi strict monotonă $f(x, y)$ să satisfacă condiţia T sau R sau E. În [13] se dă o metodă de rezolvare a ecuaţiei funcţionale (9), reducînd-o la ecuaţia funcţională a lui Cauchy şi se arată cum pot fi obţinute dintr-o soluţie particulară toate soluţiile.

Să presupunem că funcţia $\xi = f(\xi, \eta)$ este reprezentabilă cu o nomogramă cu puncte aliniate. Se fixează pe scările ξ şi η punctele de cotă v, respectiv u, iar pe scara ξ punctele de cote x şi y. Intersectăm scara ξ cu dreapta ux, scara η cu vy; dreapta care uneşte aceste două puncte de intersecţie taie scara ξ în punctul de cotă

$$z = f[\overline{f}(u, x), \widetilde{f}(y, v)]. \tag{10}$$

Ţinînd seamă de relaţia (8), se găseşte următoarea proprietate a locului geometric L, format din suporturile celor trei scări : Să presupunem că laturile opuse ale exagonului *advbcu* se taie în punctele x, y, z; dacă din aceste nouă puncte opt se află pe L, atunci şi al nouălea se găseşte pe L. Se ştie că cubicele şi numai ele au această proprietate.

Rezultă că orice nomogramă cu puncte aliniate, avînd scările pe aceiaşi cubică (proprie sau degenerată) reprezintă un izotop al sumei şi nu există alte nomograme cu puncte aliniate pentru izotopii sumei [13]. Astfel s-a generalizat un rezultat cunoscut pentru cazul derivabil.

Asociativităţii izotopului (10) al funcţiei $f(x, y)$ îi corespunde următoarea proprietate pentru locul L : Dacă $abcd$ şi $a'b'c'd'$ sînt două patrulatere înscrise în L, astfel ca intersecţiile perechilor de drepte $(ab, a'b')$, $(cd, c'd')$ şi $(ad, b'c')$ se află pe L, atunci şi dreptele bc şi $a'd'$ se intersectează tot pe L. Rezultă că această proprietate este caracteristică pentru cubice [13].

§ 7. Aplicaţii la rezolvări de ecuaţii funcţionale

Ecuaţia funcţională a asociativităţii, a bisimetriei (8), diferite modificări şi generalizări ale lor pot fi rezolvate cu o metodă unitară [13]. Se arată că ecuaţia funcţională respectivă, cu funcţia necunoscută de două variabile $f(x, y)$, atrage după sine faptul că $f(x, y)$ verifică condiţia T sau R sau E, deci că $f(x, y)$ este de forma

$$f(x, y) = H^{-1}[F(x) + G(y)]$$

şi apoi prin înlocuirea acestei expresii în ecuaţia funcţională, se determină F, G şi H (ceea ce deobicei revine la ecuaţia clasică a lui Cauchy).

În acest fel se regăsesc, printr-o metodă mai simplă, soluţiile unor ecuaţii funcţionale rezolvate de alţi autori, în cadrul funcţiilor continue şi strict monotone.

Metoda poate fi extinsă pentru ecuaţii funcţionale, care conţin mai multe funcţii necunoscute de două variabile, dînd soluţiile lor iarăşi în aceeaşi clasă de funcţii. În [13] s-a rezolvat pe această cale ecuaţia funcţională

$$g[\varphi(x, y), z] = h[x, \psi(y, z)], \tag{11}$$

care generalizează ecuaţia asociabilităţii şi care conţine drept cazuri particulare ecuaţia lui Grassmann şi ecuaţia lui Tarski. Soluţia ei este

$$\begin{cases} \varphi(x, y) = H_1^{-1}[F_1(x) + G_1(y)], \\ \psi(x, y) = H_2^{-1}[G_1(x) + G_2(y)], \\ g(x, y) = H_3^{-1}[H_1(x) + G_2(y)], \\ h(x, y) = H_3^{-1}[F_1(x) + H_2(y)], \end{cases}$$

unde $F_1, G_1, G_2, H_1, H_2, H_3$ sînt funcţii continue şi strict monotone arbitrare.

Ecuaţia funcţională

$$f[g(u, x), h(y, v)] = \varphi[\psi(u, y), X(x, v)], \tag{12}$$

care generalizează ecuaţia bisimetriei, are în cadrul aceleaşi clase de funcţii soluţia

$$\begin{aligned} f(x, y) &= H_1^{-1}[F_1(x) + G_1(y)], & \varphi(x, y) &= H^{-1}[F_4(x) + G_4(y)], \\ g(x, y) &= F_1^{-1}[F_2(x) + G_2(y)], & \psi(x, y) &= F_4^{-1}[F_2(x) + F_3(y)], \\ h(x, y) &= G_1^{-1}[F_3(x) + G_3(y)], & X(x, y) &= G_4^{-1}[G_2(x) + G_3(y)], \end{aligned}$$

unde intervin nouă funcţii arbitrare de o singură variabilă, continue şi strict monotone.

Ecuaţia transitivităţii generalizate

$$f[\varphi(x, t), \psi(y, t)] = g(x, y) \tag{13}$$

admite soluţia

$$\begin{cases} f(x, y) = H^{-1}[F_1(x) - G_1(y)], \\ g(x, y) = H^{-1}[F_2(x) - G_2(y)], \\ \varphi(x, y) = F_1^{-1}[F_2(x) - G_3(y)], \\ \psi(x, y) = G_1^{-1}[G_2(x) - G_3(y)]. \end{cases}$$

Din rezolvarea ecuaţiei generalizate a asociativităţii, dată mai sus, rezultă că dacă funcţia de trei variabile $f(x, y, z)$, continuă şi strict monotonă, admite cele două descompuneri

$$f(x, y, z) = g[\varphi(x, y), z] = h[x, \psi(y, z)],$$

atunci ea este de forma

$$f(x, y, z) = K^{-1}[F(x) + G(y) + H(z)],$$

unde F, G, H sînt funcţii continue şi strict monotone.

Mai general, descompunerile

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$
$$= g[\varphi(x_1, \ldots, x_q), x_{q+1}, \ldots, x_n] = h[x_1, \ldots, x_p, \psi(x_{p+1}, \ldots, x_n)] \ (p < q),$$

unde φ, ψ, g, h sînt funcții continue și strict monotone, sînt necesare și suficiente pentru ca funcția $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ să fie de forma

$$f(x_1, x_2, \ldots, x\ ) = K^{-1}[F(x_1, \ldots, x_p) + G(x_{p+1}, \ldots, x_q) +$$
$$+ H(x_{q+1}, \ldots, x_n)],$$

F, G, H, K fiind continue și strict monotone [13].

§ 8. Generalizări pentru țesuturi spațiale

Un țesut spațial este format din patru familii de suprafețe, astfel ca prin fiecare punct al unui domeniu din spațiu să treacă cîte o singură suprafață din fiecare familie și trei suprafețe din familii diferite să aibă un singur punct comun. Un țesut spațial este regulat, dacă e omeomorf cu patru fascicule de plane paralele. Să presupunem că trei familii de suprafețe sînt formate din planele paralele la planele de coordonate (ceea ce se poate realiza totdeauna printr-un omeomorfism) și că familia a patra e formată din suprafețele de nivel ale funcției continue $f(x, y, z)$. Condiția necesară și suficientă pentru ca acest țesut să fie regulat este

$$(0) \quad f(x_2, y_1, z_1) = f(x_1, y_2, z_1) = f(x_1, y_1, z_2) \Rightarrow f(x_1, y_2, z_2) =$$
$$= f(x_2, y_1, z_2) = f(x_2, y_2, z_1),$$

ceea ce exprimă că octaedrele de țesut se închid (octaedre curbilinii care au cîte două fețe opuse pe cîte două suprafețe ale unei familii).

F. Radó a definit în lucrarea [15] noțiunea de țesut spațial abstract și generalizările, care corespund la cvasigrupuri, loop-uri și izotopie.

Fie (Q, f) o structură algebrică cu o operație ternară $t = f(x, y, z)$. Ea se numește o N-algebră dacă ecuațiile $f(x. y, c) = d$, $f(a, y, c) = d$, $f(a, b, z) = d$ au cîte o singură soluție în Q $(a, b, c, d \in Q)$. N-algebra (Q, f) se numește o L-algebră, dacă există $e \in Q$ (element neutru) cu proprietatea $f(x, e, e) = f(e, x, e) = f(e, e, x) = x$. N-algebrele (Q, f) și (R, g) se zic izotope, dacă există transformările biunivoce $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ale mulțimii Q pe R, astfel ca $g(x\alpha, y\beta, z\gamma) = f(x, b, z)\delta$; $x, y, z \in Q$. Dacă $R = Q$ și δ este transformarea identică, atunci (Q, f) și (Q, g) se numesc izotopi principali. Un izotop principal, care este o L-algebră se numește un L-P-izotop. Izotopul (Q, F) al N-algebrei (Q, f), determinat prin

$$f(x, y, z) = F[f(x, b, c), f(a, y, c), f(a, b, z)], \tag{14}$$

unde a, b, c sînt elemente fixe din Q, este un L-P-izotop al lui (Q, f) cu elementul neutru $e_F = f(a, b, c)$. Orice L-P-izotop poate fi obținut pe această cale [14], [15].

Se numește țesut spațial abstract o mulțime de elemente (puncte) și patru sisteme de submulțimi (planele de categoriile, 1, 2, 3 și 4), care satisfac axiomele : 1) orice punct aparține la un singur plan de fiecare

categorie ; 2) trei plane de categorii diferite au exact un punct comun. Unei N-algebre (Q, f) i se poate atașa un țesut spațial abstract în felul următor : punctele țesutului sînt tripletele (x, y, z), $x, y, z \in Q$, iar planele de categoriile 1, 2, 3 și 4 mulțimile de triplete, care satisfac respectiv $x = a$, $y = b$, $z = c$, $f(x, y, z) = d$, unde a, b, c, d sînt elemente fixe din Q. La N-algebre izotope corespund țesuturi izomorfe (cu aceași structură) și dacă considerăm egale țesuturile izomorfe, țesuturile atașate N-algebrelor epuizează mulțimea țesuturilor spațiale abstracte.

Dacă fixăm pe z în $f(x, y, z)$, obținem ovasigrupul $(Q, \circ)$

$$x \circ y = f(x, y, z_0).$$

Mulțimea L-P-izotopilor tuturor acestor cvasigrupuri (cînd z_0 parcurge mulțimea Q) este identică cu mulțimea loop-urilor $F(x, y, e_F)$, cînd F parcurge toți L-P-izotopii lui (Q, f).

N-algebra (Q, f) se numește 1-decompozabilă, dacă

$$f(x, y, z) = x \circ (y \bullet z),$$

unde $\circ$ și $\bullet$ sînt operații de cvasigrup pe Q. Atunci și țesutul corespunzător se zice 1-decompozabil. Condiția de închidere

$$f(x_1, y_1, z_1) = f(x_1, y_2, z_2) \Rightarrow f(x_2, y_1, z_1) = f(x_2, y_2, z_2) \tag{D$_1$}$$

este necesară și suficientă pentru ca (Q, f) să fie 1-decompozabil, de asemenea relația

$$F(x, e, y) = F(x, y, e), \tag{15}$$

unde F este operația în L-P-izotopul arbitrar al lui (Q, f) și $e = e_F$ elementul neutru în (Q, F). Se definesc în mod analog N-algebrele 2- și 3-decompozabile. Condițiile necesare și suficiente corespunzătoare sînt : pentru (Q, f) 2-decompozabil

$$f(x_1, y_1, z_1) = f(x_2, y_1, z_2) \Rightarrow f(x_1, y_2, z_1) = f(x_2, y_2, z_2) \tag{D$_2$}$$

sau

$$F(e, x, y) = F(y, x, e) \tag{15'}$$

și pentru (Q, f) 3-decompozabil

$$f(x_1, y_1, z_1) = f(x_2, y_2, z_1) \Rightarrow f(x_1, y_1, z_2) = f(x_2, y_2, z_2) \tag{D$_3$}$$

sau

$$F(e, x, y) = F(x, e, y). \tag{15''}$$

N-algebra (Q, f) împreună cu țesutul corespunzător se numește 2-regulată, dacă este un izotop al lui $(x, y, z) \to x \circ y \circ z$, unde $\circ$ este o operație de grup. Atunci (Q, f) este izotop și cu $(x, y, z) \to z \circ y \circ x$, dar nu cu $(x, y, z) \to y \circ x \circ z$ și $(x, y, z) \to x \circ z \circ y$. Dacă are loc unul din aceste două cazuri din urmă, atunci (Q, f) se numește 1-, respectiv 3-regulat. În lucrarea [15] s-a demonstrat că pentru i-regularitate este necesară şi suficientă îndeplinirea condiţiei $D_j \& D_k$ (i, j, k reprezintă o permutare a numerelor 1, 2, 3). Pentru acesta s-a folosit soluţia dată de J. Aczél, V. D. Belousov şi M. Hosszú pentru ecuaţia generalizată a asociativităţii, considerată în cvasigrupuri şi care generalizează ecuaţia (11). Condiţia $D_j \& D_k$ poate fi exprimată ca o proprietate comună tuturor L-P-izotopilor (Q, F) ai N-algebrei (Q, f); de exemplu condiţia $D_1 \& D_3$ este echivalentă cu

$$F(e, x, y) = F(x, e, y) = F(x, y, e).$$

N-algebra (Q, f) se numeşte tare regulată, dacă ea este un izotop al lui $(x, y, z) \to x + y + z$, unde $+$ este o operaţie de grup comutativ. Pentru aceasta $D_1 \& D_2 \& D_3$ este necesar şi suficient.

N-algebra (Q, f) se numeşte semiregulată, dacă condiţia (0) este satisfăcută, care este echivalentă cu

$$F(e_F, x, x,) = F(x, e_F, y) = F(x, x, e_F),$$

pentru orice izotop (Q, F) al lui (Q, f).

O N-algebră se zice regulată, dacă prin fixarea a cîte uneia din variabilele x, y, z se obţin trei sisteme de cvasigrupuri regulate şi un cvasigrup dintr-un sistem este un izotop principal al oricărui alt cvasigrup din acelaşi sistem. Atunci şi ţesutul corespunzător se zice regulat.

O N-algebră i-regulată, $i = 1, 2, 3$, este regulată.

În lucrarea [16] F. Radó a demonstrat că, pentru ca un ţesut spaţial abstract să fie regulat, este necesar şi suficient ca L-P-izotopii, care au ca element neutru un element dat, să coincidă. Această teoremă se poate enunţa şi sub următoarea formă: Fie (Q, f) o L-algebră cu elementul neutru e; condiţia

$$F(a, b, c) = e \Rightarrow F(x, y, z) = F[F(x, b, c), F(a, y, c), F(a, b, z)]$$

este necesară şi suficientă pentru regularitatea L-algebrei (Q, F). Această condiţie poate fi privită ca una din generalizările posibile ale asociativităţii pentru operaţiile ternare.

Ţesuturile spaţiale regulate pot fi caracterizate şi cu o condiţie de închidere, care generalizează condiţia lui Reidemeister. Un ţesut spaţial abstract atunci şi numai atunci este regulat, dacă următoarea condiţie de închidere este satisfăcută [16]:

$$\left.\begin{aligned} f(x_1, y_1, z_1) &= f(x_3, y_3, z_3) \\ f(x_2, y_1, z_1) &= f(x_4, y_3, z_3) \\ f(x_1, y_2, z_1) &= f(x_3, y_4, z_3) \\ f(x_1, y_1, z_2) &= f(x_3, y_3, z_4) \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(x_2, y_2, z_2) = f(x_4, y_4, z_4).$$

Dacă această condiţie este satisfăcută pentru x_1, y_1, z_1 fixaţi şi x_i, y_i, z_i ($i = 2, 3, 4$) oarecari, atunci ea este totdeauna satisfăcută.

BIBLIOGRAFIE

1. A c z é l J., P i c k e r t G., R a d ó F., *Nomogramme, Gewebe und Quasigruppen*. Mathematica **2** (**25**), 5–24 (1960).
2. B a l L., *Nomograme cu transparent orientat pentru ecuaţii cu patru şi cinci variabile.* Studii şi cercetări de matematică (Cluj), **VIII**, 1–2, 169–175 (1957).
3. — *Proprietăţi ale unor suprafeţe speciale $h(z) = f(x) + g(y)$.* Studii şi cercetări de matematică (Cluj), **IX**, 39–44, (1958).
4. *Канонические формы для уравнений с четырьмя и пятью переменными*. Mathematica, **1**(**24**), 193–195 (1059).
5. — *Asupra unor suprafeţe ce intervin în nomografie*. Studia Univ. Babeş-Bolyai. Cluj, Ser. I. 1 (1960).
6. — *Condiţii pentru rezolvarea ecuaţiilor cu patru variabile cu ajutorul unor nomograme tangenţiale*. Studia Univ. Babeş-Bolyai Cluj, ser. I, 1, (1961).
7. B a l L., R a d ó F., *Două teoreme referitoare la separarea variabilelor pentru ecuaţiile cu cinci variabile*. Comunicările Acad. R.P.R., **V**, 285–290 (1955).
8. — *Separarea variabilelor în nomografie*. Comunicările Acad. R.P.R., **V**, 303–305 (1955).
9. — *Lecţii de nomografie*. Bucureşti, 1956.
10. B a l L., R u s u I., *Asupra unei grupări de variabile în vederea construirii nomogramelor compuse*. Studii şi cercetări ştiinţifice, Cluj, **V**, 3–4, 45–48, (1954).
11. R a d ó F., *Cea mai bună transformare proectivă a scărilor la nomograme cu puncte aliniate*. Studii şi cercetări de matematică (Cluj) **VIII**, 161–168 (1957).
12. — *Despre contactele nomogramelor cu transparent*. Studii şi cercetări de matematică (Cluj), **VIII**, 319–329 (1957).
13. — *Ecuaţii funcţionale în legătură cu nomografia*. Studii şi cercetări de matematică (Cluj), **IX**, 249–319 (1958).
   — *Equations fonctionnelles caractérisant les nomogrammes avec trois échelles rectilignes*, Mathematica **1** (**24**), 143–166 (1959).
   — *Sur quelques équations fonctionnelles avec plusieurs fonctions a deux variables*. Mathematica **1** (**24**) 321–339 (1959).
14. — *Verallgemeinerug der räumlichen Gewebe*. II Magyar Matematikai Kongresszus Budapest, 1960, 24–31 augusztus. A dolgozatok kivonatai, p. 52–54.
15. — *Generalizarea ţesuturilor spaţiale pentru structuri algebrice*. Studia Univ. Babeş-Bolyai (Cluj), Ser. I, **1**, 41–55 (1960).
16. — *Eine Bedingung für die Regularität der Gewebe*. Mathematica, **2** (**25**), 325–334 (1960).
17. R a d ó F., B a l L., G e r g e l y E., I o n e s c u G., *Reprezentarea ecuaţiilor cu patru variabile cu ajutorul nomogramei romboidale*. Lucrările consfătuirii de geomezrie diferenţială, Timişoara, 9–12 iunie 1955, p. 361–366.