ASUPRA UNICITĂȚII FORMEI ECUAȚIEI CONOIDULUI CARACTERISTIC

DE

N. TEODORESCU
Membru coresp. al Acad. R. P. R.

Comunicare prezentată la Sesiunea Filialei Cluj a Academiei R.P.R. din 18—21 decembrie 1954.

Introducere

Determinarea soluțiilor elementare ale ecuațiilor cu derivate parțiale liniare de ordinul al doilea cu coeficienți variabili de forma

$$E(u) = a^{ij} u_{ij} + a^i u_i + au = 0 \qquad (1)$$

unde u_i, u_{ij} sînt derivatele covariante ale cîmpului scalar $u(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ în raport cu coeficienții de conexiune Γ^i_{jk} arbitrari, face să intervină conoidul caracteristic al acestei ecuații.

Soluțiile elementare sînt soluții cu singularitate algebrică în cazul $n = 2m + 1$ și algebrico-logaritmică în cazul $n = 2m$, pe conoidul caracteristic.

Ecuația carteziană a acestui conoid cu vîrful într-un punct $O(a^1, a^2, \ldots, a^n)$ se obține introducînd o metrică riemanniană

$$ds^2 = a_{ij} dx^i dx^j \qquad (2)$$

calculînd pătratul distanței geodezice $\Gamma = J^2$ dintre punctul O și un punct arbitrar $M(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ din domeniul lui O și impunînd condiția

$$\Gamma(x^1, x^2, \ldots, x^n; a^1, a^2, \ldots, a^n) = 0 \qquad (3)$$

In toate aceste considerații, tensorul a^{ij} este presupus nesingular într-un domeniu D, care conține punctul O; prin urmare *ecuația (1) este de tip eliptic sau iperbolic.*

In cazul eliptic, distanța geodezică nu se anulează decît pentru $M = O$; dacă se consideră variabile complexe, conoidul este în acest caz imaginar, excluzînd vîrful său O, care este real.

Se știe că patratul distanței geodezice, verifică ecuația cu derivate parțiale

$$\Delta_1\Gamma = 4\Gamma \text{ cu } \Delta_1\Gamma = a_{ij}\frac{\partial\Gamma}{\partial x^i}\frac{\partial\Gamma}{\partial x^j} \tag{4}$$

astfel incit: *pătratul distanței geodezice de la punctul O la un punct arbitrar M este o soluție a ecuației (4) nulă pe conoidul punctului O.*

Subliniind faptul că Γ nu este o soluție, care verifică *identic* ecuația caracteristică

$$\Delta_1 G = o$$

deci că varietățile Γ = const. nu sint caracteristice, ci numai $\Gamma = o$ este caracteristică in familia Γ = const., valoarea 4Γ luată de parametrul lui Beltrami $\Delta_1\Gamma$ pe conoid, joacă un rol esențial in determinarea soluțiilor elementare.

Aceste observații conduc la următoarea problemă:

Păstrind expresia (4) a parametrului lui Beltrami in raționamentele făcute pentru obținerea soluției elementare prin metoda lui Hadamard, patratul Γ al distanței geodezice este singura soluție a ecuației $\Delta_1\Gamma = 4\Gamma$, nulă pe conoidul caracteristic al punctului O?

Hadamard a demonstrat că relația $\Delta_1\Gamma = 4\Gamma$ caracterizează forma ecuației conoidului, în sensul că *dacă ecuația (1) are coeficienții olomorfi intr-un domeniu D, orice funcție olomorfă intr-o vecinătate convenabilă a punctului $O \in D$, nulă pe conoidul acestui punct și satisfăcînd ecuația (4), este egală cu Γ* [1].

Demonstrația sa, bazată pe punerea unei eventuale soluții sub forma $\Gamma\Pi$, unde Π este o funcție de asemenea olomorfă, presupune *implicit* că $\Pi \neq 0$ pe conoid, fără a examina cazul general, în care Π ar putea fi nul pe conoid, ceea ce impune o revizuire a ei.

In același timp, cum soluțiile ecuației (1) rămîn invariante prin amplificarea lui $E(u)$ printr-un factor scalar nenul, *este interesant de considerat ecuația mai generală*

$$\Delta_1 G = 4\,\alpha(x^1, x^2, \ldots, x^n)\, G \tag{4'}$$

unde *$\alpha(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ este un scalar definit în domeniul D*. Aceasta corespunde alegerii unei metrice riemanniene conforme metricei (2), ceea ce lasă invariant conoidul caracteristic, deoarece ambele conexiuni au aceleași geodezice nule.

In cele ce urmează, *ne propunem să extindem, la această ecuație, problema pusă de Hadamard, dîndu-i o soluție riguroasă și punînd în evidență o problemă la limite cu date singulare*, care apare ca o interpretare a teoremei pe care o vom demonstra.

Semnificația ecuației $\Delta_1 G = 4\lambda^2 G$

In conexiunea riemanniană definită pe V_n prin tensorul nesingular a_{ij}, dualul tensorului a^{ij}, determinat de coeficienții ecuației (1), ecuația $\Delta_1 G = G$ admite ca soluție patratul distanței geodezice. Dacă $\alpha \neq 0$ intr-un punct $M \in D$, ecuația (4') se poate pune sub forma

$$\frac{a^{ij}}{\alpha}\frac{\partial G}{\partial x^i}\frac{\partial G}{\partial x^j} = 4G$$

Notînd

$$\frac{a^{ij}}{\alpha} = p^{ij};\ \alpha a_{ij} = p_{ij}$$

in conexiunea riemanniană definită de tensorul $b_{ij} = \alpha\, a_{ij}$ in domeniul punctului M, ecuația

$$b^{ij}\frac{\partial G}{\partial x^i}\frac{\partial G}{\partial x^j} = 4G \tag{5}$$

admite ca soluție patratul distanței geodezice în metrica

$$d\sigma^2 = b_{ij}\, dx^i\, dx^j = \alpha\, ds^2 \tag{5'}$$

conformă lui ds^2.

Dacă $\alpha = o$ intr-un punct, cum tensorul a_{ij} este nesingular, p_{ij} va fi singular. In cele ce urmează vom presupune $\alpha \neq 0$ in domeniul D.

Vom considera cazul coeficienților a^{ij}, a^i, a *olomorfi* in D, ceea ce ne permite să examinăm deodată ambele cazuri: eliptic și hiperbolic.

Se știe că varietățile Γ = const., sferele geodezice, sînt transversale cimpului de geodezice care pleacă din punctul O.

Notind

$$L(\dot{x}^1, \dot{x}^2, \ldots, \dot{x}^n;\ x^1, x^2, \ldots, x^n) = a_{ij}\dot{x}^i \dot{x}^j.$$

și ținind seama de integrala primă L = const., deducem propoziția următoare:

Vectorul tangent la o geodezică interioară are în fiecare punct orientarea temporală în cazul hiperbolic normal.

In adevăr, dacă in punctul O el este interior conului caracteristic de ecuație $L(\dot{x}_0^i, a^j) = 0$, semnul expresiei $L(\dot{x}^i, x^j)$ se va păstra în fiecare punct M al geodezicei considerate, deci vectorul $\dot{x}^i$ va rămine interior conului caracteristic $L(\dot{x}^i, x^j) = 0$.

In consecință:

Elementul de contact tangent sferelor geodezice Γ = const. va avea orientare spațială pentru toate sferele interioare conoidului $\Gamma = o$.

Propoziția rezultă din fapul că elementul de contact transversal unei direcții temporale este spațial, deoarece

$$H(p_i, x^j) = a^{ij} p_i p_j = \Delta_1\Gamma = \Gamma(x^i, x^j)$$

astfel încit H are același semn ca și L.

Impunind condiția $\Gamma > o$ la interiorul conoidului, vom avea

$$\Delta_1\Gamma = \varphi\,\Gamma > 0$$

și elementele de contact spațiale se vor caracteriza prin condiția $\Delta_1\Gamma > o$.

Pentru aceasta, se știe că forma patratică $H = a^{ij} p_i p_j$, trebuie scrisă astfel încît să aibă un pătrat pozitiv și $n-1$ patrate negative în cazul hiperbolic normal.

Pentru a avea aceeași proprietate și în cazul ecuației (4') asociate elementului liniar $d\sigma^2 = ds^2$, va trebui să impunem condiția $\alpha > o$.

Punînd $\alpha = \lambda^2$, deducem următoarea propoziție:

Ecuația

$$\Delta_1 G = 4\lambda^2 G \tag{6}$$

admite ca soluție, în cazul hiperbolic normal, pătratul distanței geodezice corespunzătoare elementului liniar $d\sigma^2 = \lambda^2 ds^2$, astfel încît distanțele măsurate pe geodezicele interioare sînt reale odată cu cele corespunzătoare elementului ds^2.

Evident, cazul $\alpha < o$, corespunzînd ecuației

$$\Delta_1 G = -4\lambda^2 G \tag{6'}$$

care conduce la distanțe imaginare pentru geodezicele interioare conoidului caracteristic, poate fi tratat în mod analog.

În cazul, ecuațiilor eliptice, ecuația (6) corespunde distanțelor geodezice reale pentru formele pozitiv definite

$$H = a^{ij} p_{ij} = \Delta_1 \Gamma > 0.$$

În cazul ultrahiperbolic, conul caracteristic nu are propriu zis un interior și un exterior, ci împarte spațiul în două regiuni, astfel încît nu există propriu zis direcții temporale sau spațiale. Vom păstra totuși ecuația (6) și în acest caz

Distanța geodezică riemanniană și ecuația conoidului.

Considerațiile de mai sus ne permit să demonstrăm următoarea teoremă:

Singura soluție olomorfă a ecuației

$$\Delta_1 G = 4\lambda^2 G$$

cu coeficienți olomorfi într-un domeniu D, nulă pe conoidul caracteristic $\Gamma = o$ al unui punct $O \in D$, este egală cu patratul distanței geodezice măsurate în metrica riemanniană

$$d\sigma^2 = \lambda^2 ds^2$$

conformă metricei ds^2, de la punctul O la un punct arbitrar M din vecinătatea sa.

În adevăr, ecuația dată admite ca soluție olomorfă pătratul $\mathcal{G}$ al distanței geodezice măsurate în metrica $d\sigma^2$, pentru care vom avea

$$\Delta_1 \mathcal{G} = 4\lambda^2 \mathcal{G} \tag{7}$$

Orice altă soluție olomorfă, nulă pe conoid, trebuie să fie de forma

$$G = \mathcal{G}^p \, \Pi \tag{8}$$

unde Π este o funcție de asemenea olomorfă în domeniul vîrfului O, cu $\Pi \neq 0$ pe conoid, iar $p \geqslant 0$ și întreg. Înlocuind în ecuația (6), obținem relația

$$p^2 \mathcal{G}^{2(p-1)} \Pi \, \Delta_1 \mathcal{G} + 2p\mathcal{G}^{2p-1} \Pi \Delta(\Pi, \mathcal{G}) + \mathcal{G}^{2p} \Delta_1 \Pi = \lambda^2 \mathcal{G}^p \, \Pi$$

în care

$$\Delta(\Pi \, \mathcal{G}) = a^{ij} \frac{\partial \Pi}{\partial x^i} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x^j} = 2\lambda^2 s \frac{d\Pi}{ds} \tag{8'}$$

de-a lungul unei geodezice oarecare, ce pleacă din O, s fiind arcul dacă geodezica nu este nulă (în cazul geodezicelor nule s are altă semnificație geometrică).

Această relație se pune sub forma următoare:

$$s\frac{d\Pi}{ds} + p\,\Pi - \frac{1}{p\mathcal{G}^{p-1}} + \frac{\Delta_1 \Pi}{4\lambda^2 p \Pi} \mathcal{G} = 0 \tag{9}$$

ținînd seama de (7) și (8), fiind valabilă pe o geodezică oarecare, eșită din O.

Pentru ca ea să aibă sens și pe geodezicele nule, unde $\mathcal{G} = o$, este necesar ca $p - 1 \leq o$. Cum p este întreg, *singura valoare posibilă este* $p = 1$.

În aceste condiții, ecuația (9) devine

$$s\frac{d\Pi}{ds} + \Pi - 1 + \frac{\Delta_1 \Pi}{4\lambda^2 \Pi} \mathcal{G} = 0 \tag{10}$$

și în particular pe conoid, vom avea:

$$s\frac{d\Pi}{ds} + \Pi - 1 = 0$$

de unde

$$\Pi - 1 = \frac{c}{s}$$

Cum însă Π trebuie să fie olomorf și în vîrful conoidului, va trebui să luăm $c = o$ *și deci* $\Pi = 1$ *pe conoid.*

În acest, caz, forma acestei funcții olomorfe în spațiu este

$$\Pi = 1 + \Theta \, \mathcal{G}^q \tag{11}$$

unde q = întreg $\geq o$, funcția olomorfă Θ fiind neidentic nulă pe conoid.

Introducînd această expresie a lui Π în ecuația (10), funcția Θ trebuie să verifice la rîndul său ecuația

$$s\frac{d\Theta}{ds} + (2q + 1)\,\Theta = 0$$

cu soluția

$$\Theta = C_1 \, s^{-(2q+1)}$$

Aceasta nu poate fi regulată în vîrful conoidului, decît pentru $C_1 = o$, ceea ce implică $\Theta = o$ *pe conoid.*

Astfel se ajunge la o contradicție, deoarece $\Theta \neq 0$ pe conoid. Singura soluție posibilă este $\Theta \equiv 0$; deci $\Pi = 1$ și în spațiu, ceea ce demonstrează teorema, deoarece din (8) deducem

$$G = \mathcal{G}$$

Din această teoremă rezultă unicitatea formei ecuației conoidului în sensul următor:

Dacă se consideră conoidul caracteristic ca o varietate integrală $G = 0$ a ecuației $\Delta_1 G = 4G$, care admite un punct conic O, singura expresie olomorfă a ecuației conoidului corespunde locului punctelor M pentru care pătratul distanței geodezice la O este nul.

Aceasta este semnificația teoremei lui Hadamard, care se obține din precedenta pentru $\lambda = 1$.

Problema lui Cauchy cu date pe conoid

Teorema demonstrată rezolvă și următoarea problemă a lui Cauchy cu date singulare:

Să se determine o soluție olomorfă a ecuației $\Delta_1 G = \lambda^2 G$, nulă pe conoidul caracteristic al unui punct dat O.

Problema admite o soluție unică determinată de pătratul $\mathcal{G}$ al distanței geodezice riemanniene corespunzătoare metricei conforme $d\sigma^2 = \lambda^2 ds^2$.

Ținînd seama de faptul că același conoid corespunde tuturor formelor posibile ale lui λ^2, se poate căuta expresia lui $\mathcal{G}$ în funcție de Γ, ceea ce revine la *determinarea tuturor distanțelor geodezice conforme în funcție de una dintre ele, corespunzătoare unui ds^2 determinat.*

Pentru aceasta, punînd în ecuația $\Delta_1 \mathcal{G} = \lambda^2 \mathcal{G}$

$$\mathcal{G} = \Gamma^p \Pi$$

sîntem conduși ca mai sus la ecuația

$$4p\,\Pi\, s\frac{d\Pi}{ds} + 4p^2\Pi^2 \quad \Gamma\Delta_1\Pi - \frac{4\lambda^2\Pi}{\Gamma^{p-1}} = 0 \qquad (12)$$

care înlocuiește pe (9). Deducem din nou $p = 1$, astfel încît ecuația (12) devine:

$$s\frac{d\Pi}{ds} + \Pi - \lambda^2 + \frac{\Delta_1\Pi}{4\Pi}\Gamma = 0 \qquad (12')$$

Pe conoid, ea se reduce la

$$s\frac{d\Pi}{ds} + \Pi = \lambda^2 \qquad (13)$$

și se integrează imediat prin formula

$$\Pi = \frac{1}{s}\int_0^s \lambda^2\, d\sigma \qquad (14)$$

parametrul s corespunzînd geodezicelor nule în metrica ds^2. Luînd apoi ca prim termen Π_0 expresia (14), calculată pe o geodezică oarecare ce pleacă din O, se poate determina factorul Π printr-o dezvoltare de forma

$$\Pi = \Pi_0 + \Pi_1\Gamma + \ldots + \Pi^n\Gamma^n + \ldots$$

folosind ecuația (12').

BIBLIOGRAFIE

1. I. Hadamard, *Leçons sur le problème de Cauchy*, Paris, 1932.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Об единственности формы уравнения характерного коноида

Н. ТЕОДОРЕСКУ

Цель этой заметки дать тщательную демонстрацию свойства квадрата геодезического риманианового расстояния подчеркнутого Хадамаром как единственное разрешение уравнения

$$\Delta_1\Gamma = 4\,\Gamma$$

где $\Delta_1\Gamma$ является параметром первой степени Бельтрами. Демонстрируется следующее предложение, более общее:

Уравнение

$$\Delta_1 G = 4\,\lambda^2(x^1, x^2, \ldots, x^n)\,G$$

с оломорфными коэффициентами признает как единственным оломорфным решением, нулевым на характерном коноиде $\Gamma = 0$ одной точки 0, квадрат геодезического расстояния измеренного риманиановой метрикой

$$d\sigma^2 = \lambda^2\, ds^2$$

соответственно с метрикой ds^2, с точки 0 к произвольной точке M в ее соседстве.

Это предложение разрешает в одно и то же время следующую задачу Коши с единственными данными: Определить оломорфное решение уравнения $\Delta_1 G = \lambda^2 G$ нулевой на характерном коноиде одной данной точки 0.

Первоначальная демонстрация Хадамара касалась только случая, когда решение имело бы форму $G = \Gamma\,\Pi$ с $\Pi \neq 0$ на коноиде, в то время как общая форма решения это $G = \Gamma^p\Pi$ с $p \geqq 0$ и целое. Демонстрируется, что обязательно $p = 1$.

RÉSUMÉ

Sur l'unicité de la forme de l'équation du conoïde caractéristique

par

N. TEODORESCU

L'objet de cette note est de donner une démonstration rigoureuse de la propriété du carré de la distance géodésique riemannienne, mise en évidence par Hadamard, d'être l'unique solution de l'équation

$$\Delta_1\Gamma = 4\,\Gamma$$

où $\Delta_1\Gamma$ est le paramètre du premier ordre de Beltrami. On démontre la proposition suivante un peu plus générale:

L'équation

$$\Delta_1 G = 4\,\lambda^2(x^1, x^2, \ldots, x^n)\,G$$

à coefficients holomorphes admet comme solution holomorphe unique, nulle sur le conoïde caractéristique $\Gamma = 0$ d'un point O, le carré de la distance géodésique, mesurée dans la métrique riemannienne

$$d\sigma^2 = \lambda^2\,ds^2$$

conforme à la métrique ds^2, du point O à un point arbitraire M de son voisinage.

Cette proposition résout en même temps le problème suivant de Cauchy à données singulières:

Déterminer une solution holomorphe de l'équation $\Delta_1 G = \lambda^2 G$ nulle sur le conoïde caractéristique d'un point donné O.

La démonstration initiale de Hadamard envisageait seulement le cas où la solution serait de la forme $G = \Gamma\,\Pi$ avec $\Pi \neq 0$ sur le conoïde, tandis que la forme générale de la solution est $G = \Gamma^p\,\Pi$ avec $p \geqslant 0$ et entier. On démontre que $p = 1$ nécessairement.