REȚELE CONJUGATE CU CONGRUENȚE ASOCIATE DE TIP PARABOLIC

DE

TIBERIU MIHĂILESCU

Comunicare prezentată în ședința din 22 octombrie 1955 a Filialei Cluj a Academiei R.P.R.

Congruențele obișnuite de drepte de tip parabolic-congruențe de drepte ce depind de doi parametri și ale căror pînze focale sînt confundate — au fost destul de puțin considerate în mod sistematic în problemele de geometrie diferențială.

În afară de proprietatea fundamentală — expusă în clasica lucrare a lui *Darboux* [1] — că aceste congruențe sînt realizate de tangentele asimptoticelor curbilinii ale uneia din cele două familii de linii asimptotice distincte de pe o suprafață arbitrară, care nu este o riglată desfășurabilă — regăsim congruențe de acest tip considerate de *S. Finikov* în problema stratificabilității perechilor de congruențe [2] și de *S. Bahvalov* în problema corespondenței asimptotice a două suprafețe [3].

Se știe că unei rețele conjugate din spațiul obișnuit — în afară de congruențele formate de tangentele la curbele rețelei — îi sînt asociate două congruențe cu rol important în studiul proprietăților rețelei și anume:

a) *congruența axială*, formată de dreptele comune planelor osculatoare la cele două curbe ale rețelei ce trec printr-un punct al suprafeței pe care se află situată reteaua considerată;

b) *congruența radială*, formată de dreptele determinate de cele două transformate Laplace ale unui punct al suprafeței menționate.

Studiul rețelelor conjugate, așa cum s-a făcut pînă acum, a presupus în mod esențial că aceste două congruențe au pînze focale distincte.

Pentru fiecare din ele, pe suprafața ce conține rețeaua conjugată, există două familii diferite de curbe focale, curbe dealungul cărora dreptele unei congruențe se asociază formînd riglate desfășurabile.

Considerarea acestor congruențe asociate în teoria rețelelor conjugate a făcut să apară clase noi de rețele conjugate, de ex. rețelele armonice în sens *Wilczinski*, pentru care — într-un punct regulat arbitrar al suprafeței — tangentele la curbele focale ale congruențelor asociate formează sisteme armonice cu tangentele la curbele rețelei. Aceste clase de rețele nu pot fi caracterizate prin relații între invarianții Laplace ai rețelei conjugate.

În cele ce urmează prezentăm clase noi de rețele conjugate legate de natura parabolică a uneia sau a ambelor congruențe asociate.

Pentru tratarea problemelor vom întrebuința metoda reperului mobil și sistemele Pfaff în involuție, așa cum am procedat într-o lucrare anterioară [4], la care ne vom referi în mod continuu.

I. *Rețele conjugate cu congruența axială de tip parabolic.*

1. Să raportăm o rețea conjugată din spațiul proiectiv obișnuit la un „reper R′" format de un tetraedru mobil $A_0A_1A_2A_3$, vîrful A_0 fiind un punct regulat al suprafeței (A_0), pe care este situată rețeaua, A_0A_1, A_0A_2 fiind tangentele la cele două curbe ale rețelei ce trec prin A_0 — punctele A_1, A_2 fiind — respectiv — transformatele Laplace ale lui A_0 — iar A_3 fiind conjugatul armonic al punctului A_0 față de cele două puncte focale ale dreptei de intersecție a planelor osculatoare în A_0 la cele două curbe ale rețelei ce trec prin acest punct, dreaptă ce se numește *axul* rețelei conjugate.

Expresiile componentelor deplasării proiective infinitezimale ale acestui reper R′ sînt date de tabloul

$$\begin{cases} \omega_3 = 0,\ \omega_{12} = 0,\ \omega_{21} = 0,\ \omega_{13} = a\omega_1,\ \omega_{23} = b\omega_2 \\ \omega_{10} = ae\omega_1 + f\omega_2,\ \omega_{20} = h\omega_1 - be\omega_2 \\ \omega_{32} = g\omega_1 - e\omega_2,\ \omega_{31} = e\omega_1 + j\omega_2 \\ \omega_{30} = l\omega_1 + m\omega_2 \end{cases}$$

ω_1, ω_2 fiind forme Pfaff liniar independente în raport cu cei doi parametri de poziție a punctului A_0.

Sistemul exterior asociat sistemului (I) este:

$$\begin{cases} [\Delta a\omega_1] = 0 \\ [\Delta b\omega_2] = 0 \\ a[\Delta e\omega_1] + [\Delta f\omega_2] - am[\omega_1\omega_2] = 0 \\ [\Delta g\omega_1] - [\Delta e\omega_2] - l[\omega_1\omega_2] = 0 \\ [\Delta h\omega_1] - b[\Delta e\omega_2] + bl[\omega_1\omega_2] = 0 \\ [\Delta e\omega_1] + [\Delta j\omega_2] + m[\omega_1\omega_2] = 0 \\ [\Delta l\omega_1] + [\Delta m\omega_2] - e(f - bg + h - aj)[\omega_1\omega_2] = 0 \end{cases}$$

unde

$$\begin{cases} \Delta a = da + a(\omega_{00} - 2\omega_{11} + \omega_{33}) \\ \Delta b = db + b(\omega_{00} - 2\omega_{22} + \omega_{33}) \\ \Delta e = de + e(\omega_{00} - \omega_{33}) \\ \Delta f = df + f(2\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22}) \\ \Delta g = dg + g(\omega_{00} - \omega_{11} + \omega_{22} - \omega_{33}) \\ \Delta h = dh + h(2\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22}) \\ \Delta j = dj + j(\omega_{00} + \omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33}) \\ \Delta l = dl + l(2\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{33}) \\ \Delta m = dm + m(2\omega_{00} - \omega_{22} - \omega_{33}) \end{cases}$$

sînt opt forme Pfaff liniar independente,

Invarianții Laplace: H, K (punctuali), $\overline{H}$, $\overline{K}$ (tangențiali) sînt respectiv proporționali cu coeficienții

$$h,\ f,\ bg,\ aj$$

Notînd cu

$$x_0A_0 + x_3A_3$$

un punct al axului A_0A_3, relațiile focale ale congruenței axiale sînt

$$(1)\quad \begin{cases} x_0\omega_1 + x_3\omega_{31} = 0 \\ x_0\omega_2 + x_3\omega_{32} = 0 \end{cases}$$

și eliminarea formelor ω_1, ω_2 conduce la ecuația punctelor focale

$$(2)\qquad (e^2 + gj)x_3^2 - x_0^2 = 0$$

din care rezultă condiția necesară și suficientă ca axele rețelei să formeze o congruență parabolică

$$(3)\qquad e^2 + gj = 0$$

Punctele focale sînt confundate cu A_3 care descrie unica varietate focală a congruenței.

Dacă această varietate este o suprafață care nu e desfășurabilă, axele A_0A_3 ale rețelei (A_0) sînt tangentele unei familii de asimptotice curbilinii ale acestei suprafețe.

Se observă că relația (3) poate fi satisfăcută în următoarele trei cazuri particulare — pe care le vom numi cazuri elementare:

a) $$(4)\qquad e = g = 0$$

Ecuațiile curbelor focale ale congruențelor asociate fiind

$$(5)\qquad (A_0A_3)\qquad g\omega_1^2 - 2e\omega_1\omega_2 - j\omega_2^2 = 0$$

$$(6)\qquad (A_1A_2)\qquad ah\omega_1^2 - 2abe\omega_1\omega_2 - bf\omega_2^2 = 0$$

se vede că, în cazul (4), aceste curbe formează sisteme armonice cu curbele rețelei.

Rețeaua descrisă de A_0 este o rețea armonică în sens *Wilczinski*.

Coordonatele tangențiale

$$\alpha_2 = -[A_0A_1A_3]$$

ale planului osculator la curba din familia

$$(7)\qquad \omega_2 = 0$$

ce trece prin A_0 admit — față de o variație a lui A_0 — variații date de formula:

$$d\alpha_2 = -\omega_2\alpha_0' - \omega_{22}\alpha_2 - \omega_{32}\alpha_3$$

Dacă A_0 se deplasează pe o curbă (7), aceste variații devin:

$$(8)\qquad d\alpha_2 = -\omega_{22}\alpha_2 - g\omega_1\alpha_3.$$

Rezultă că relația

$$(9) \qquad g = 0$$

reprezintă condiția necesară și suficientă ca familia (7) să fie formată din curbe plane.

Considerînd sistemul (II) se deduce că, dacă ținem seamă de condițiile (4), o consecință a lor este relația

$$(10) \qquad l = 0$$

deci

$$(11) \qquad dA_3 = (mA_0 + jA_1)\,\omega_2 + \omega_{33}\,A_3,$$

Dacă A_0 se deplasează pe o curbă a familiei (7), punctul A_3, focarul unic al axului, rămîne fix.

Focala congruenței axiale se reduce la o curbă, a cărei tangentă în A_3 are coordonatele plückeriene:

$$(12) \qquad m\,[A_0A_3] + j\,[A_1A_3]$$

Congruența axială este o congruență parabolică singulară.

Tot din (II) mai deducem că această clasă de rețele conjugată depinde de șase funcțiuni arbitrare de un argument,

b) $(13) \qquad e = j = 0$

Obținem aceeași clasă ca în cazul precedent, focala dublă a congruenței axiale reducîndu-se la o curbă, a cărei tangentă în A are coordonatele

$$(14) \qquad l\,[A_0A_3] + g\,[A_2A_3]$$

familia

$$(15) \qquad \omega_1 = 0$$

fiind formate din curbe plane.

c) $(16) \qquad e = g = j = 0$

Rezultă din (II)

$$l = m = 0$$

deci:

$$dA_3 = \omega_{33}\,A_3$$

adică punctul A_3, focarul unic al congruenței axiale este fix.

Curbele focale ale acestei congruențe sînt nedeterminate, axele trecînd printr-un punct fix.

Aceste rețele, situate pe suprafețe care sînt dualele suprafețelor lui *Peterson*, depind de patru funcțiuni arbitrare de un argument.

Transformatele Laplace, punctele A_1, A_2 descriu conuri cu vîrful în punctul fix A_3.

Clasa cea mai generală de rețele conjugate cu congruența axială de tip parabolic se obține punînd

$$(17) \qquad g = \sigma^2, \; j = -\tau^2, \; e = \sigma\tau$$

σ și τ fiind două auxiliare.

Sistemul (II) devine

$$(18) \qquad \begin{cases} [\Delta a\omega_1] = 0, \; [\Delta b\omega_2] = 0 \\ a\,[\tau\Delta\sigma + \sigma\Delta\tau, \omega_1] + [\Delta f\omega_2] - am\,[\omega_1\omega_2] = 0 \\ 2\sigma\,[\Delta\sigma\omega_1] - [\tau\Delta\sigma + \sigma\Delta\tau, \omega_2] - l\,[\omega_1\omega_2] = 0 \\ [\tau\Delta\sigma + \sigma\Delta\tau, \omega_1] - 2\tau\,[\Delta\tau\omega_2] + m\,[\omega_1\omega_2] = 0 \\ [\Delta h\omega_1] - b\,[\tau\Delta\sigma + \sigma\Delta\tau, \omega_2] + bl\,[\omega_1\omega_2] = 0 \\ [\Delta l\omega_2] + [\Delta m\omega_2] - \sigma\tau\,(f - b\sigma^2 + h + a\tau^2)\,[\omega_1\omega_2] = 0 \end{cases}$$

unde

$$\Delta\sigma = d\sigma + \frac{\sigma}{2}\,(\omega_{00} - \omega_{11} + \omega_{22} - \omega_{33})$$

$$\Delta\tau = d\tau + \frac{\tau}{2}\,(\omega_{00} + \omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33})$$

iar numerele caracteristice sînt:

$$s_1 = 7, \quad s_2 = 1.$$

Cea mai generală rezolvare a sistemului exterior (18) este dată de ecuațiile Pfaff, care prelungesc sistemul (I):

$$(19) \qquad \begin{cases} \Delta a = A\omega_1, \; \Delta b = B\omega_2 \\ \Delta f = -2a\,(\tau C - m)\,\omega_1 + E\omega_2 \\ \Delta h = E\omega_1 + 2b\,(\sigma F + l)\,\omega_2 \\ \Delta\sigma = -\dfrac{1}{\tau}\,(\sigma C + 2\sigma F + l)\,\omega_1 + F\omega_2 \\ \Delta\tau = C\omega_1 - \dfrac{1}{\sigma}\,(2\sigma C + \tau F - m)\,\omega_2 \\ \Delta l = G\omega_1 + [H - \sigma\tau\,(h + a\tau^2)]\,\omega_2 \\ \Delta m = [H + \sigma\tau\,(f - b\sigma^2)]\,\omega_1 + I\omega_2 \end{cases}$$

A, B, . . . , I fiind nouă arbitrare.

Sistemul diferențial (I), în care se ține seama de (17), este în involuție cu $s_2 = 1$, deci rețelele conjugate cu congruența axială de tip parabolic depind de o funcțiune arbitrară de două argumente.

Gradul mare de generalitate al acestor rețele ne îndreptățește să credem că pe o suprafață arbitrar dată există rețele ce aparțin acestei clase.

2. Raportînd o suprafață neriglată la un reper mobil Cartan, o rețea conjugată este definită de o ecuație diferențială de forma

$$(20) \qquad \omega_2^2 - c^2\,\omega_1^2 = 0,$$

e fiind o funcție de parametrii de poziție a punctului A_0, iar ecuația diferențială a curbelor focale ale congruenței axiale este

$$e^2(\beta_1 - \beta_2)\omega_1^2 - 2e^2(\Upsilon_1 - \Upsilon_2)\omega_1\omega_2 - (\Upsilon_3 + \beta_2)\omega_2^2 = 0 \tag{21}$$

unde [4, p. 59]:

$$\begin{cases} \beta_1 = e^6 + (f^2 - 3a + 2af + 2a_1 - 2h - 4\lambda)e^2 + 2 \\ \beta_2 = 2e^2[(a - f)e^2 - (b + g)] \\ \Upsilon_1 = 2(i + 2\sigma)e^2 \\ \Upsilon_2 = e^4(2g - b) + (a + 2f) \\ \Upsilon_3 = 2e^6 + (g^2 - 3b^2 - 2bg + 2b_2 + 2j - 4\rho)e^4 + 1 \end{cases} \tag{22}$$

Condiția ca A_0A_3 să formeze o congruență de tip parabolic este

$$e^2(\Upsilon_1 - \Upsilon_2)^2 + \beta_1 - \beta_2)(\Upsilon_3 + \beta_2) = 0 \tag{22}$$

și se satisface punînd

$$\begin{cases} \beta_1 - \beta_2 = -e\alpha^2 \\ \Upsilon_3 + \beta_2 = e\beta^2 \\ \Upsilon_1 - \Upsilon_2 = \alpha\beta \end{cases} \tag{23}$$

α, β fiind doi coeficienți auxiliari.

Sistemul (23) se poate rezolva în raport cu coeficienții h, i, j, care intervin în sistemul Pfaff

$$\begin{aligned} de &= ef\omega_1 + eg\omega_2 \\ df &= h\omega_1 + (i + bf)\omega_2 \\ dg &= (i + ag)\omega_1 + j\omega_2 \end{aligned} \tag{24}$$

ce determină funcțiunea e, obținînd astfel un sistem diferențial al cărui sistem exterior este

$$\begin{cases} 2e\alpha[d\alpha\omega_1] + [\beta d\alpha + \alpha d\beta, \omega_2] + \alpha'[\omega_1\omega_2] = 0 \\ e[\beta d\alpha + \alpha d\beta, \omega_1] + 2\beta[d\beta, \omega_2] + \beta'[\omega_1\omega_2] = 0 \end{cases} \tag{25}$$

unde α', β' se exprimă cu ajutorul coeficienților sistemului (24) și al invarianților diferențiali proiectivi ai suprafeței.

Sistemul dedus din (24) este în involuție cu $s_1 = 2$, curbele caracteristice fiind date de ecuația

$$(e\alpha\omega_1^2 + \beta\omega_2)^2 = 0 \tag{26}$$

care reprezintă curbele focale coincidente (21) ale congruenței axiale.

O suprafață arbitrară admite așadar o infinitate de rețele conjugate ale căror curbe nu sînt plane și care au congruența axială de tip parabolic. Mulțimea formată de aceste rețele depinde de două funcțiuni arbitrare de un argument.

3. Fiind dată o rețea conjugată arbitrară, raportată la un reper R', punctul A_3 descrie o suprafață S, numită prima suprafață armonic asociată [5] suprafeței (A_0).

Planul tangent în A_3 la S are coordonatele tangențiale

$$(e^2 + gj)\alpha_0 - (el + mg)\alpha_1 + (em - jl)\alpha_2 \tag{27}$$

Fața $A_1A_2A_3$ a reperului R' înfășură a doua suprafață armonic asociată Σ, coordonatele punctului de contact al planului $\alpha_0 = [A_1A_2A_3]$ cu Σ fiind

$$(hm + bel)A_1 + (fl - aem)A_2 - (abe^2 + fh)A_3 \tag{28}$$

Dacă rețeaua are congruența axială de tip parabolic expresia (27) devine

$$(\sigma m + \tau l)(\sigma\alpha_1 - \tau\alpha_2) \tag{29}$$

Înlăturînd cele trei cazuri elementare descrise, deci presupunînd în mod esențial

$$\sigma\tau \neq 0 \tag{30}$$

din (29) rezultă că punctul A_3, unicul punct focal al axului, descrie o suprafață propriu zisă dacă avem

$$\sigma m + \tau l \neq 0 \tag{31}$$

și în acest caz coordonatele planului tangent sînt

$$\pi = \sigma\alpha_1 - \tau\alpha_2 \tag{32}$$

Cu ajutorul expresiilor

$$\begin{cases} d\pi = -(\sigma\omega_1 - \tau\omega_2)\alpha_0 + (d\sigma - \sigma\omega_{11})\alpha_1 - (d\tau - \tau\omega_{22})\alpha_2 \\ dA_3 = \omega_{30}A_0 + (\sigma\omega_1 - \tau\omega_2)(\tau A_1 + \sigma A_2) + \omega_{33}A_3 \end{cases} \tag{33}$$

se deduce ecuația liniilor asimptotice ale suprafeței (A_3)

$$\begin{aligned} -(\sigma\omega_1 - \tau\omega_2)\omega_{30} + \tau(\sigma\omega_1 - \tau\omega_2)(d\sigma - \sigma\omega_{11}) - \\ - \tau(\sigma\omega_1 - \tau\omega_2)(d\tau - \tau\omega_{22}) = 0 \end{aligned}$$

care se descompune în ecuațiile

$$\begin{cases} \sigma\omega_1 - \tau\omega_2 = 0 \\ \tau(d\sigma - \sigma\omega_{11}) - \sigma(d\tau - \tau\omega_{22}) - \omega_{30} = 0 \end{cases} \tag{34}$$

Referindu-ne la (5) și ținînd seamă de (17), observăm că prima ecuație (34) reprezintă unica familie de curbe focale a congruenței axiale.

Deci, cînd A_0 descrie o curbă focală, punctul A_3 descrie o asimptotică a suprafeței (A_3), care face parte din familia de asimptotice ale căror tangente formează congruența axială a rețelei (A_0).

Din ecuațiile (19), care prelungesc sistemul Pfaff (I) avem:

$$(35)\quad \begin{cases} d\sigma + \dfrac{\sigma}{2}(\omega_{00} - \omega_{11} + \omega_{22} - \omega_{33}) = -\dfrac{1}{\tau}[\sigma(C+2F)+l]\,\omega_1 + F\omega_2 \\[2mm] d\tau + \dfrac{\tau}{2}(\omega_{00} + \omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33}) = C\omega_1 - \dfrac{1}{\sigma}[\tau(2C+F) - m]\,\omega_2 \end{cases}$$

Inlocuind în a doua ecuație (34), avem

$$(36)\qquad (C+F)(\sigma\omega_1 - \tau\omega_2) + l\omega_1 + m\omega_2 = 0$$

ecuația celei de a doua familii de linii asimptotice ale suprafeței (A_3).
Din ecuația globală a asimptoticelor acestei suprafețe:

$$(37)\qquad \sigma[\sigma(C+F)+l]\,\omega_1^2 - \{\tau[\sigma(C+F)+l] + \sigma[\tau(C+F) - m]\}\,\omega_1\omega_2 + \\ + \tau[\tau(C+F) - m]\,\omega_2^2 = 0$$

deducem că ele corespund curbelor rețelei (A_0) dacă avem:

$$(38)\qquad \begin{cases} \sigma[\sigma(C+F)+l] = 0 \\ \tau[\tau(C+F) - m] = 0 \\ \tau[\sigma(C+F)+l] + \sigma[\tau(C+F)m] \neq 0 \end{cases}$$

Singurele soluții ale sistemului format de primele două ecuații (38), care sînt comptabile cu a treia condiție, sînt

a) $\qquad \sigma = 0,\ \tau(C+F) - m = 0$

b) $\qquad \tau = 0,\ \sigma(C+F) + l = 0$

In primul caz, curbele familiei

$$\omega_2 = 0$$

sînt curbe plane iar din a doua ecuație (18) rezultă

$$l = o,\ F = o$$

deci a treia condiție (38) nu este îndeplinită.
Un rezultat asemănător îl obținem și în al doilea caz.
Asimptoticele pînzei focale unice a congruenței axiale nu pot corespunde curbelor rețelei.
Există însă rețele de tipul, pe care îl studiem, pentru care punctul focal A_3 descrie o rețea conjugată în același timp cu A_0.
Condiția necesară și suficientă ca să se realizeze o astfel de transformare

$$(39)\qquad 2\sigma\tau(C+F) + \tau l - \sigma m = 0$$

este satisfăcută punînd

$$(40)\qquad C = -\frac{\sigma\lambda - m}{2\tau},\ F = \frac{\sigma\lambda - l}{2\sigma}$$

λ fiind un coeficient auxiliar.

Făcind această înlocuire în (19) să considerăm următoarele două ecuații ale sistemului Pfaff obținut:

$$(41)\qquad \begin{cases} \Delta\sigma + \dfrac{\sigma}{2\tau^2}(\lambda\tau + m)\,\omega_1 - \dfrac{\lambda\sigma - l}{2\sigma}\,\omega_2 = 0 \\[2mm] \Delta\tau + \dfrac{\lambda\tau - m}{2\tau}\,\omega_1 - \dfrac{\tau}{2\sigma^2}(\lambda\sigma + l)\,\omega_2 = 0 \end{cases}$$

Prin diferențiere exterioară obținem

$$(42)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\tau}[\Delta\lambda\omega_1] - \dfrac{1}{\sigma}[\Delta\lambda\omega_2] + \lambda_1[\omega_1\omega_2] = 0 \\[2mm] \dfrac{1}{\tau}[\Delta\lambda\omega_2] - \dfrac{1}{\sigma}[\Delta\lambda\omega_2] + \lambda_2[\omega_1\omega_2] = 0 \end{cases}$$

unde

$$(43)\qquad \begin{cases} \lambda_1 = 2(f - b\sigma^2) + \dfrac{G}{\sigma^2} - \dfrac{I}{\tau^2} + \dfrac{2\lambda l}{2\sigma^2\tau} + \dfrac{\lambda m}{2\sigma\tau^2} + \dfrac{2lm}{\sigma^2\tau^2} \\[2mm] \lambda_2 = -2(h + a\tau^2) - \dfrac{G}{\sigma^2} + \dfrac{I}{\tau^2} - \dfrac{\lambda l}{2\sigma^2\tau} - \dfrac{3\lambda m}{2\sigma\tau^2} - \dfrac{2lm}{\sigma^2\tau^2} \end{cases}$$

Rezultă o nouă condiție

$$\lambda_1 = \lambda_2$$

adică

$$(44)\qquad (\sigma m + \tau l)\lambda + \tau^2 G - \sigma^2 I + \sigma^2\tau^2(f - b\sigma^2 + h + a\tau^2) + 2lm = 0$$

condiție care determină pe λ.
Sistemul exterior al noului sistem Pfaff este

$$(45)\qquad \begin{cases} [\Delta A\omega_1] = 0 \\ [\Delta B\omega^2) = 0 \\ 2a\tau[\sigma^2\Delta I - \tau^2\Delta G,\ \omega_1] + (\sigma m + \tau l)[\Delta D\omega_2] = 0 \\ (Gm + \tau l)[\Delta E\omega_1] + 2b[\sigma^2\Delta I - \tau^2\Delta G,\ \omega_2] = 0 \\ [\sigma^2\Delta I - \tau^2\Delta G,\ \sigma\omega_1 - \tau\omega_2] = 0 \\ [\Delta G\omega_1] + [\Delta H\omega_2] = 0 \\ [\Delta H\omega_1] + [\Delta I\omega_2] = 0 \end{cases}$$

$\Delta A, \ldots, \Delta I$ fiind forme Pfaff independente ale căror expresii nu le mai transcriem.
Sistemul este în involuție cu $s_1 = 7$, caracteristicele sale fiind date de ecuația

$$(47)\qquad \omega_1^2\,\omega_2^2(\sigma\omega_1 - \tau\omega_2)^2(\sigma\omega_1 + \tau\omega_2) = 0$$

Deci, în mulțimea rețelelor cu congruența axială de tip parabolic există o clasă destul de cuprinzătoare de rețele pentru care punctul A_3 — focarul unic al axului — realizează o transformare a rețelei considerate tot într-o rețea conjugată și această clasă depinde de șapte funcțiuni arbitrare de un argument.

4. Dacă

$$\sigma m + \tau l = 0 \tag{47}$$

coordonatele planului tangent la S sunt nule, planul tangent este nedeterminat.

Din

$$dA_3 = \frac{\sigma m + \tau l}{\tau} \omega_1 A_0 + (\sigma\omega_1 - \tau\omega_2)(\tau A_1 + \sigma A_2) + \omega_{33} A_3 \tag{48}$$

rezultă că în cazul în care coeficienții sistemului verifică relația (47) punctul A_3 se deplasează pe o curbă atunci cînd A_0 descrie o regiune a suprafeței (A_0).

O astfel de rețea conjugată cu congruență axială parabolică singulară asociază suprafeței — pe care este situată rețeaua — o curbă, anume curba focală unică a congruenței axiale.

Dacă satisfacem relația (47) punînd

$$l = \lambda\sigma, \quad m = -\lambda\tau, \tag{49}$$

λ fiind un coeficient auxiliar, și introducem în (1), obținem un sistem Pfaff în involuție cu $s_1 = 7$, avînd drept curbe caracteristice curbele definite de ecuația

$$\omega_1^2 \omega_2^2 (\sigma\omega_0 - \tau_2)^3 = 0. \tag{50}$$

Rețelele cu congruența axială parabolică singulară depind de șapte funcțiuni arbitrare de un argument.

Ecuațiile, care prelungesc sistemul Pfaff al acestei probleme, sînt:

$$\tag{51} \begin{cases} \Delta a = A\omega_1, \ \Delta b = B\omega_2 \\ \Delta f = 2a\tau(C + \lambda)\omega_1 + D\omega_2 \\ \Delta h = E\omega_1 + 2b\sigma(F + \lambda)\omega_2 \\ \Delta\tau = C\omega_1 - \frac{\tau}{\sigma}(2C + F + \lambda)\omega_2 \\ \Delta\lambda = d\lambda + \frac{\lambda}{2}(3\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33}) = \\ \qquad = -\frac{1}{\tau}[G + \lambda C + \sigma\tau(f - b\sigma^2)]\omega_2 + \\ \qquad + \frac{1}{\sigma}[G - \lambda F - \sigma\tau(h + a\tau^2)]\omega_2 \\ \Delta\sigma = -\frac{\sigma}{\tau}(C + 2F + \lambda)\omega_1 + F\omega_2 \end{cases}$$

Coordonatele plückeriene ale tangentei la curba (A) sînt

$$[\lambda A_0 + \tau A_1 + \sigma A_2, \ A_3] \tag{52}$$

punctul

$$A_3' = \lambda A_0 + \tau A_1 + \sigma A_2 \tag{53}$$

fiind un punct al acestei drepte.

Avem

$$\tag{54} \begin{aligned} dA_3' &= (d\lambda + \lambda\omega_{00} + \tau\omega_{10} + \sigma\omega_{20}) A_0 + \\ &+ (d\tau + \lambda\omega_1 + \tau\omega_{11}) A_1 + (d\sigma + \lambda\omega_2 + \sigma\omega_{22}) A_2 + (\tau\omega_{13} + \sigma\omega_{33}) A_3 \end{aligned}$$

iar coordonatele planului osculator la (A) sînt:

$$\tag{55} \begin{aligned} [A_3, A_3', dA_3'] &= \{\lambda d\tau - \tau d\lambda + \lambda\tau(\omega_{11} - \omega_{00}) + \lambda^2\omega_1 - \\ &- \tau^2\omega_{00} - \sigma\tau\omega_{20}\}[A_0A_1A_3] + \{\lambda d\sigma - \sigma d\lambda + \\ &+ \lambda\sigma(\omega_{22} - \omega_{00}) + \lambda^2\omega_2 - \sigma\tau\omega_{10} - \sigma^2\omega_{20}\}[A_0A_2A_3) + \\ &+ \{\tau d\sigma - \sigma d\tau + \sigma\tau(\omega_{22} - \omega_{11}) - \\ &- \lambda(\sigma\omega_1 - \tau\omega_2)\}[A_1A_2A_3]. \end{aligned}$$

Ținînd seamă de ecuațiile (51) expresia acestor coordonate devine:

$$p_0\alpha_0 + p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2 \tag{56}$$

unde

$$\begin{cases} p_0 = 2\sigma\tau(C + F + \lambda) \\ p_1 = -\sigma[2\lambda E - G + \lambda^2 - \sigma\tau(f - b\sigma^2 - h - a\tau^2) \\ p^2 = -\tau[2\lambda C + G + \lambda^2 + \sigma\tau(f - b\sigma^2 - h - a\tau^2) \end{cases}$$

5. Am reamintit mai sus că unei rețele conjugate arbitrare i se asociază a doua suprafață armonic asociată Σ, înfășurătoarea planelor determinate de raza rețelei A_1A_2 și punctul A_3.

Planul osculator al curbei (A_3) coincide cu planul tangent la Σ dacă avem relațiile:

$$\tag{57} \begin{cases} \lambda^2 + 2\lambda C + G + \sigma\tau(f - b\sigma^2 - h - a\tau^2) = 0 \\ \lambda^2 + 2\lambda F - G - \sigma\tau(f - b\sigma^2 - h - a\tau^2) = 0 \end{cases}$$

care pot fi înlocuite cu relațiile echivalente

$$\tag{58} \begin{cases} \lambda(C + F + \lambda) = 0 \\ \lambda(C - F) + G + \sigma\tau(f - b\sigma^2 - h - a\tau^2) = 0 \end{cases}$$

Dacă luăm

$$\lambda = 0$$

ultima ecuație a sistemului (51) dă condițiile

$$G + \sigma\tau(f - b\sigma^2) = 0, \quad G - \sigma\tau(h + a\tau^2) = 0 \tag{59}$$

care la rîndul lor, ținînd seamă de (57), au drept consecință relațiile între invarianții Laplace

$$f = b\sigma^2, \quad h = -a\tau^2 \tag{60}$$

caracteristice rețelelor R.

Acest caz va fi tratat cînd vom pune problema rețelelor care au atît congruența axială cît și congruența radială de tip parabolic.

Luind

$$C+F+\lambda=0 \tag{61}$$

punem

$$C=H-\frac{\lambda}{2},\ F=-H-\frac{\lambda}{2},\ G=-2\lambda H-\sigma\tau(f-b\sigma^2-h-a\tau^2) \tag{62}$$

Inlocuind în (51) și observînd că în locul ecuațiilor a 5^a și a 6^a din acest sistem putem pune ecuațiile liniar echivalente

$$\begin{cases} \tau\Delta\sigma+\sigma\Delta\tau=2H(\sigma\omega_1-\tau\omega_2) \\ \tau\Delta\sigma-\sigma\Delta\tau=\lambda(\sigma\omega_1-\tau\omega_2) \end{cases}$$

adică:

$$\begin{cases} \dfrac{d(\sigma\tau)}{\sigma\tau}+\omega_{00}-\omega_{33}=2H(\sigma\omega_1-\tau\omega_2) \\ \dfrac{d\left(\dfrac{\sigma}{\tau}\right)}{\dfrac{\sigma}{\tau}}+\omega_{22}-\omega_{11}=\lambda\left(\dfrac{\omega_1}{\tau}-\dfrac{\dot{\omega}_1}{\sigma}\right) \end{cases} \tag{63}$$

sistemul exterior ~~asociat~~ este

$$\begin{cases} [\Delta A\omega_1]-a(3f-h+3a\tau^2+b\sigma^2)[\omega_1\omega_2]=0 \\ [\Delta B\omega_2]-b(f-3h+3b\sigma^2+a\tau^2)[\omega_1\omega_2]=0 \\ 2a\tau[\Delta H\omega_1]-[\Delta D\omega_2]+\left\{\dfrac{2a\tau H^2}{\sigma}+\dfrac{a\lambda\tau H}{\sigma}-\dfrac{a\lambda^2\tau}{\sigma}-ab\sigma^2\tau^3-\right. \\ \qquad \left.-f(3f-3h+2a\tau^2+b\sigma^2)\right\}[\omega_1\omega_2]=0 \\ [\Delta E\omega_1]-2b\sigma[\Delta H\omega_2]+\left\{-\dfrac{2b\sigma}{\tau}H^2+\dfrac{b\lambda\sigma}{\tau}H+\dfrac{b\lambda^2\sigma}{\tau}-ab\sigma^2\tau^2-\right. \\ \qquad \left.-h(3f-3h+a\tau^2+2b\sigma^2)\right\}[\omega_1\omega_2]=0 \\ [\Delta H,\sigma\omega_1-\tau\omega_2]+\dfrac{1}{2}\left\{2\lambda H-\sigma\tau(f-b\sigma^2-h-a\tau^2)\right\}[\omega_1\omega_2]=0 \end{cases} \tag{64}$$

Sistemul este în involuție cu $s_1=5$, curbele caracteristice fiind

$$\omega_1^2\omega_2^2(\sigma\omega_1-\tau\omega_2)=0$$

deci curbele rețelei și curba focală unică a congruenței axiale.

Observăm, că în baza relațiilor (57), (58), coordonatele planului osculator la (A_3) sînt nule deci acest plan este nedeterminat.

Congruența axială este o congruență parabolică singulară avînd ca focală dublă o linie dreaptă. Prin această dreaptă trec planele $A_1A_2A_3$ deci ea constitue și degenerescența suprafeței Σ.

La fel se stabilește existența rețelelor cu congruență axială parabolică singulară, pentru care planul osculator la curba focală unică (A_3) conține axul A_0A_3.

Aceste rețele caracterizate de relația

$$C+F+\lambda=0 \tag{65}$$

depind de șase funcțiuni arbitrare de un argument.

Coordonatele planului osculator al curbei (A_3) sînt

$$\sigma[A_0A_1A_3]+\sigma[A_0A_2A_3]=-[A_0,A_3,\tau A_1+\sigma A_2].$$

El intersectează planul tangent la (A_0) după tangenta la curbă focală a congruenței Σ

$$\sigma\omega_1-\tau\omega_2=0$$

II. *Rețele conjugate cu congruența radială de tip parabolic.*

(6) In același mod, determinat de caracterul corelativ al figurii, se tratează și problema rețelelor conjugate cu congruența radială parabolică.

Notînd cu

$$x_1A_1+x_2A_2$$

un punct al dreptei punctelor A_1, A_2, transformatele Laplace ale punctului A_0, relațiile focale ale congruenței formată de aceste drepte sînt

$$\begin{cases} x\,\omega_{10}+x_2\omega_{20}=0 \\ x_1\omega_{13}+x_2\omega_{23}=0 \end{cases} \tag{66}$$

de unde rezultă, prin eliminări convenabile, ecuația diferențială a curbelor focale

$$ah\omega_1^2-2abe\omega_1\omega_2-bf\omega_2^2=0 \tag{67}$$

și ecuația parametrilor punctelor focale

$$bhx_2^2+2abex_1x_2-afx_1^2=0 \tag{68}$$

In cazul în care congruența radială este de tip parabolic, coeficienții sînt supuși condiției:

$$abe^2+fh=0 \tag{69}$$

Cazurile elementare ale problemei sînt trei:

a) (70) $\qquad e=f=0$

Pentru o deplasare a punctului A_0 pe curba rețelei

$$\omega_1=0 \tag{71}$$

punctul A_1 admite, în general, o deplasare dată de

$$dA_1=f\omega_2A_0+\omega_{11}A_1$$

Dacă

$$f=0 \tag{72}$$

punctul A_1 rămîne fix în deplasarea considerată deci riglata desfășurabilă dealungul curbei (71) este un con.

Rețelele ce corespund acestui caz particular sînt rețele armonice în sens W i l c z i n s k i cu una din familiile de curbe ce o compun formată din curbe conice.

Punctul A_1 transformatul Laplace al punctului A_0 în sensul curbei

$$\omega_2 = 0$$

descrie o curbă, tangentă în A_1 la dreapta A_1A_3, după cum rezultă din relația

$$dA_1 = \omega_{11}A_1 + a\omega_1 A_3 \quad (\omega_2 = 0)$$

Suprafața S, prima suprafață armonic asociată a lui (A_0), este riglată desfășurabilă a tangentelor la curba descrisă de A_1.

În adevăr, din sistemul exterior (II) rezultă că relația

(73) $$m = 0$$

este o consecință a relațiilor (70).

Coordonatele planului osculator la curba descrisă de A_1 sînt

$$[A_1,\ dA_1,\ d^2A_1] = a^2\omega_1^3 \{ -g[A_1A_2A_3] + l[{}_0A_1A_3] \}$$

adică

$$g\alpha_0 - l\alpha_2$$

și deci acest plan este plan tangent la S în A_3, după cum reiese din (27).

Punctul focal al razei este transformatul Laplace A_1, congruența radială este de tipul parabolic singular. Rețelele acestei clase depind de șase funcțiuni arbitrare de un argument.

b) (74) $$e=0 \quad h=0$$

Tipul de rețea conjugat, caracterizat de aceste condiții, este identic cu cel precedent, familia

$$\omega_2 = 0$$

fiind formată din curbe conice, transformatul Laplace A_2 descriind o curbă.

c) (75) $$e=0,\ f=0,\ h=0$$

Ambele familii de curbe ale rețelei conjugate sînt formate din curbe conice.

Planul tangent la prima suprafață armonic asociată S este planul $A_1A_2A_3$, care este fix după cum rezultă din relația

$$d\alpha_0 = -\omega_{00}\alpha_0.$$

Cele două suprafețe S și Σ se reduc la acest plan fix care conține transformatele Laplace A_1, A_2.

Congruența radială este o congruență parabolică singulară, dreptele ei fiind situate într-un plan fix.

Rețetele acestei clase se află pe suprafețe P e t e r s o n [10] și depind de 4 funcțiuni arbitrare de un argument.

Odată ce am examinat aceste cazuri elementare, trecem la cazul general al rețelelor caracterizate de relația (69) și vom presupune, în cele ce urmează, că niciuna din familiile de curbe ale rețelei nu este formată din linii conice, adică

(76) $$fh \neq 0$$

Introducînd auxiliarele σ, τ, condiția (69) este satisfăcută punînd

(77) $$e = \sigma\tau,\quad f = a\tau^2,\quad h = -b\sigma^2 \qquad \sigma\tau \neq 0$$

Sistemul diferențial respectiv, obținut din (I) ținînd seamă de (77), admite sistemul exterior:

(78) $$\begin{cases} [\Delta a\omega_1] = 0 \qquad\qquad [\Delta b\,\omega_2] = 0 \\ a[\sigma\Delta\tau + \tau\Delta\sigma,\ \omega_1] + [\tau^2\Delta a + 2a\tau\Delta\tau,\ \omega_2] - am[\omega_1\omega_2] = 0 \\ [\Delta g\omega_1] - [\sigma\Delta\tau + \tau\Delta\sigma,\ \omega_2] - l\,[\omega_1\omega_2] = 0 \\ [\sigma\Delta\tau + \tau\Delta\sigma,\ \omega_1] + [\Delta j\omega_2] + m[\omega_1\omega_2] = 0 \\ [\sigma^2\Delta b + 2b\sigma\Delta\sigma,\ \omega_1] + b[\sigma\Delta\tau + \tau\Delta\sigma,\ \omega_2] - bl[\omega_1\omega_2] = 0 \\ [\Delta l\omega_1] + [\Delta m\omega_2] - \sigma\tau(a\tau^2 - bg - b\sigma^2 - aj)[\omega_1\omega_2] = 0 \end{cases}$$

și este în involuție cu $s_2 = 1$.

Rețelele cu congruența radială de tip parabolic depind de o funcțiune arbitrară de două argumente. O suprafață arbitrară conține rețele ce aparțin acestei clase.

Folosind reperul asimptotic Cartan și considerînd ecuația curbelor focale ale congruenței radiale (4, p. 80, ec. (17)), relația caracteristică este

(79) $$c^2(\gamma_1 + \gamma_2)^2 + (\beta_1 + \beta_2)(\gamma_3 - \beta_2) = 0$$

pe care o satisfacem punînd:

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 = -e\alpha^2 \\ \gamma_3 - \beta_2 = e\beta^2 \\ \gamma_1 + \gamma_2 = \alpha\beta \end{cases}$$

de unde putem deduce coeficienții h, i, j iar sistemul exterior asociat sistemului Pfaff, a cărui soluție determină rețelele conjugate cu congruența radială de tip parabolic ce există pe o suprafață arbitrar dată, este

(80) $$\begin{aligned} 2e\alpha[d\alpha\omega_1] + [\beta d\alpha + \alpha d\beta,\ \omega_2] + \alpha'[\omega_1\omega_2] = 0 \\ e[\beta d\alpha + \alpha d\beta, \omega_1] + 2\beta[d\beta, \omega_2] + \beta'[\omega_1\omega_2] = 0 \end{aligned}$$

α', β' fiind funcțiuni de coeficienții sistemului și de invarianții suprafeței.

Acest sistem diferențial este în involuție cu $s_1 = 2$, caracteristicele fiind curbele focale confundate ale congruenței radiale

(81) $$(\alpha e\omega_1 + \beta\omega_2)^2 = 0$$

Rețelele conjugate cu congruența radială de tip parabolic ale căror curbe nu sînt curbe conice, există pe o suprafață arbitrară și determinarea lor comportă două funcțiuni arbitrare de un argument.

(7) Revenind la reperul R′, sistemul Pfaff ce se obține prin rezolvarea sistemului exterior (78):

$$(82)\qquad \begin{cases} \Delta a = aA\omega_1, \ \Delta b = bB\omega_2 \\ \Delta\sigma = \dfrac{\sigma}{\tau}\left(2C - D + \sigma B + \dfrac{l}{\sigma}\right)\omega_1 + C\omega_2 \\ \Delta\tau = D\omega_1 - \dfrac{\tau}{\sigma}\left(C - 2D - \tau A + \dfrac{m}{\tau}\right)\omega_2 \\ \Delta g = E\omega_1 - [\sigma(2C + \sigma B) + 2l]\,\omega_2 \\ \Delta j = [\tau(\tau A + 2D) - 2m]\,\omega_1 + F\omega_2 \\ \Delta l = G\omega_1 + [H + a\sigma\tau(j - \tau^2)]\,\omega_2 \\ \Delta m = [H - b\sigma\tau(g + \sigma^2)]\,\omega_1 + I\omega_2 \end{cases}$$

introduce nouă arbitrare A, B, . . . , I.

Din (67) și (68) rezultă că ecuația

$$(83)\qquad \sigma\omega_1 + \tau_2 = 0$$

reprezintă familia de curbe focale confundate ale congruenței radiale punctul

$$(84)\qquad F = l\sigma A_1 + a\tau A_2$$

fiind punctul focal unic al razei A_1A_2.

Coordonatele punctului de contact al planului $A_1A_2A_3$ cu suprafața armonic asociată Σ, după (28) sînt

$$(85)\qquad (\tau l - \sigma m)(b\sigma A_1 + a\tau A_2)$$

Deci dacă

$$\tau l - \sigma m \neq 0$$

acest punct este chiar punctul focal F.

Suprafața focală unică a congruenței radiale se confundă cu a doua suprafață armonic asociată Σ.

Acest lucru rezultă și din expresia variațiilor coordonatelor punctului F, date de formula

$$(86)\qquad dF = f_1 A_1 + f_2 A_2 + f_3 A_3$$

unde

$$(87)\qquad \begin{cases} f_1 = \dfrac{b\sigma}{\tau}\left(2C - D + \sigma B + \dfrac{l}{\sigma}\right)\omega_1 + b(C + \sigma B)\,\omega_2 - \dfrac{b\sigma}{2}\,\Omega \\ f_2 = a(D + \tau A)\,\omega_1 - \dfrac{a\tau}{\sigma}\left(C - 2D - \tau A + \dfrac{m}{\tau}\right)\omega_2 - \dfrac{a\tau}{2}\,\Omega \\ f_3 = ab(\sigma\omega_1 + \tau\omega_2) \\ \Omega = 3(\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22}) + \omega_{33} \end{cases}$$

Ecuația liniilor asimptotice ale suprafeței focale (F)

$$-[d\alpha_0\, dF] = f_1\omega_{10} + f_2\omega_{20} + f_3\omega_{30} = 0$$

se descompune în ecuația

$$(88)\qquad \sigma\omega_1 + \tau\omega_2 = 0$$

și ecuația

$$(89)\qquad \{2(C - D) + \sigma B - \tau A\}(\sigma\omega_1 + \tau\omega_2) + 2(l\omega_1 + m\omega_2) = 0$$

Una din familiile de asimptotice ale suprafeței (F) corespunde familiei curbelor focale ale congruenței A_1A_2, razele rețelei (A_0) fiind tangente la asimptoticele respective, după cum rezultă de altfel și din expresia variațiilor coordonatelor planului tangent:

$$(90).\qquad d\alpha_0 = -\omega_{00}\alpha_0 - (\sigma\omega_1 + \tau\omega_2)(a\tau\alpha_1 - b\sigma\alpha_2) - (l\omega_1 + m\omega_2)\,\alpha_3$$

care, pentru a deplasare a punctului A_0 dealungul unei curbe a familiei (88), devin

$$(91)\qquad d\alpha_0 = -\omega_{00}\alpha_0 - \frac{\omega_2}{\tau}(\tau l - \sigma m)\,\alpha_3.$$

Caracteristica planului într-o astfel de deplasare este dreaptă de intersecție a planelor α_0, α_3 adică dreapta A_1A_2.

Ecuația globală a liniilor asimptotice ale suprafeței (F) este

$$(92)\qquad \sigma(\sigma M + 2l)\,\omega_1^2 + 2(\sigma\tau M + \tau l + \sigma m)\,\omega_1\omega_2 + \tau(\tau M + 2m)\,\omega_2^2 = 0$$

unde:

$$(93)\qquad M = 2(C - D) + \sigma B - \tau A.$$

Problemele puse în studiul rețelelor cu congruența axială de tip parabolic și aplicate și la clasa de rețele cu congruență radială de tip parabolic admit rezultate care se deduc ușor.

Astfel, asimptoticele suprafeței (F) nu pot să corespundă curbelor rețelei (A_0), deoarece relațiile

$$\sigma M + 2l = 0, \quad \tau M + 2m = 0$$
$$\sigma\tau M + \tau l + \sigma m = 0$$

nu sunt compatibile în baza condiției

$$\tau l - \sigma m \neq 0.$$

Pentruca rețelei conjugate descrise de A_0 să-i corespundă pe (F) tot o rețea conjugată este necesar și suficient să existe condiția

$$(94)\qquad \sigma\tau M + \tau l + \sigma m = 0$$

Calcule lungi, care nu prezintă greutăți și pe care le omitem din cauză că prezintă o mare asemănare cu cele dezvoltate în cazul similar din problema rețelelor conjugate cu congruența axială parabolică, ne permit să stabilim că soluția acestei probleme afirmă existența unei astfel de clase de rețele care depinde de șapte funcțiuni arbitrare de un argument.

Această clasă mediază așadar o transformare a unei rețele conjugate tot într-o rețea conjugată.

8. Dacă avem:

$$\tau l - \sigma m = 0 \tag{95}$$

putem pune

$$l = \mu\sigma, \quad m = \mu\tau \tag{96}$$

și expresia variațiilor coordonatelor planului tangent la suprafața focală dublă a congruenței devine

$$d\alpha_0 = -\omega_{00}\alpha_0 - (\sigma\omega_1 + \tau\omega_2)(a\tau\alpha_1 - b\sigma\alpha_2 + \mu\alpha_3). \tag{97}$$

Într-o deplasare a lui A_0 pe curba focală dublă (83) — care corespunde unei asimptotice a suprafeței (F) — avem

$$d\alpha_0 = -\omega_{00}\alpha_0$$

deci planul tangent rămîne fix.

Suprafața focală dublă (F) este o riglată desfășurabilă.

Această clasă de rețele conjugate depinde de șapte funcțiuni arbitrare de un argument, după cum se poate stabili folosind condițiile (96) și introducînd noua formă Pfaff

$$\Delta\mu = d\mu + \frac{\mu}{2}(3\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33}). \tag{98}$$

Curbele caracteristice ale sistemului sînt

$$\omega_1^2\omega_2^2(\sigma\omega_1 + \tau\omega_2)^3 = 0. \tag{99}$$

Din (97) rezultă că generatoarea desfășurabilei focale — caracteristica planului tangent — este dreapta de intersecție a planelor

$$\alpha_0, \quad \pi = a\tau\alpha_1 - b\sigma\alpha_2 + \mu\alpha_3 \tag{100}$$

adică

$$[F, \mu A_1 - a\tau A_3] \tag{101}$$

Variațiile coordonatelor planului π sînt:

$$d\pi = p_0\alpha_0 + p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2 + p_3\alpha_3 \tag{102}$$

unde

$$\begin{cases} p_0 = b\sigma\omega_2 - a\tau\omega_1 \\ p_1 = d(a\tau) - a\tau\omega_{11} - a\mu\omega_1 \\ p_2 = -d(b\sigma) + b\sigma\omega_2 - b\mu\omega_2 \\ p_3 = d\mu - \mu\omega_{33} - a\tau\omega_{31} + b\sigma\omega_{32}. \end{cases} \tag{103}$$

Sistemul Pfaff, care prelungește sistemul diferențial asociat acestei clase de rețele, este

$$\begin{cases} \Delta a = aA\omega_1 \\ \Delta b = bB\omega_2 \\ \Delta\sigma = \dfrac{\sigma}{\tau}(C + 2\tau F - \sigma G + \sigma B + \mu)\omega_1 + (C + \tau F)\omega_2 \\ \Delta\tau = (C + \sigma G)\omega_1 + \dfrac{\tau}{\sigma}(C - \tau F + 2\sigma G + \tau A - \mu)\omega_2 \\ \Delta g = D\omega_1 - \sigma(2C + 2\tau F + \sigma B + 2\mu)\omega_2 \\ \Delta j = \tau(2C + 2\sigma G + \tau A - 2\mu)\omega_1 + E\omega_2 \\ \Delta\mu = \{\mu F - a\sigma(j - \tau^2)\}\omega_1 + \{\mu G + b\sigma(g + \sigma^2)\}\omega_2. \end{cases} \tag{104}$$

Coordonatele punctului de contact al generatoarei (101) cu muchia de înapoiere a desfășurabilei sînt date de

$$[\alpha_0, \pi, d\pi]$$

adică, ținînd seamă de (102)—(104), au valorile

$$x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3 \tag{105}$$

unde

$$\begin{cases} x_1 = b\sigma\mu\left\{C + \tau F - \sigma G + \sigma B - \dfrac{\sigma\tau}{\mu}(bg - aj) + \mu\right\} \\ x_2 = a\tau\mu\left\{C - \tau F + \sigma G + \tau A - \dfrac{\sigma\tau}{\mu}(bg - aj) - \mu\right\} \\ x_3 = ab\sigma\tau\,(2\sigma G - 2\tau F + \tau A - \sigma B - 2\mu) \end{cases} \tag{106}$$

Avînd aceste elemente ale suprafeței focale duble (R), se pot pune probleme avînd caracter dual față de problemele studiate asupra rețelelor conjugate cu congruența axială parabolică.

Rezultatele se pot întrevedea ușor deci credem că nu este cazul să mai insistăm asupra lor.

Rețele conjugate cu ambele congruențe asociate de tip parabolic.

9. Pentru tratarea acestui caz vom folosi reperul R [4, p. 44—45, ec. (I), (II), 16], ce se deosebește de reperul R′, întrebuințat pînă acum, numai prin faptul că punctul A_3 nu este determinat ca poziție pe axul rețelei.

Ecuațiile, care dau valorile parametrilor punctelor focale ale axului A_0A_3 și razei A_1A_2 sînt — respectiv —:

$$\begin{cases} (ei + gj)x_3^2 + (e - i)x_0x_3 - x_0^2 = 0 \\ bhx_2^2 + ab(e + i)x_1x_2 - afx_1^2 = 0. \end{cases} \tag{107}$$

Rezultă relațiile caracteristice rețelelor conjugate ale căror congruențe asociate sînt amîndouă de tip parabolic

$$\begin{cases} ab(e+i) + 4fh = 0 \\ (e+i)^2 + 4gj = 0 \end{cases} \tag{108}$$

Asupra cazurilor particulare

$$e+i=0,\ fh=0,\ gj=0 \tag{109}$$

nu ne mai oprim, rezultatele deducîndu-se cu ușurință.

Se obțin rețele armonice în sens Wilczinski cu curbe plane și curbe conice.

În general, relațiile (108) sînt satisfăcute punînd

$$\begin{aligned} f &= \frac{b(e+i)}{2\tau}, \quad h = -\frac{a(e+i)\tau}{2} \\ g &= \frac{e+i}{2\sigma}, \quad j = -\frac{(e+i)\sigma}{2} \end{aligned} \tag{110}$$

Introducînd aceste valori în sistemul Pfaff asociat reperului R, sistemul exterior respectiv devine:

$$\left\{ \begin{aligned} &[\Delta a\omega_1] = 0 \\ &[\Delta b\omega_2] = 0 \\ &2a\tau[\Delta e\omega_1] + b\left[\Delta e + \Delta i - \frac{e+i}{\tau}\Delta\tau,\ \omega_2\right] = 0 \\ &\left[\Delta e + \Delta i - \frac{e+i}{\sigma}\Delta\sigma,\ \omega_1\right] - 2\sigma[\Delta e\omega_2] = 0 \\ &a\tau\left[\Delta e + \Delta i + \frac{e+i}{\tau}\Delta\tau,\ \omega_1\right] + 2b[\Delta i\omega_2] = 0 \\ &2[\Delta i\omega_1] - [\sigma(\Delta e + \Delta i) + (e+i)\Delta\sigma,\ \omega_2] = 0 \end{aligned} \right. \tag{111}$$

cu

$$\begin{aligned} \Delta\sigma &= d\sigma + \sigma(\omega_{11} - \omega_{22}) \\ \Delta\tau &= d\tau + \tau(\omega_{11} - \omega_{22}) \end{aligned}$$

Sistemul diferențial considerat este în involuție cu $s_1=6$.

Rețelele cu ambele congruențe asociate de tip parabolic depind de șase funcțiuni arbitrare de un argument, curbele caracteristice fiind date de:

$$\omega_1\omega_2(\omega_1 - \sigma\omega_2)(a\tau\omega_1 + b\omega_2)(a\tau\omega_1^2 + b\sigma\omega_2^2) = 0. \tag{112}$$

Ecuația

$$\omega_1 - \sigma\omega_2 = 0 \tag{113}$$

reprezintă familia de curbe cu care sînt confundate curbele focale ale axului; curbele focale ale razei sînt confundate cu curbele familiei

$$a\tau\omega_1 + b\omega_2 = 0 \tag{114}$$

Punctele A_1, A_2, — transformatele Laplace ale punctului A_0 — descriu suprafețele ale căror linii asimptotice sînt date, în general, de ecuațiile [p. p. 55]

$$\left\{ \begin{aligned} (A_1)\quad & ag\omega_1^2 + f\omega_2^2 = 0 \\ (A_2)\quad & h\omega_1^2 + bj\omega_2^2 = 0 \end{aligned} \right. \tag{115}$$

În cazul pe care îl studiem, aceste ecuații se reduc la una singură

$$a\tau\omega_1^2 + b\sigma\omega_2^2 = 0 \tag{116}$$

Caracteristicele problemei sînt așadar curbele rețelei, curbele focale ale celor două congruențe și asimptoticele transformatelor Laplace.

Rețelele cu amîndouă congruențele asociate de tip parabolic sînt cuprinse în clasa mult mai întinsă a rețelelor conjugate cu transformatele Laplace în corespondență asimptotică.

Din ecuațiile (115) și a condițiilor (108) rezultă că dacă o rețea conjugată are transformatele Laplace în corespondență asimptotică și dacă una din congruențele asociate este de tip parabolic și cealaltă congruență asociată este tot de tip parabolic.

Rezultatul enunțat este valabil numai dacă rețeaua nu este o rețea armonică în sens Wilczinski.

Rezolvînd sistemul exterior (111) în modul cel mai general obținem ecuațiile

$$\begin{aligned} \Delta a &= A\omega_1 \\ \Delta b &= B\omega_2 \\ \Delta e &= C\omega_1 + D\omega_2 \\ \Delta i &= E\omega_1 + F\omega_2 \\ \Delta\sigma &= -\frac{\sigma}{e+i}\left(C + E + \frac{2F}{\sigma}\right)\omega_1 + \frac{\sigma}{e+i}(2\sigma C + D + F)\omega_2 \\ \Delta\tau &= \frac{\tau}{e+i}\left(C - \frac{2a\tau}{b}D + E\right)\omega_1 - \frac{\tau}{e+i}\left(D - \frac{2b}{a\tau}E + F\right)\omega_2 \end{aligned} \tag{112}$$

$A, \ldots, F$ fiind șase coeficienți arbitrari.

Punctele focale ale axului sînt confundate cu punctul

$$F_1 = (e-i)A_0 + 2A_3 \tag{113}$$

iar ale razei coincid cu punctul

$$F_2 = \tau A_1 + A_2 \tag{114}$$

Ținînd seamă de ecuațiile (112) se calculează ușor variațiile coordonatelor acestor două puncte:

$$dF_1 = \{(C-E)\omega_1 + (D-F)\omega_2\}A_0 + \frac{e+i}{\sigma}(\omega_1 - \sigma\omega_2)(\sigma A_1 + A_2) + \omega_{33}F_1 \tag{115}$$

$$dF_2 = \frac{a\tau\omega_1 + b\omega_2}{2}F_1 + \omega_{22}F_2 + \Delta\tau A_1 \tag{116}$$

și cu ajutorul lor obținem coordonatele planelor tangente la suprafețele focale duble (F_1), (F_2) ale congruenței asociate:

$$(F_1)\quad \pi_1 = \alpha_1 - \sigma\alpha_2 \tag{117}$$

$$(F_2)\quad \pi_2 = 2\alpha_0 - (e-i)\alpha_3 \tag{118}$$

Deoarece avem relația

$$[\pi_2 F_1] = 0$$

rezultă că planul tangent la (F_2) conține focarul unic al axului, punctul F_1.

O teoremă a lui S l o t n i c k [11], stabilită pentru cazul în care congruențele asociate sînt cu pînze focale distincte, rămîne deci valabilă și în cazul congruențelor asociate de tip parabolic.

Din (115) și din

$$d\pi_1 = -(\omega_1 - \sigma\omega_2)\alpha_0 - \omega_{11}\alpha_1 - (d\sigma - \sigma\omega_{22})\alpha_2 + \\ + \frac{e+i}{2}(\omega_1 - \sigma\omega_2)\alpha^3 \tag{119}$$

se obține ecuația liniilor asimptotice ale suprafeței (F_1)

$$-(\omega_1 - \sigma\omega_2)\{(C-E)\omega_1 + (D-F)\omega_2 - (e-i)(\omega_{00} - \omega_{33})\} - \\ - \frac{e = i}{\sigma}(\omega_1 - \sigma\omega_2)\{d\sigma + \sigma(\omega_{11} - \omega_{22})\} - (e+i)(\omega_1 - \sigma\omega_2)\omega_{33} = 0$$

care se descompune în

$$\omega_1 - \sigma w_2 = 0$$

și

$$(\sigma E + F)\omega_1 - \sigma(\sigma C + D)\omega_2 = 0 \tag{120}$$

ultima ecuație putîndu-se pune sub forma

$$(e+i)\triangle e + \sigma(\triangle e - \triangle i) = 0 \tag{121}$$

La fel, din (116) și din

$$d\pi_2 = -2\omega_{00}\alpha_0 - \frac{e+i}{\tau}(a\tau\omega_1 + b\omega_2)(\alpha_1 - \tau\alpha,) - \\ - \{(C-E)\omega_1 + (D-F)\omega_2 - (e-i)\omega_{00}\}\alpha_3$$

rezultă ecuațiile celor două familii de asimptotice ale suprafeței (F_2)

$$a\tau\omega_1 + b\omega_2 = 0$$

$$a\tau(bC - a\tau C)\omega_1 + b(bE - a\tau F)\omega_2 = 0 \tag{122}$$

pentru ultima putîndu-se folosi și forma

$$(e+i)\triangle\tau + \tau(\triangle e - \triangle i) = 0 \tag{123}$$

Unei rețele conjugate cu ambele congruențe asociate de tip parabolic i se asociază congruența dreptelor F_1F_2, determinate de cele două focare unice ale axului și razei.

S-a văzut că planul tangent la (F_2) conține punctul F_1 deci dreapta F_1F_2 este tangentă la (F_2).

Suprafața (F_2) *este așadar o pînză focală a congruenței* F_1F_2.

10. Să determinăm rețelele ce aparțin acestei clase pentru care a doua pînză focală a congruenței F_1F_2 coincide cu suprafața (F_1).

Pentru aceasta este necesar și suficient ca planul tangent π_2 să conțină punctul F_2.

$$|\pi_1 F_2| = [\alpha_1 - \sigma\alpha_2, \tau A_1 + A_2] = (\sigma - \tau)[A_0A_1A_2A_3] = 0$$

adică

$$\sigma = \tau. \tag{124}$$

Din (110) rezultă

$$f = bg,\ h = aj$$

adică A_0 descrie o rețea R.

Rețele căutate aparțin deci clasei de rețele R.

P a n t a z i a arătat [6] că rețelele R admit proprietatea caracteristică conform căreia cele două congruențe asociate formează o pereche stratificabilă.

În studiul citat [2], F i n i k o v a stabilit că dacă una din congruențele unei perechi stratificabile este de tip parabolic și cealaltă congruență a perechii este tot de tip parabolic, pînzele focale ale acestor congruențe fiind suprafețe R_0, adică suprafețe proiectiv deformabile pentru care curbele rețelei conjugate de deformare proiectivă coincid cu una din familiile de linii asimptotice. Dreptele congruenței parabolice corespunzătoare-numită congruență R_0 — sînt tangentele acestor linii asimptotice.

Dacă una din congruențele asociate unei rețele R este de tip parabolic și cealaltă congruență este de aceiași natură.

În cazul pe care îl studiem, dacă suprafețele (F_1), (F_2) nu sînt riglate, atunci ele sînt suprafețe R_0.

Liniile asimptotice ale suprafețelor (F_1), (F_2), ale căror tangente formează congruențele asociate ale rețelei (A_0) — după cum s-a arătat — sînt curbele reprezentate de ecuațiile.

$$\omega_1 - \sigma\omega_2 = 0,\quad a\sigma\omega_1 + b\omega_2 + 0 \tag{125}$$

Ecuația globală a acestor două familii.

$$a\sigma\omega_1^2 + (b - a\sigma^2)\omega_1\omega_2 - b\sigma\omega_2^2 = 0 \tag{126}$$

comparată cu ecuația liniilor asimptotice ale suprafeței (A_0).

$$a\omega_1^2 + b\omega_2^2 = 0$$

arată că, într-un punct A_0, tangentele la curbele (125) formează un sistem armonic cu tangentele asimptotice în punctul cosiderat.

Curbele suprafeței (A_0), care corespund acelor linii asimptotice ale suprafețelor (F_1), (F_2) ale căror tangente formează congruențele asociate ale rețelei (A_0), formează o rețea conjugată pe (A_0).

Această proprietate este caracteristică rețelelor studiate în sensul că dacă cele două curbe focale ale congruențelor parabolice asociate formează o rețea conjugată, congruența F_1F_2 admite suprafața (F_1) ca a doua pînză focală.

Din relațiile (121) și (123) urmează că, în cazul (124), celelalte două familii de linii asimptotice ale suprafețelor (F_1), (F_2) își corespund. *Pinzele focale ale congruenței F_1F_2 sint in corespondență semi-asimptotică.*

III. In baza relației (124), sistemul (112) admite consecința diferențială.

$$\Delta\tau = \Delta\sigma$$

adică

$$\frac{e+i}{\sigma}\left\{\left(2C + 2E - \frac{2a\sigma}{b}D + \frac{2F}{\sigma}\right)\omega_1 - (2D + 2F - \frac{2b}{a\sigma}E + 2\sigma C)\,\omega_2\right\} = 0$$

deci, în ipoteza $\sigma \neq 0$,

(127)
$$\begin{aligned} b(\sigma C + F) + \sigma(bE - a\sigma D) &= 0 \\ a\sigma(\sigma C + F) - (bE - a\sigma D) &= 0 \end{aligned}$$

Pentru rezolvarea acestui sistem, liniar și omogen în

$$\sigma C + F,\ bE - a\sigma D$$

trebuie să deosebim două cazuri.

I. $a\sigma^2 + b \neq 0.$

Această condiție exprimă că asimptotica.

$$\omega_1 - \sigma\omega_2 = 0$$

a pînzei focale (F_1) nu este și asimptotică a suprafeței (A_0). În această ipoteză, sistemul (127) admite soluția.

(128) $$\sigma C + F = 0,\ bE - a\,\sigma\,D = 0$$

de unde:

(129) $$F = -\sigma\,C,\ D = bG,\ E = a\,\sigma\,G$$

G fiind o auxiliară.

Introducînd în (112) și diferențiind exterior obținem sistemul:

(130)
$$\begin{aligned} &[\Delta A\omega_1] - \frac{2a(e+i)}{\sigma}(a\sigma^2 + b)\,[\omega_1\omega_2] = 0 \\ &[\Delta B\omega_2] - \frac{2b(e+i)}{\sigma}(a\sigma^2 + b)\,[\omega_1\omega_2] = 0 \\ &[\Delta C\omega_1] + b\,[\Delta G\omega_2] = 0 \\ &a\,[\Delta G\omega_1] - [\Delta C\omega_2] - \frac{1}{e+i}(C^2 + abG^2)\,[\omega_1\omega_2] = 0 \\ &[\Delta C\omega_1] + b\,[\Delta G\omega_2] - \sigma\{a\,[\Delta G\omega_1] - [\Delta C\omega_2]\} - \\ &\qquad - \frac{\sigma}{e+i}(C^2 + abG^2)\,[\omega_1\omega_2] = 0. \end{aligned}$$

Ultimile trei ecuații ale acestui sistem dau condiția

(131) $$C^2 + abG^2 = 0$$

din care, prin diferențiere obișnuită, rezultă

$$2C\,\Delta C + 2ab\,\Delta G + bAG^2\,\omega_1 + abG^2\,\omega_2 = 0$$

deci

(132) $$\Delta G = -\frac{C}{abG}\Delta C - \frac{AG}{2a}\omega_1 - \frac{BG}{2b}\omega_2.$$

Introducînd această formă în ecuațiile sistemului (130) avem

(133)
$$\left|\begin{aligned} &2aG\,[\Delta C\omega_1] - 2C\,[\Delta C\omega_2] + \frac{AC^2}{a}[\omega_1\omega_2] = 0 \\ &2C\,[\Delta C\omega_1] + 2bG\,[\Delta C\omega_2] + \frac{BC^2}{b}[\omega_1\omega_2] = 0 \end{aligned}\right.$$

Punind

$$\Delta C = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2$$

coeficienții α, β sînt determinați de sistemul

(134)
$$\begin{aligned} 2\,\alpha\,C + 2a\,\beta\,G - \frac{AC^2}{a} &= 0 \\ 2\,\alpha\,bG - 2\,\beta\,C + \frac{BC^2}{b} &= 0 \end{aligned}$$

care, ținînd seama de (131), dă condiția de compatibilitate

(135) $$C^2(b^2AG + aBC) = 0$$

a) Dacă luăm

(136) $$C = 0$$

sistemul (112) se reduce la

(137)
$$\begin{aligned} \Delta a = A\,\omega_1,\ \Delta b = B\omega_2 \\ \Delta e = \Delta i = \Delta\sigma = 0 \end{aligned}$$

și este în involuție cu $s_1 = 2$.

Rețelele, care corespund acestei soluții, sînt rețele R ale căror curbe aparțin, prin tangentelor lor, unor complexe liniare (rețele R de tip Wilczinski).

In adevăr, complexul liniar fix

$$\Upsilon = x\,[A_0A_1] + y\,[A_0A_2] + z\,[A_0A_3] + u\,[A_1A_2] + v\,[A_1A_3] + \varpi\,[A_2A_3]$$

conține tangenta A_0A_1 dacă

$$[\Upsilon,\ [A_0A_1]] = \varpi\,[A_0A_1A_2A_3] = 0$$

deci, dacă

$$\varpi = 0$$

Folosind cunoscutele condiții de fixitate ale unui complex liniar raportat la un reper mobil [5,(72)] găsim, prin diferențiere obișnuită și ținînd seamă de (137):

$$x = e, y = \frac{e+i}{2\sigma}, v = -1, z = u = w = 0.$$

Tangentele curbelor familiei

$$\omega_2 = 0$$

aparțin complexului liniar fix

(138) $\quad \gamma_1 = 2e\,\sigma[A_0A_1] + (e+i)\,[A_0A_2] - 2\sigma\,[A_1A_3]$

Cealaltă familie de curbe a rețelei aparține complexului liniar

(139) $\quad \gamma_2 = (e+i)\,\sigma\,[A_0A_1] + 2i\,[A_0A_2] + 2\,[A_2A_3].$

Variațiile coordonatelor sînt, în cazul pe care îl studiem

(140)
$$dF_1 = \omega_{33} F_1 + \frac{e+i}{\sigma}(\omega_1 - \sigma\omega_2) F_2$$
$$dF_2 = \omega_{22} F_2 + \frac{a\sigma\omega_1 + b\omega_2}{2} F_1$$

deci:

(141) $\quad d[F_1F_2] = (\omega_{22} + \omega_{33})\,[F_1F_2]$

dreapta F_1F_2 este fixă în spațiu.

Congruențele asociate rețelei sînt congruențe parabolice singulare formate din drepte ce întîlnesc o dreaptă fixă.

Dreapta F_1F_2 este și axa complexului liniar special unic pe care îl conține fascicolul de complexe liniare determinat de complexele γ_1, γ_2.

Axul A_0A_3 și raza A_1A_2 aparțin unei aceleiași congruențe liniare, care — după proprietatea caracteristică a rețelelor R — este stratificabilă în ea însăși ([7] și [8]).

b) Luînd

$$C \neq 0, \; b^2AG + aBC = 0$$

și observînd că, pentru a nu obține rețelele găsite anterior, sistemul

(142) $\quad C^2 + abG^2 = 0, \; b^2AD + aBC = 0$

trebuie să admită o soluție diferită de soluția

$$C = D = 0,$$

obținem relația de condiție

(143) $\quad b^3A^2 + a^3B^2 = 0$

care caracterizează suprafețele riglate [4, p. 51, ec. (55)].

Se știe că rețelele R situate pe o riglată depind de 2 funcțiuni arbitrare de un argument și singurele riglate care admit rețele R, sînt riglatele cu flecnodale rectilinii. Pe aceste suprafețe există o infinitate de rețele R

ce depinde de o funcțiune arbitrară de un argument, iar asimptoticele curbilinii ale acestor riglate aparțin unor complexe liniare.

Transformatele Laplace ale acestor rețele sînt tot rețele R situate pe suprafețe riglate și generatoarele acestor riglate sînt în corespondență.

Folosind reperul R asociat unei riglate [4, p. 64, ec. (1)] se observă că, în cazul unei rețele R, avem

(144) $\quad f = -a\lambda^2 g, \; h = aj, \; b = -a\lambda^2$

Condițiile ca cele două congruențe asociate să fie parabolice se reduc la una singură

(145) $\quad (e+i)^2 + 4gj = 0$

Diferențiind obișnuit și ținînd seamă de ecuațiile (19) din [4, p. 64] găsim

(146) $\quad [(e+i)\,m - 2gn]\left(\lambda - \frac{e+i}{2g}\right) = 0$

În ipoteza

(147) $\quad 2\lambda g \neq e + i$

avem

(148) $\quad n = \frac{e+i}{2g}\, m$

deci

(149) $\quad \Delta n = \frac{e+i}{2g}\,\Delta m - \frac{m^2}{2g}\left(\lambda + \frac{e+i}{2g}\right)(\omega_1 + \lambda\omega_2).$

Sistemul exterior (23) din [4] se reduce la o singură ecuație

(150) $\quad [\Delta m, \; \omega_1 + \lambda\omega_2] - \frac{\lambda m A}{2a}\,[\omega_1\omega_2] = 0$

deci rețelele R situate pe riglate și avînd congruențele asociate de tip parabolic depind de o funcțiune arbitrară de un argument.

Și deoarece riglatele cu flecnodale rectilinii — pe care sînt situate astfel de rețele R — depind de o funcțiune arbitrară de un argument, urmează că rețelele R cu congruențe asociate parabolice de pe aceste suprafețe depind de constante arbitrare.

Dacă satisfacem relația (146) luînd

(151) $\quad 2\lambda g = e + i$

prin diferențiere obișnuită obținem relația unică

(152) $\quad 3\lambda m - n = \frac{\lambda g A}{a}$

de unde

(153) $\quad \Delta n = 3\lambda\Delta m - \frac{5\lambda m A}{2a}\,\omega_1 - \lambda^2\left(\frac{5mA}{2a} - \frac{gA^2}{2a}\right)\omega_2.$

Sistemul exterior se reduce la o singură ecuație de forma (150). Rețeaua (A_0) este o rețea R care este și de clasa Terracini-Pantazi deoarece din relațiile

$$(e+i)^2 + 4gj = 0, \quad e + i = 2\lambda g$$

rezultă

$$\lambda^2 g + j = 0$$

și această condiție exprimă coincidența curbei focale a axului

$$(e+i)\,\omega_1 - 2\lambda^2 g\omega_2 = 0$$

cu curba focală a razei

$$2g\omega_1 - (e+i)\,\omega_2 = 0$$

Fiindcă pentru rețelele de acest tip avem

$$\sigma = \frac{e+i}{2g} = \lambda$$

asimptoticele focalelor (F_1), (F_2), ale căror tangente sînt dreptele celor două congruențe asociate parabolice, sînt date, respectiv, de

$$(F_1) \qquad \omega_1 - \sigma\omega_2 = \omega_1 - \lambda\omega_2 = 0$$

$$(F_2) \qquad a\sigma\omega_1 + b\omega_2 = a\lambda\,(\omega_1 - \lambda\omega_2) = 0$$

deci cele două suprafețe sînt în corespondență asimptotică.

Celelalte două familii de asimptotice ale acestor suprafețe, care corespund curbelor

$$(154) \qquad (e+i)\,\Delta\lambda + \lambda\,(\Delta e - \Delta i) = 0$$

corespund generatoarelor rectilinii ale suprafeței (A_0)

$$\omega_1 + \lambda\omega_2 = 0$$

deoarece, din

$$\Delta e = -\lambda m\,(\omega_1 + \lambda\omega_2), \quad \Delta i = n\,(\omega_1 + \lambda\omega_2)$$

$$\Delta\lambda = -\frac{\lambda A}{2a}(\omega_1 + \lambda\omega_2)$$

rezultă că ecuația (154) devine, dacă se ține seama de (152)

$$a\lambda m\,(\omega_1 + \lambda\omega_2) = 0.$$

Aceste rezultate sînt mai bine precizate de următoarea teoremă.

În cazul rețelor R, care sînt situate pe suprafețe riglate și au congruențe asociate de tip parabolic, *suprafețele focale unice ale acestor congruențe sînt confundate.*

Fie

$$F_1 = (e-i)\,A_0 + 2A_3, \quad F_2 = (e+i)\,A_1 + 2g\,A_2$$

focarele unice ale axului și razei rețelei și

$$(155) \qquad \begin{aligned} dF_1 &= \omega_{33}\,F_1 - \frac{m}{2g}[(e+i) + 2\lambda g]\,(\omega_1 + \lambda\omega_2)\,A_0 + \\ &\quad + \frac{1}{2g}[2g\omega_1 - (e+i)\,\omega_2]\,F_2 \\ dF_2 &= \frac{a}{2}[(e+i)\,\omega_1 - 2a\lambda^2 g\omega_2]\,F_1 - (\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{33})\,F_2 + \\ &\quad + (\omega_1 + \lambda\omega_2)\left\{\frac{m}{2g}[(e+i) - 2\lambda g]\,A_1 + 2mA_2\right\} \end{aligned}$$

variațiile coordonatelor lor.

Ecuația (121) comună asimptoticelor focarelor (F_1), (F_2), care își corespund, devine — în cazul riglatelor —

$$2g\,\Delta e - (e+i)\,\Delta g = 0$$

sau [4, p. 64, ec. (19)]

$$(e + i + 2\lambda g)\,m\,(\omega_1 + \lambda\omega_2) = 0.$$

Așadar, suprafețele (A_0), (F_1), (F_2) sînt în corespondență semi-asimptotică, corespondență făcîndu-se după generatoarele suprafeței (A_0).

Dacă punctul A_0 se deplasează pe generatoarea rectilinie a riglatei (A_0), din (155) rezultă că atît F_1 cît și F_2 se deplasează pe dreapta F_1F_2.

Această dreaptă este o tangentă comună a suprafețelor (F_1), (F_2).

Dar, în deplasarea considerată a lui A_0, această dreaptă rămîne fixă deoarece din

$$\begin{aligned} d\,[F_1F_2] &= (2\omega_{33} + \omega_{11} - \omega_{00})\,[F_1F_2] \\ &\quad - \frac{m}{2g}[(e+i) + 2\lambda g]\,(\omega_1 + \lambda\omega_2)\,[A_0F_2] + \\ &\quad + (\omega_1 + \lambda\omega_2)\left[\frac{m}{2g}(e+i) - 2\lambda g]\,A_1 + 2mA_2,\; F_2\right] \end{aligned}$$

pentru

$$\omega_1 + \lambda\omega_2 = 0$$

rezultă

$$d\,[F_1F_2] = (2\omega_{33} + \omega_{11} - \omega_{00})\,[F_1F_2].$$

Fiind și tangentă asimptotică pentru ambele suprafețe urmează că suprafețele (F_1), (F_2) formează o singură suprafață riglată, ale cărei generatoare rectilinii sînt dreptele $F_1\,F_2$.

Această riglată nu este o desfășurabilă deoarece planele tangente în F_1, F_2.

$$\pi_1 = 2g\,\alpha_1 - (e+i)\,\alpha_2, \quad \pi_2 = (e-i)\,\alpha_3 - 2\,\alpha_0$$

sînt distincte.

II. $a\sigma^2 + b = 0$

Curbele

(F_1) $$\omega_1 - \sigma\omega_2 = 0$$

(F_2) $$a\sigma\omega_1 + b\omega_2 = 0,$$

care corespund asimptoticelor ale căror tangente formează congruențele asociate parabolice, coincid în acest caz amîndouă cu o aceeași familie de asimptotice:

$$a\omega_1^2 + b\omega_2^2 = 0$$

ale suprafeței (A_0).

Suprafețele (A_0), (F_1), (F_2) sînt în corespondență semi-asimptotică, iar relațiile (110) și (124) devin

$$f = h = bg = aj .$$

Rețelele problemei au toți invarianții Laplace, atît cei punctuali cît și cei tangențiali, egali.

Sînt rețele R care sînt în același timp și de tip Terracini-Pantazi. În [9] Pantazi a arătat că aceste rețele sînt formate din:

1°) rețele R de tip Wilczinski ale căror transformate Laplace descriu linii drepte și care depind de două funcțiuni arbitrare de un argument. În acest caz toți invarianții Laplace sînt nuli, curbele rețelei sînt și curbe conice și curbe plane, suprafețele (A_0) sînt suprafețele Peterson autoduale.

2°) rețele situate pe riglatele cu flecnodale rectilinii, care depind de o funcțiune arbitrară de un argument.

3°) rețele care depind de constante arbitrare.

Primele două tipuri au fost întîlnite cînd am examinat cazul I al problemei.

Exemple din al treilea tip au fost prezentate în [4].

12. Unei suprafețe (A_0), care are o rețea conjugată cu ambele congruențe asociate de tip parabolic, i se asociază, în general, două suprafețe (F_1), (F_2), pînzele focale unice ale celor două congruențe.

O astfel de rețea conjugată mijlocește deci o transformare de suprafețe. Să vedem dacă există rețele conjugate aparținînd acestei clase pentru care transformarea menționată să păstreze rețeaua conjugată de bază. Adică, dacă A_0 descrie această rețea conjugată, transformatele lui, punctele focale F_1, F_2 să descrie, pe suprafețele respective tot rețele conjugate.

Ecuațiile liniilor asimptotice ale suprafețelor (F_1), (F_2) sînt respectiv:

$$(156)\quad \left\{\begin{aligned} &(F_1)\, (\sigma E + F)\, \omega_1^2 - \sigma \{ \sigma (C + E) + (D + F) \}\, \omega_1\omega_2 + \\ &\qquad + \sigma^2 (\sigma C + D)\, \omega_2^2 = 0 \\ &(F_2)\, a^2\tau^2 (bC - a\tau D)\, \omega_1^2 + ab\tau \{ b (C + E) - a\tau D + F\}\, \omega_1\omega_2 + \\ &\qquad + b^2 (bE - a\tau F)\, \omega_2^2 = 0. \end{aligned}\right.$$

Pentru ca familiile de curbe, situate pe aceste două suprafețe, care corespund curbelor rețelei de bază, să formeze, pe fiecare din suprafețe,

rețele conjugate, este necesar și suficient să existe relațiile

$$(157)\quad \left\{\begin{aligned} &\sigma(C + E) + (D + F) = 0 \\ &b(C + E) - a\tau\, (D + F) = 0 \end{aligned}\right.$$

Să presupunem, mai întîi, că asimptoticele, ale căror tangente formează congruențele A_0A_3, A_1A_2, nu își corespund, adică

$$(158)\quad a\sigma\tau + b \neq 0.$$

În acest caz sistemul (157) admite soluția

$$(159)\quad C + E = 0,\ D + F = 0$$

și sistemul (112) devine

$$(160)\quad \left\{\begin{aligned} &\Delta a = A\omega_1,\ \Delta b = E\omega_2 \\ &\Delta e = C\omega_1 + D\omega_2,\ \Delta i = -C\omega_1 - D\omega_2 \\ &\Delta\sigma = \frac{2\sigma}{e+i}\left(\frac{D}{\sigma}\,\omega_1 + \sigma C\omega_2\right) \\ &\Delta\tau = -\frac{2\tau}{e+i}\left(\frac{a\tau}{b}\, D\omega_1 + \frac{b}{a\tau}\, C\omega_2\right) \end{aligned}\right.$$

și are o primă consecință în ecuația

$$(161)\quad d(e+i) + (e+i)\,(\omega_{00} - \omega_{33}) = 0$$

care, diferențiată exterior, dă relația

$$(162)\quad f - h - bg + aj = 0$$

ce caracterizează rețelele izoterm-conjugate [4, p. 93, ec. (61)].

Ținînd seamă de (110) relația (162) devine

$$(163)\quad \frac{e+i}{2\sigma\tau}(\sigma - \tau)(b - a\sigma\tau) = 0.$$

Luînd

$$\sigma = \tau$$

regăsim cazul rețelelor R cu congruențe asociate parabolice.

Iar dacă satisfacem condiția (163) luînd

$$b - a\sigma\tau = 0$$

atunci ultimile două ecuații ale sistemului (160) se scriu

$$(164)\quad \left\{\begin{aligned} &\Delta\sigma = \frac{2\sigma}{e+i}\left(\frac{D}{\sigma}\,\omega_1 + \sigma C\omega_2\right) \\ &\Delta\tau = -\frac{2\tau}{e+i}\left(\frac{D}{\sigma}\,\omega_1 + \sigma C\omega_2\right) \end{aligned}\right.$$

și au drept consecință ecuația

$$\tau\Delta\sigma + \sigma\Delta\tau = 0$$

adică

$$\frac{d(\sigma\tau)}{\sigma\tau} + \omega_{11} - \omega_{22} = 0. \tag{165}$$

Prin diferențiere exterioară a acestei ecuații găsim condiția

$$f + h - aj - bg = 0 \tag{166}$$

ce se scrie

$$\frac{e+i}{2\sigma\tau}(a\sigma\tau + b)(\sigma - \tau) = 0 \tag{167}$$

și care, în ipoteză (158), este satisfăcută tot de relația

$$\sigma = \tau.$$

Ipoteza că asimptoticele

$$\omega_1 - \sigma\omega_2 = 0, \quad a\tau\omega_1 + b\omega_2 = 0$$

își corespund, deci că există relația

$$a\sigma\tau + b = 0 \tag{168}$$

conduce tot la cazul rețelelor R.

În adevăr, în acest caz, sistemul (157) se reduce la o singură ecuație, de ex.

$$\sigma(C + E) + (D + F) = 0 \tag{169}$$

care se satisface punînd

$$E = \mu - C, \quad F = -\sigma\mu - D \tag{170}$$

μ fiind un coeficient auxiliar.

Ultimele două ecuații ale sistemului (112) se scriu

$$\left\{\begin{aligned} \Delta\sigma &= \frac{1}{e+i}(2D + \sigma\mu)\,\omega_1 - \frac{\sigma^2}{e+i}(2C - \mu)\,\omega_2 \\ \Delta\tau &= \frac{\tau}{\sigma(e+i)}(2D + \sigma\mu)\,\omega_1 - \frac{\sigma\tau}{e+i}(2C - \mu)\,\omega_2 \end{aligned}\right. \tag{171}$$

și dau ecuația achivalentă

$$\tau\Delta\sigma - \sigma\Delta\tau = 0$$

sau

$$\frac{d\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)}{\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)} + \omega_{11} - \omega_{22} = 0 \tag{172}$$

din care, prin diferențiere exterioară, obținem condiția

$$\sigma = \tau.$$

Deci singurele rețele care răspund problemei puse sînt acele rețele cu congruențe asociate parabolice care sînt și rețele R, caz care a fost tratat anterior.

Bineînțeles că trebuie să fie considerate numai acele rețele ale căror suprafețele focale (F_1), (F_2) sînt suprafețe propriu zise care nu sînt desfășurabile.

Sînt soluții ale problemei acele rețele R cu congruențe asociate de tip parabolic situate pe suprafețe riglate și care sînt fie numai rețele R fie rețele R ce — în același timp — sînt și de tip T e r r a c i n i-P a n t a z i.

Cele două suprafețe (F_1), (F_2), transformatele suprafeței (A_0), sînt confundate, dar punctele F_1, F_2 descriu pe această suprafață rețele conjugate distincte, cînd A_0 descrie rețeaua conjugată de bază.

BIBLIOGRAFIE:

1. *Darboux, G.* Leçons sur la théorie des surfaces. T. II. p. 13, 1915.
2. *Finikov, S.* Sur les congruences stratifiables paraboliques. Math. Zeitschrift Bd. 36, 1923, p. 344—357.
3. *Bahvalov, S.* Sur un couple de congruences paraboliques. Docladî Akad. Nauk S.S.S.R. N. s. 21, 1938, p. 415—417.
4. *Mihăilescu, T.* Sur les réseaux conjugués à transformés de Laplace en corespondence asymptotique, Bulletin de l'Ecole Polytechnique de Bucarest, XI, 1—3, 1939—1940, p. 40—139.
5. *Mihăilescu, T.* Sur les réseaux co jugués à surfaces associées coïncidantes. Bull. Math. Soc. Roum. Sci. T. 46, (1—2, 1944, p. 43—75.
6. *Pantazi, Al.* Sur une propriété caractéristique des réseaux R. Bull. Ac. Roum. Sect. Sci. XVII. 1935, p. 173—175.
7. *Finikov, S.* Sur les suites de Laplace contenant des congruences de Wilczinski. C.R. Ac. Sci. Paris, T. 189, p. 517.
8. *Pantazi, Al.* Sur les couples de congruences stratibiables appartenant à des complexes linéaires. Bull. Math. Soc. Roum. Sci. T. 38 (1), 1936, p. 53—66.
9. *Pantazi, Al.* Sur certains réseaux de M. Terracini. C.R. Ac. Sci. Paris, T. 202, 1936, p. 550—551.
10. *Blank, J.* Über geradlinigen Flächen mit einem konjugierten Netz ebener Kegellinien. Communications de la Société mathématique de Kharkov et de l'Institut des Sciences Mathématiques de l'Ukraine, série 4, t. V. 1932, p. 15—24.
11. *Slotnick, M.* On the projective differential geometry of conjugate nets. American Journal of Mathematics. 53, 1931, p. 143—152.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Сопряжённые сети с объединившимися конгруенциями параболического типа

Т. МИХАИЛЕСКУ

Ставится вопрос определения сопряжённых сетей, для которых одна или обе объединившихся конгруенций: о с е в а я к о н г р у е н ц и я (составленная из прямых пересечений, соприкасающихся плоскостей кривых сетей) и р а д и а л ь н а я к о н г р у е н ц и я (составленная из прямых, определённых двумя превращёнными Лапласа) параболического типа.

Кроме некоторых элементарных случаев (сети которых кривые, плоские или конические кривые, следовательно, расположенные на поверхностях Петерсона) устанавливается, что на произвольной поверхности обыкновенного проекционного пространства существует бесконечность сопряжённых сетей, кривые которых ни плоские, ни конические, и для которых одна из объединившихся конгруенций парабогическая.

Эти сети зависят от двух произвольных функций с одним аргументом и асимптоты единственной фокусной поверхности не могут соответствовать кривым сети.

Соответствие, установленное сетями этого класса между точками произвольной поверхности одной параболической конгруенции, объединившейся с такого рода сетью, позволяет реализацию превращения, которая устанавливает из одной сопряжённой сети новую сопряжённую сеть.

Сети, которые принадлежат этому классу, зависят от шести произвольных функций с одним аргументом и превращённые Лапласа находятся в асимтотическом соответствии.

Единственная фокусная поверхность радиальной конгруенции представляет одну из двух фокусных поверхностей конгруенции, составленной из прямых, определённых двумя единственными фокусами оси и радиуса.

Определяются сети, которые принадлежат этому классу, и для которых вторая фокусная поверхность последней конгруенции смешивается с единственной поверхностью осевой конгруенции. Эти сети принадлежат известному классу сетей R.

RÉSUMÉ

Réseaux conjugués à congruences associées paraboliques

par

T. MIHAILESCU

On se propose de déterminer les réseaux conjugués dont l'une ou les deux congruences associées: *axiale* (formée par les droites d'intersection des plans osculateurs aux courbes du réseau) et *radiale* (formée par les droites déterminées par les deux transformés de Laplace d'un point) sont paraboliques.

En dehors de quelques cas élémentaires (des réseaux dont les courbes sont planes ou coniques, donc situés sur des surfaces de *Peterson*), l'A. trouve que sur une surface arbitraire de l'espace projectif ordinaire il existe une infinité de réseaux conjugués dont les courbes ne sont pas planes ou coniques et dont l'une des congruences associées est parabolique.

Ces réseaux dépendent de deux fonctions arbitraires d'un argument, et les asymptotiques de la nappe focale unique de la congruence associée parabolique ne peuvent pas correspondre aux courbes du réseau.

La correspondance établie par les réseaux de cette classe entre les points d'une surface arbitraire et les points de la nappe focale unique

d'une congruence parabolique associée à un tel réseau permet de réaliser une transformation qui déduit d'un réseau conjugué un nouveau réseau conjugué.

Les réseaux qui appartiennent à cette classe dépendent de sept fonctions arbitraires d'un argument.

Les réseaux conjugués dont les deux congruences associées sont paraboliques dépendent de six fonctions arbitraires d'un argument et leurs transformés de Laplace sont en correspondance asymptotique.

La nappe focale unique de la congruence radiale est une des deux nappes focales de la congruence formée par les droites déterminées par les foyers uniques du *rayon* et de *l'axe*.

On détermine les réseaux appartenant à cette classe et dont les deuxième nappe focale de cette dernière congruence se confond avec la nappe unique de l'axe, réseaux qui sont compris dans la classe bien connue des réseaux R.