DETERMINAREA UNEI SOLUȚII A ECUAȚIEI $\sum_{j=1}^{N} x_j^2 = N \prod_{j=1}^{N} x_j$ PENTRU ORICE ÎNTREG $N > 2$, x_j FIIND NUMERE ÎNTREGI PRIME DOUĂ CÎTE DOUĂ

DE

SCHÖNHEIM IOAN

Comunicare prezentată în ședința din 22 octombrie 1955 a Filialei Cluj a Academiei R.P.R.

1. Vom arăta întîi că:
Șirul $a^1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ definit de formula de recurență

$$a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} + k \tag{1}$$

unde a_1 și k sînt numere prime între ele, este compus din numere două cîte două prime.

Demonstrație:

Fie a_γ primul termen din șirul definit de formula de recurență (1) divizibil prin numărul prim p și $\mu > \gamma$
a_μ nu poate fi divizibil prin p, căci ipoteza

$$a_\gamma \equiv a_\mu \equiv 0 \pmod{p} \tag{2}$$

conduce la o contradicție.

Într-adevăr, dacă $\gamma > 1$, putem scrie

$$a_\gamma = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{\gamma-1} + k$$
$$a_\mu = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{\mu-1} + k$$

și din ipoteza (2) ar urma

$$a_1 \cdot a_2 \quad a_3 \cdot \ldots \cdot a_{\gamma-1} \equiv a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{\mu-1} \pmod{p}$$

ceea ce este imposibil, căci membrul stîng nu este divizibil prin p, iar membrul drept conținînd ca factor pe a_γ este divizibil cu p. Dacă însă

$\nu = 1$, ipoteza

$$a_1 \equiv a_\mu \equiv 0 \pmod{p}$$

conduce la congruența

$$a_1 \equiv a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{\mu-1} + k \pmod{p}$$

și rezultă

$$k \equiv 0 \pmod{p}$$

contrar presupunerii că a_1 și k sînt prime între ele.

2. Vom demonstra acum că:

Formula de recurență (1) este echivalentă cu formula de recurență

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1}^2 - k a_{n-1} + k & n > 2 \quad (3a) \\ a_2 = a_1 + k & (3b) \end{cases}$$

Cu alte cuvinte, alegînd a_1 și k arbitrar, formula (1) și formulele (3) definesc aceleași numere a_i.

De fapt, pentru $n > 2$ din (1) rezultă (3a), iar pentru $n = 2$ (1) coincide cu (3b) căci (1) se mai scrie

$$a_n^1 a - k = a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}$$

și

$$a_{n-1} - k = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \quad a_{n-2}$$

deci

$$a_n - k = (a_{n-1} - k)\, a_{n-1}$$

și rezultă formula (3a). Pentru $n = 2$ afirmația este evidentă.

Dar și invers: din formulele (3a) și (3b) rezultă formula (1). Căci pentru $n > 2$ (3a) se mai scrie

$$a_n - k = (a_{n-1} - k)\, a_{n-1}. \quad (4)$$

Scriind relația (4) pentru $n = 3, 4, \ldots, n$ și înmulțind între ele egalitățile obținute membru cu membru, ajungem la relația

$$a_n - k = a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdot \ldots \cdot a_3 \cdot a_2 \cdot (a_2 - k)$$

și ținînd seamă de formula (3b), regăsim formula (1).

3. Folosind formulele de recurență (1) și (3), care definesc, cum am văzut, același șir de numere prime două cîte două, vom determina acum o soluție ecuației în numere întregi cu N necunoscute

$$\sum_{j=1}^{N} x_j^2 = N \prod_{j=1}^{N} x_j \quad (5)$$

pentru orice $N > 2$; cele N valori găsite pentru necunoscutele, fiind prime două cîte două.

Cu aceasta am determinat implicit:

N numere prime două cîte două, astfel ca suma patratelor lor este divizibilă cu fiecare din aceste N numere.

Pentru a ajunge la acest rezultat putem alege $k = -1$ și însumîn egalitățile pe care le obținem din formulele (3) prin înlocuirea succesivă al lui n prin numerele 2, 3, ..., m găsim

$$a_m = \sum_{i=2}^{m-1} a_i^2 + a_1 - m + 1$$

Această valoare trebuind să coincidă cu valoarea dată de formula (1) putem scrie

$$\sum_{i=2}^{m-1} a_i^2 + a_1 - m + 1 = \prod_{i=1}^{m-1} a_i - 1$$

Deci pentru orice a_1

$$\sum_{i=2}^{m-1} a_i^2 = \prod_{i=1}^{m-1} a_i - a_1 + m - 2$$

alegînd

$$a_1 = m - 2$$

$$\sum_{i=2}^{m-1} a_i^2 = \prod_{i=1}^{m-1} a_i = a_1 \prod_{i=2}^{m-1} a_i = (m-2) \prod_{i=2}^{m-1} a_i$$

Prin urmare numerele a_n, $n > 2$ definite de formula de recurență (1) sau (3) satisfac ecuația

$$\sum_{i=2}^{m-1} a_i^2 = (m-2) \prod_{i=2}^{m-1} a_i \quad (6)$$

Pentru a găsi o soluție ecuației (5) e destul să punem

$$x_j = a_{j+1} \quad (7)$$

numerele a_j calculîndu-se din formulele (1) sau (3). Atunci, cum am văzut la punctul 1. numerele x_j vor fi prime două cîte două.

4. Exemple.

x, y, z fiind numere întregi prime între ele două cîte două, să se determine o soluție pentru ecuația

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$$

aci N = 3. Și

$$x = x_1 = a_2 = a_1 + k = N - 1 = 2$$
$$y = x_2 = a_3 = a_1 \cdot a_2 + k = 5$$
$$z = x_3 = a_4 = a_1 \cdot a_2 \quad a_3 + k = 29$$

Ecuația

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 4xyzt$$

admite soluția

$$x = 3$$
$$y = 11$$
$$z = 131$$
$$t = 17291$$

5. Observație în legătură cu numerele lui Fermat. Autorii P o l y a și S z e g ö dau o nouă demonstrație faptului că există o infinitate de numere prime, invocînd existența numerelor lui Fermat:

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

care sînt prime două cîte două. Ori, numerele F_n sînt numai un caz particular. Formula (1) ne permite de a construi o infinitate de șiruri de numere fiecare avînd termeni numere prime două cîte două. Obținem numerele lui Fermat punînd $a_1 = 3$, $k = 2$.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Определение решения уравнения

$$\sum_{j=1}^{N} x_j^2 = N \prod_{j=1}^{N} x_j$$

для всякого целого числа $N > 2$, где x_j попарно простые числа

И. ШЁНХЕЙМ

1. Указано что формула рекуррентности (1), в которой a_1 и k взаимно простые числа, определяет попарно простые числа.

2. Формула рекуррентности (1) эквивалентна с формулами (3a) и (3b).

3. Для разрешения предложенного уравнения берётся $k = -1$ и сравнивается a_m, полученное в виде произведения из формулы (1) с a_m, полученное как сумма квадратов из (3a) и (3b). Затем выбирается $a_1 = m - 2$ и получается отношение (6), которое показывает, что (7) есть искомое решение,

4. Этот результат иллюстрируется примерами.

5. Ряд, определённый формулой (1), обобщает демонстрацию авторов П о л и я и С э г ё относительно существования бесконечности простых чисел. так как взяв $k=2$, $a_1=3$, формула (1) определяет числа Фермата.

RÉSUMÉ

Détermination d'une solution de l'équation

$$\sum_{j=1}^{N} x_j^2 = N \prod_{j=1}^{N} x_j$$

pour un entier $N>2$ quelconque, x_j étant des nombres premiers deux à deux

par

I. SCHÖNHEIM

1. Il est démontré que la formule de recurence (1) où a_1 et k sont premiers entre eux, définit des nombres premiers deux à deux.

2. La formule (1) est équivalente avec les formules (3a) et (3b).

3. Pour résoudre l'équation proposée, on pose $k = -1$ et on compare la valeur de a_m exprimée par un produit tiré de (1) avec la même valeur a_m exprimée par une somme de carrés tirée de (3a) et (3b). On met ensuite $a = m - 2$ et on obtient la relation (6) qui démontre que (7) est la solution cherchée.

4. Ce résultat est exemplifié.

5. La suite définie par (1) généralise la démonstration des auteurs Pólya et Szegö, concernant l'existence d'un nombre infini de nombres premiers, car mettant $k=2$, $a_1=3$, on obtient les nombres de Fermat.