

## ASUPRA FORMULEI DE INTERPOLARE A LUI HERMITE ȘI A UNOR APLICAȚII ALE ACESTEIA\*

DE

D. D. STANCU

1. Ch. Hermite [1] a formulat următoarea problemă generală de interpolare :

Să se construiască un polinom, de grad minim, care împreună cu derivatele sale succesive — pînă inclusiv la anumite ordine  $r_1-1, \dots, r_s-1$ , să ia pe punctele distincte

$$x_1, x_2, \dots, x_s \quad (1)$$

valori date dinainte.

Se știe<sup>1</sup> că acest polinom există și că e unic, iar gradul său este  $n$ , unde  $n=r_1+\dots+r_s-1$ .

Să notăm acest polinom cu  $H_n(x)$  și să presupunem că valorile date dinainte sînt valorile luate, pe punctele  $x_1, x_2, \dots, x_s$ , de o funcție  $f(x)$  și derivatele ei. Atunci polinomul de interpolare al lui Hermite relativ la funcția  $f(x)$  și punctele (1), cărora li se atașează respectiv ordinele de multiplicitate  $r_1, r_2, \dots, r_s$ ,

$$H_n(x) = H_n(\underbrace{x_1, \dots, x_1}_{r_1}, \underbrace{x_2, \dots, x_2}_{r_2}, \dots, \underbrace{x_s, \dots, x_s}_{r_s}; f|x) \quad (2)$$

va fi polinomul care verifică condițiile

$$H_n^{(l)}(x_k) = f_n^{(l)}(x_k) \quad \left( \begin{matrix} l=0,1,\dots,r_k-1 \\ k=1,2,\dots,s \end{matrix} \right) \quad (3)$$

2. Dacă

$$H_n(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j, \quad (4)$$

\* Prezentată în ședința de comunicări din 1.XII.1956 a Filialei Cluj a Societății de matematică și fizică.

<sup>1</sup> Vezi de exemplu: I. P. Natanson [2]



condițiile precedente ne conduc la sistemul de  $n+1$  ecuații cu  $n+1$  necunoscute:  $a_0, a_1, \dots, a_n$

$$\sum_{j=i}^n j(j-1)\dots(j-l+1) a_j x_k^{j-l} = f^{(l)}(x_k) \quad (5)$$

$$(l=0, 1, \dots, r_k-1; k=1, 2, \dots, s).$$

Determinantul acestui sistem — se știe — e diferit de zero, căci punctele (1) sînt distincte.

Pentru a găsi expresia polinomului  $H_n(x)$  am putea elimina necunoscutele  $a_0, a_1, \dots, a_n$  între ecuațiile (4) și (5). Calea aceasta e însă foarte anevoioasă. G. Z e m p l e n [3] a încercat totuși pe această cale să găsească expresia explicită a polinomului  $H_n(x)$ . Menționăm însă că rezultatele pe care le-a obținut acest autor sînt inexacte; formula pe care a dat-o nu corespunde soluției problemei dacă  $s \geq 2$  și numerele  $r_i$  sînt mai mari decît 2. Bineînțeles că și rezultatele pe care le-a dat în partea a doua a lucrării sale, relative la descompunerea unei funcții raționale în fracții simple, sînt de asemenea eronate. În recenzia făcută de W e l t z i e n Z e h l e n d o r f [4] și în memoriul lui E. N e t t o din [5], în care se amintește de această lucrare, nu s-au făcut observații asupra rezultatelor obținute de G. Zemplen.

3. Din eliminarea amintită mai sus a necunoscutelor  $a_0, a_1, \dots, a_n$  și din rezolvarea formală în raport cu  $H_n(x)$  a ecuației care s-a obținut, ne putem da seama că polinomul căutat este de forma

$$H_n(x) = \sum_{i=1}^s \sum_{k=0}^{r_i-1} l_{i,k}(x) f^{(k)}(x_i), \quad (6)$$

unde  $l_{i,k}(x)$  sînt polinoame de grad  $n$ . Din calculul formal de mai sus se observă imediat că polinoamele  $l_{i,k}(x)$  sînt independente de  $f(x)$  și că, ținînd seama de (3), ele trebuie să verifice următoarele condiții:

$$l_{i,k}^{(p)}(x_j) = 0 \quad (j \neq i; p=0, 1, \dots, r_j-1) \quad (7)$$

$$l_{i,k}^{(p)}(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } p \neq k \\ 1, & \text{pentru } p = k \end{cases} \quad (p=0, 1, \dots, r_i-1). \quad (8)$$

Aceste condiții ne vor determina complet polinoamele fundamentale de interpolare  $l_{i,k}(x)$ . Intr-adevăr, în baza lui (7) se observă că  $l_{i,k}(x)$  conține ca factor produsul

$$g_i(x) = (x-x_1)^{r_1} \dots (x-x_{i-1})^{r_{i-1}} (x-x_{i+1})^{r_{i+1}} \dots (x-x_s)^{r_s}. \quad (9)$$

Ținînd seama și de condițiile (8), se ajunge la concluzia că  $(x-x_i)^k$  este de asemenea un factor al lui  $l_{i,k}(x)$ . Rezultă că acesta este de forma

$$l_{i,k}(x) = g_i(x) (x-x_i)^k h_{i,k}(x), \quad (10)$$

unde  $h_{i,k}(x)$  este un polinom de gradul  $r_i-k-1$ . Rămîne să determinăm acest ultim polinom. Dacă îl dezvoltăm după formula lui Taylor în vecinătatea lui  $x=x_i$ , se obține

$$h_{i,k}(x) = \sum_{m=0}^{r_i-k-1} \frac{(x-x_i)^m}{m!} h_{i,k}^{(m)}(x_i). \quad (11)$$

Din (10) avem

$$(x-x_i)^k h_{i,k}(x) = l_{i,k}(x) \frac{1}{g_i(x)}.$$

Dacă se calculează, după formula lui Leibniz, derivata de ordinul  $q$  a ambilor membri ai acestei egalități, se obține

$$\sum_{j=0}^q \binom{q}{j} [(x-x_i)^k]^{(q-j)} h_{i,k}^{(j)}(x) = \sum_{j=0}^q \binom{q}{j} l_{i,k}^{(q-j)}(x) \left( \frac{1}{g_i(x)} \right)^{(j)}$$

Dacă se ia  $q=k+m$ , se face  $x=x_i$  și se ține seama de (7) și (8), se obțin relațiile

$$k! h_{i,k}^{(m)}(x_i) = \left( \frac{1}{g_i(x)} \right)_{x=x_i}^{(m)}$$

$$(m=0, 1, \dots, r_i-k-1).$$

În felul acesta se ajunge la următoarele expresii pentru polinoamele fundamentale de interpolare

$$l_{i,k}(x) = \sum_{r=0}^{r_i-k-1} \left[ \frac{(x-x_i)^r}{r!} \left( \frac{1}{g_i(x)} \right)_{x_i}^{(r)} \right] g_i(x), \quad (12)$$

iar polinomul (6) devine

$$H_n(x) = \sum_{i=1}^s \sum_{k=0}^{r_i-1} \sum_{r=0}^{r_i-k-2} \frac{(x-x_i)^k}{k!} \left[ \frac{(x-x_i)^r}{r!} \left( \frac{1}{g_i(x)} \right)_{x_i}^{(r)} \right] g_i(x) f^{(k)}(x_i). \quad (13)$$

La această expresie a polinomului  $H_n(x)$  a ajuns, pe o cale puțin deosebită, V. L. G o n c i a r o v [6].

4. Dacă se calculează derivata de ordinul  $j$ , în punctul  $x_i$ , a lui  $\frac{1}{g_i(x)}$ , se obține

$$\left( \frac{1}{g_i(x)} \right)_{x_i}^{(j)} = (-1)^j \sum \frac{j!}{\alpha_1! \dots \alpha_s!} \times \\ \times \frac{r_1(r_1+1) \dots (r_1+\alpha_1-1) \dots / \dots r_s(r_s+1) \dots (r_s+\alpha_s-1)}{(x_i-x_1)^{r_1+\alpha_1} \dots / \dots (x_i-x_s)^{r_s+\alpha_s}},$$

liniuța indicînd absența factorilor cu toți indicii  $i$ . Aici suma se extinde la toate sistemele de întregi nenegativi care verifică relația

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{i-1} + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_s = j.$$



Ținând seama de aceasta, polinomul fundamental de interpolare  $l_{i,k}(x)$  se poate pune sub forma

$$l_{i,k}(x) = \frac{g_i(x)}{g_i(x_i)} \left\{ \frac{(x-x_i)^k}{k!} \sum_{j=0}^{r_i-k-1} (x-x_i)^j \times \right. \\ \left. \times \sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_{i-1}+\alpha_{i+1}+\dots+\alpha_s=j} \frac{(r_1+\alpha_1-1) \dots (r_s+\alpha_s-1)}{(x_1-x_i)^{\alpha_1} \dots (x_s-x_i)^{\alpha_s}} \right\} \quad (14)$$

În felul acesta am ajuns la expresia definitivă a polinomului de interpolare (2) al lui Hermite

$$H_n(x) = \sum_{i=1}^s \frac{g_i(x)}{g_i(x_i)} \left\{ \sum_{k=0}^{r_i-1} \frac{(x-x_i)^k}{k!} \left[ \sum_{j=0}^{r_i-k-1} A_{\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_s}^{(j)} (x-x_i)^j \right] f^{(k)}(x_i) \right\} \quad (15)$$

unde

$$A_{\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_s}^{(j)} = \sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_{i-1}+\alpha_{i+1}+\dots+\alpha_s=j} \frac{(r_1+\alpha_1-1) \dots (r_s+\alpha_s-1)}{(x_1-x_i)^{\alpha_1} \dots (x_s-x_i)^{\alpha_s}}. \quad (16)$$

5. Dacă se consideră formula de interpolare a lui Hermite

$$f(x) = H_n(x) + R_{n+1}(x), \quad (17)$$

restul  $R_{n+1}(x)$  are, după cum se știe, expresia

$$R_{n+1}(x) = (x-x_1)^{r_1} \dots (x-x_s)^{r_s} [x, \underbrace{x_1, \dots, x_1}_{r_1}, \underbrace{x_2, \dots, x_2}_{r_2}, \dots, \underbrace{x_s, \dots, x_s}_{r_s}; f],$$

unde

$$[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m+1}; f]$$

este diferența divizată de ordinul  $m$  a funcției  $f(x)$  pe punctele  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m+1}$ .

În ipoteza că  $f(x)$  are derivată de ordinul  $n+1$  în intervalul cel mai mic care conține valorile  $x_1, \dots, x_s, x$ , restul se poate exprima, după cum se cunoaște, prin formula

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-x_1)^{r_1} (x-x_2)^{r_2} \dots (x-x_s)^{r_s}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad (18)$$

unde  $\xi$  aparține celui mai mic interval care conține valorile  $x_i$  și  $x$ .

6. *Exemplu.* Să se găsească polinomul de interpolare de grad minim relativ la funcția  $f(x)$  și la nodurile  $x_1=x_2=x_3=-1$ ,  $x_4=0$ ,  $x_5=x_6=x_7=1$ .

Pe baza formulei precedente găsim

$$H_6(x) = H_6(-1, -1, -1, 0, 1, 1, 1; f|x) = (1-x^2)^3 f(0) + \\ + x(x-1)^3 \left[ \frac{1}{8} + \frac{5(x+1)}{16} + \frac{(x+1)^2}{2} \right] f(-1) + x(x-1)^3 (x+1) \left[ \frac{1}{8} + \frac{5(x+1)}{16} \right] f'(-1) + \\ + \frac{x(x-1)^3 (x+1)^2}{16} f''(-1) + x(x+1)^3 \left[ \frac{1}{8} - \frac{5}{16}(x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} \right] f(1) + \\ + x(x+1)^3 (x-1) \left[ \frac{1}{8} - \frac{5(x-1)}{16} \right] f'(1) + \frac{x(x+1)^3 (x-1)^2}{16} f''(1). \quad (19)$$

7. *Cazuri particulare.*

1°. Dacă  $r_1=r_2=\dots=r_s=1$ , (15) se reduce la polinomul de interpolare al lui Lagrange

$$H_{s-1}(x) = \sum_{i=1}^s \frac{g_i(x)}{g_i(x_i)} f(x_i).$$

2°. Dacă  $r_1=r_2=\dots=r_s=2$ , din (13) obținem

$$H_{2s-1}(x) = \sum_{i=1}^s \frac{g_i(x)}{g_i(x_i)} \left[ 1 - (x-x_i) \frac{g_i'(x_i)}{g_i(x_i)} \right] f(x_i) + \sum_{i=1}^s (x-x_i) \frac{g_i(x)}{g_i(x_i)} f'(x_i),$$

iar din (14) rezultă

$$H_{2s-1}(x) = \sum_{i=1}^s \frac{g_i(x)}{g_i(x_i)} (x-x_i) \left[ \frac{1}{x-x_i} + \frac{1}{x_1-x_i} + \dots + \frac{1}{x_s-x_i} \right] + \\ + \sum_{i=1}^s \frac{g_i(x)}{g_i(x_i)} (x-x_i) f'(x_i).$$

Această formulă a fost găsită și de A. Markoff [7].

3°. În cazul  $r_1=r_2=\dots=r_s=3$ , avem

$$H_{3s-1}(x) = \sum_{i=1}^s [l_{i,0}(x) f(x_i) + l_{i,1}(x) f'(x_i) + l_{i,2}(x) f''(x_i)],$$

unde

$$l_{i,0}(x) = \frac{g_i(x)}{g_i'(x_i)} \left[ 1 - (x-x_i) \frac{g_i'(x_i)}{g_i(x_i)} - (x-x_i)^2 \frac{g_i''(x_i) g_i(x_i) - 2g_i'^2(x_i)}{2g_i^2(x_i)} \right]$$



$$l_{i,1}(x) = (x-x_i) \frac{g_i(x)}{g_i(x_i)} \left[ 1 - (x-x_i) \frac{g_i'(x_i)}{g_i(x_i)} \right]$$

$$l_{i,2}(x) = \frac{(x-x_i)^2 g_i(x)}{2 g_i(x_i)}$$

8. Să considerăm cazul particular  $s=2$  și să notăm  $x_1=a$ ,  $x_2=b$ ,  $r_1=m$ ,  $r_2=n$ . Formula de interpolare (15) se reduce în acest caz la

$$H_{m+n-1}(x) = H_{m+n-1}(\underbrace{a, \dots, a}_m, \underbrace{b, \dots, b}_n; f|x) =$$

$$= \left( \frac{x-b}{a-b} \right)^n \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(x-a)^k}{k!} \left[ \sum_{i=0}^{m-k-1} \binom{n+i-1}{i} \left( \frac{x-a}{b-a} \right)^i \right] f^{(k)}(a) +$$

$$+ \left( \frac{x-a}{b-a} \right)^m \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(x-b)^r}{r!} \left[ \sum_{j=0}^{n-r-1} \binom{m+j-1}{j} \left( \frac{x-b}{a-b} \right)^j \right] f^{(r)}(b). \quad (20)$$

În formula de interpolare corespunzătoare

$$f(x) = H_{m+n-1}(x) + R_{m+n}(x), \quad (21)$$

restul are expresia

$$R_{m+n}(x) = (x-a)^m (x-b)^n [x, a, \dots, a, b, \dots, b; f] =$$

$$= \frac{(x-a)^m (x-b)^n}{(m+n)!} f^{(m+n)}(\xi), \quad (a < \xi < b)$$

în ipoteza bineînțeleasă că în intervalul  $(a, b)$  funcția  $f(x)$  are derivată de ordinul  $m+n$ .

9. În cazul  $s=3$ , (15) se reduce la

$$H_{r_1+r_2+r_3-1}(x) = H_{r_1+r_2+r_3-1}(\underbrace{x_1, \dots, x_1}_{r_1}, \underbrace{x_2, \dots, x_2}_{r_2}, \underbrace{x_3, \dots, x_3}_{r_3}; f|x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{r_1-1} l_{1,k}(x) f^{(k)}(x_1) + \sum_{k=0}^{r_2-1} l_{2,k}(x) f^{(k)}(x_2) + \sum_{k=0}^{r_3-1} l_{3,k}(x) f^{(k)}(x_3),$$

unde

$$l_{1,k}(x) = \left( \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \right)^{r_2} \left( \frac{x-x_3}{x_1-x_3} \right)^{r_3} \times$$

$$\times \left[ \frac{(x-x_1)^k}{k!} \sum_{\alpha=0}^{r_1-k-1} \left( \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \right)^\alpha \left[ \sum_{j=0}^{\alpha} \binom{r_2+\alpha-j-1}{r_2-1} \binom{r_3+j-1}{j} \left( \frac{x_1-x_2}{x_1-x_3} \right)^j \right] \right],$$

iar  $l_{2,k}(x)$ ,  $l_{3,k}(x)$  se obțin de aici prin permutări circulare ale indicilor 1, 2, 3.

10. O importantă aplicație a formulei de interpolare (15) este aceea referitoare la descompunerea unei funcții raționale în fracții simple, în cazul general cînd numitorul funcției raționale are rădăcini multiple. De altfel există o echivalență între aceste două probleme, după cum se poate vedea ușor.

Să presupunem că se dă funcția rațională

$$R(x) = \frac{f(x)}{\omega(x)},$$

unde

$$\omega(x) = \prod_{p=1}^s (x-x_p)^{r_p} = g_1(x) (x-x_i)^{r_i}, \quad (22)$$

iar  $f(x)$  este un polinom de grad  $m < n$  (caz care interesează totdeauna), unde am notat ca și înainte  $n=r_1+r_2+\dots+r_s-1$ .

Se știe că  $R(x)$  se poate reprezenta în mod unic sub forma

$$R(x) = \sum_{i=1}^s \sum_{p=0}^{r_i-1} \frac{A_{ip}}{(x-x_i)^{r_i-p}}, \quad (23)$$

unde  $A_{ip}$  sînt constante.

Dacă se scrie polinomul de interpolare relativ la polinomul  $f(x)$  și la nodurile  $x_1, x_2, \dots, x_s$  — de ordine de multiplicitate egale respectiv cu  $r_1, r_2, \dots, r_s$  — se obține polinomul  $H_n(x)$  de la (13) sau (15). Avînd în vedere că  $f(x)$  e un polinom de grad  $m < n$ , avem

$$H_n(x) \equiv f(x),$$

astfel că vom avea

$$\frac{f(x)}{\omega(x)} \equiv \frac{H_n(x)}{\omega(x)} = \sum_{i=1}^s \sum_{p=0}^{r_i-1} \frac{A_{ip}}{(x-x_i)^{r_i-p}},$$

unde, pe baza formulei (13)

$$A_{ip} = \sum_{k=0}^p \frac{f^{(k)}(x_i)}{k! (p-k)!} \left( \frac{1}{g_i(x)} \right)_{x=x_i}^{(p-k)} = \frac{1}{p!} \left( \frac{f(x)}{g_i(x)} \right)_{x=x_i}^{(p)} \quad (24)$$

$$(\phi=0, 1, \dots, r_i-1; i=1, 2, \dots, s).$$

Astfel avem

$$A_{i0} = \frac{f(x_i)}{g_i(x_i)}, \quad A_{i1} = \frac{f'(x_i)g_i(x) - f(x_i)g_i'(x)}{g_i^2(x_i)} \text{ etc.}$$



Dacă se folosește formula (15), se obțin formulele explicite

$$A_{ip} = \frac{1}{g_i(x_i)} \sum_{k=0}^k \left[ \sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_s=p-k} \frac{\binom{r_1+\alpha_1-1}{\alpha_1} \dots \binom{r_s+\alpha_s-1}{\alpha_s}}{(x_1-x_i)^{\alpha_1} \dots (x_s-x_i)^{\alpha_s}} \right] \frac{f^{(k)}(x_i)}{k!} \quad (25)$$

11. În cazul particular

$$R(x) = \frac{f(x)}{(x-a)^m (x-b)^n} \quad (26)$$

descompunerea în fracții simple este de forma

$$R(x) = \sum_{p=0}^{m-1} \frac{A_p}{(x-a)^p} + \sum_{q=0}^{n-1} \frac{B_q}{(x-b)^q}$$

Pe baza formulelor precedente, avem

$$A_p = \frac{1}{(a-b)^n} \sum_{i=0}^p (-1)^{p-i} \frac{\binom{n+p-i-1}{n-1}}{(a-b)^{p-i}} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}, \quad (27)$$

$$B_q = \frac{1}{(b-a)^m} \sum_{j=0}^q (-1)^{q-j} \frac{\binom{m+q-j-1}{m-1}}{(b-a)^{q-j}} \frac{f^{(j)}(b)}{j!}.$$

12. Să presupunem acum că avem de calculat integrala definită

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

Dacă se folosește formula de interpolare (17), se obține formula de cuadratură

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^s \sum_{k=0}^{r_i-1} A_{i,k} f^{(k)}(x_i) + \rho(f), \quad (28)$$

unde

$$A_{i,k} = \int_a^b l_{i,k}(x) dx,$$

iar

$$\rho(f) = \int_a^b R(x) dx.$$

Formula de cuadratură (28) are în general gradul de exactitate  $n$ , adică restul e nul dacă  $f(x)$  este un polinom de grad cel mult  $n$ . Se poate însă întâmpla ca printr-o alegere convenabilă a nodurilor, gradul de exactitate să fie mai înalt.

*Exemple.* 1°. Alegînd nodurile  $x_1=x_2=x_3=-1$ ,  $x_4=0$ ,  $x_5=x_6=x_7=1$  și scriind formula de interpolare corespunzătoare, avem

$$f(x) = H_6(x) + R_7(x),$$

unde  $H_6(x)$  e polinomul de interpolare (19) iar

$$R_7(x) = x(x^2-1)^3 [x, -1, -1, -1, 0, 1, 1, 1; f].$$

Integrînd de la  $-1$  la  $+1$ , se ajunge la formula de cuadratură de grad de exactitate 7:

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx = \frac{1}{105} [57f(-1) + 12f'(-1) + f''(-1) + 96(0) + f''(1) - 12f'(1) + 57f(1)] + \rho(f). \quad (29)$$

Pentru restul  $\rho(f)$  s-a stabilit expresia

$$\rho(f) = \frac{-1}{396900} f^{(8)}(\xi), \quad -1 < \xi < +1.$$

2°. Dacă se folosesc nodurile  $x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=0$  și  $-x_6=x_7=\sqrt{\frac{7}{8}}$ , se scrie formula de interpolare corespunzătoare a lui Hermite, se înmulțește cu  $\phi(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$  și se integrează de la  $-1$  la  $+1$ , se obține formula de cuadratură de grad de exactitate 9

$$\int_{-1}^{+1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{65856} \left\{ 35136 f(0) + 3024 f''(0) + 49 f^{(IV)}(0) + 15360 \left[ f\left(-\sqrt{\frac{7}{8}}\right) + f\left(\sqrt{\frac{7}{8}}\right) \right] \right\} + \frac{\pi}{530841600} f^{(10)}(\xi). \quad (29')$$

*Observație.* La formulele de cuadratură (cu rest) de la (29) și (29') s-a ajuns dublînd în primul caz nodul  $x=0$ , iar în al doilea caz dublînd nodurile  $x_6$  și  $x_7$  și luînd pe  $x=0$  multiplu de ordinul 6.

13. Să vedem ce devine formula de cuadratură (28) în cazul particular de la nr. 8. Ne vom folosi de polinomul de interpolare (20).

Folosind formula de integrare prin părți generalizată, după efectuarea sistematică a calculelor se obține

$$\int_a^b H_{m+n=1}(x) dx = n \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(b-a)^{k+1}}{(k+2)!} \left[ \sum_{i=0}^{m-k-1} \frac{\binom{k+i}{i}}{\binom{n+k+i+1}{n+i-1}} \right] f^{(k)}(a) + m \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(a-b)^k}{(r+2)!} \left[ \sum_{j=0}^{n-r-1} \frac{\binom{r+j}{j}}{\binom{m+r+j+1}{r+2}} \right] f^{(j)}(b).$$



Pentru a obține o expresie mai simplă a coeficienților acestei formule, ne vom folosi de identitatea

$$\frac{n}{k+3} \sum_{i=0}^{m-k-1} \frac{\binom{k+i}{i}}{\binom{n+k+i+1}{k+2}} = \frac{\binom{m}{k+1}}{\binom{m+n}{k+1}},$$

care se demonstrează fără greutate.

În felul acesta se ajunge la formula de cuadratură de grad de exactitate  $m+n-1$ :

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(b-a)^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{\binom{m}{k+1}}{\binom{m+n}{k+1}} f^{(k)}(a) - \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(a-b)^{r+1}}{(r+1)!} \cdot \frac{\binom{n}{r+1}}{\binom{m+n}{r+1}} f^{(r)}(b) + \rho_{m+n}(f), \quad (30)$$

unde

$$\rho_{m+n}(f) = \int_a^b (x-a)^m (x-b)^n [x, a, \dots, a, b, \dots, b; f] dx$$

sau

$$\rho_{m+n}(f) = \frac{(-1)^n (b-a)^{m+n+1}}{(m+n+1)! \binom{m+n}{n}} f^{(m+n)}(\xi), \quad a < \xi < b. \quad (31)$$

Făcînd  $m=n$ , aceasta se reduce la formula

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(b-a)^{k+1}}{(k+1)!} \frac{\binom{m}{k+1}}{\binom{2m}{k+1}} [f^{(k)}(a) + (-1)^k f^{(k)}(b)] + \rho_{2m}(f), \quad (32)$$

unde

$$\rho_{2m}(f) = (-1)^n \frac{(b-a)^{2m+1}}{(2m+1)! \binom{2m}{m}} f^{(2m)}(\xi).$$

Formulele (20) și (32) se datoresc<sup>2</sup> lui Hermite [1]. El le-a dedus cu o metodă deosebită, fără să folosească formula de interpolare (20), pe care a renunțat să o stabilească căci i se părea că ar fi prea complicată.

Aceste formule au fost recent generalizate, într-un anumit sens, de către prof. D. V. Ionescu [12].

<sup>2</sup> Formulele (30) și (32) se găsesc într-un celebru memoriu al lui Hermite [1].

14. Folosind formula de interpolare (15), se pot construi de asemenea și formule pentru calculul numeric al derivatelor de diferite ordine ale unei funcții  $f(x)$  într-un punct  $x_0$ .

Acum ne vom ocupa de un caz concret care ni se pare important. Anume, ne vom folosi de formula de interpolare (20) pentru a stabili formule pentru calculul derivatelor  $f'(a)$ ,  $f''(a)$ , ...,  $f^{(m+p)}$ , unde  $p$  e un număr natural mai mic ca  $n$ .

Pentru aceasta, vom căuta să calculăm

$$\frac{d^{m+p}}{dx^{m+p}} H_{m+n-1}(x) \Big|_{x=a} \quad (33)$$

Avînd în vedere formula (20), coeficientul lui  $f^{(k)}(a)$  din (33) se găsește că este

$$\sum_{i=0}^{m-k-1} \frac{(-1)^i}{(a-b)^{n+i}} \cdot \frac{1}{k!} \binom{n+i-1}{i} \frac{d^{m+p}}{dx^{m+p}} [(x-b)^n (x-a)^{k+i}]. \quad (34)$$

Întrucît pe baza formulei lui Leibniz se găsește că

$$[(x-b)^n (x-a)^k]_{x=a}^{(m+p)} =$$

$$= n(n-1) \dots (n-m-p+k+1) k! \binom{m+p}{k} (a-b)^{n-m-p+k},$$

expresia (34) se poate scrie

$$\frac{(m+p)!}{k! (a-b)^{m+p-k}} \sum_{i=0}^{m-k-1} (-1)^i \binom{n+i-1}{i} \binom{n}{m+p-k-i}.$$

Dacă ne folosim de identitatea

$$\sum_{\alpha=0}^k (-1)^\alpha \binom{p+\alpha}{\alpha} \binom{p+1}{j-\alpha} = (-1)^k \binom{j-1}{k} \binom{p+1+k}{j},$$

care se demonstrează ușor, se găsește în definitiv pentru coeficientul lui  $f^{(k)}(a)$  din (33) următoarea expresie

$$(-1)^{p+1} \frac{(m+p)!}{k! (b-a)^{m+p-k}} \binom{m+p-k-1}{p} \binom{m+n-k-1}{n-p-1}. \quad (35)$$

15. Să căutăm acum coeficientul lui  $f^{(r)}(b)$  din (34).

Acesta este

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(b-a)^m} \cdot \frac{1}{r!} \sum_{j=0}^{n-r-1} \binom{m+j-1}{j} \frac{1}{(b-a)^j} [(x-a)^m (x-b)^{r+j}]_{x=a}^{(m+p)} = \\ & = (-1)^{r-p} \frac{(m+p)!}{r!} \frac{1}{(b-a)^{m+p-r}} \sum_{j=0}^{n-r-1} \binom{r+j}{p} \binom{m+j-1}{j}. \end{aligned} \quad (36)$$



Să ne ocupăm apoi cu evaluarea sumei

$$C_r = \sum_{j=0}^{n-r-1} \binom{m-1+j}{j} \binom{r+j}{p}. \quad (37)$$

Aici unii termeni de la început sînt nuli, căci în dezvoltarea după formula lui Leibniz, de care ne-am folosit mai sus, trebuie presupus  $r+j \geq p$ , astfel că  $C_r$  se reduce la

$$C_r = \sum_{j=p-r}^{n-r-1} \binom{m-1+j}{j} \binom{r+j}{r-p+j}. \quad (38)$$

Acesta se poate pune și sub forma

$$C_r = \sum_{i=0}^{n-p-1} \binom{m+p-r-1+i}{p-r+i} \binom{p+i}{i}, \quad (39)$$

sau

$$C_r = \binom{m+p-r-1}{m-1} \sum_{i=0}^{n-p-1} \binom{p+i}{i} \frac{\binom{m+p-r+i}{i}}{\binom{p-r+i}{i}}. \quad (40)$$

Aplicînd formula

$$\binom{a}{b} = \sum_{j=0}^l \binom{l}{j} \binom{a-l}{b-j},$$

obținem

$$\binom{p+i}{i} = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \binom{p+i-r}{i-j}.$$

Cu aceasta

$$\begin{aligned} C_r &= \sum_{i=0}^{n-p-1} \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \binom{p+i-r}{i-j} \binom{m+p-r-1+i}{p-r+i} = \\ &= \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \sum_{i=j}^{n-p-1} \binom{p+i-r}{i-j} \binom{m+p-r-1+i}{p-r+i}, \end{aligned}$$

în baza obișnuitei convenții ca  $\binom{m}{n}$  să fie nul dacă  $m$  sau  $n$  ar fi negativi.

Notînd

$$\beta = i-j, \quad m = p+j-r, \quad n = m+p+j-r-1$$

avem

$$C_r = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \sum_{\beta=0}^{n-p-j-1} \binom{m+\beta}{\beta} \binom{n+\beta}{m+\beta}.$$

Aplicînd identitatea

$$\sum_{p=0}^k \binom{m+\beta}{\beta} \binom{n+\beta}{m+\beta} = \binom{n+k+1}{k} \binom{n}{m}$$

obținem în definitiv

$$C_r = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \binom{m+n-r-1}{n-p-j-1} \binom{m+p+j-r-1}{p+j-r} \quad (41)$$

De exemplu, pentru  $k=0, 1, 2$  avem

$$C_0 = \binom{m+p-1}{m-1} \binom{m+n-1}{m+p},$$

$$C_1 = \binom{m+n-2}{m+p-1} \binom{m+p-2}{m-1} + \binom{m+n-2}{m+p} \binom{m+p-1}{m-1},$$

$$C_2 = \binom{m+n-3}{n-p-1} \binom{m+p-3}{p-2} + 2 \binom{m+n-3}{n-p-2} \binom{m+p-2}{p-1} + \binom{m+n-3}{n-p-3} \binom{m+p-1}{p}$$

16. Ținînd seama de (35), (36), (37), (41), se vede că am putut construi următoarea formulă de derivare numerică de grad de exactitate  $m+n-1$

$$f^{(m+p)}(a) = \sum_{k=0}^{m-1} A_k f^{(k)}(a) + \sum_{r=0}^{n-1} B_r f^{(r)}(b) + \rho(f), \quad (42)$$

unde

$$A_k = (-1)^{p+1} \frac{(m+p)!}{k!(b-a)^{m+p-k}} \binom{m+p-k-1}{p} \binom{n+m-k-1}{n-p-1} \quad (43)$$

iar

$$B_r = (-1)^{r+p} \frac{(m+p)!}{r!(b-a)^{m+p-r}} C_r \quad (44)$$

și

$$C_r = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \binom{m+n-r-1}{n-p-j-1} \binom{m+p+j-r-1}{p+j-r}, \quad (45)$$

sau cu  $C_r$  dat de (38), (39) sau (40).

Pentru restul acestei formule s-a obținut expresia

$$\rho(f) = \frac{(m+p)!}{(m+n)!} \binom{n}{p} (a-b)^{n-p} f^{(m+n)}(\xi), \quad a < \xi < b. \quad (46)$$



17. Cazuri particulare ale formulei de derivare numerică (42) :

1°.  $m=n=2, p=1$  :

$$f'''(a) = \frac{12}{(b-a)^3} [f(a) - f(b)] + \frac{6}{(b-a)^2} [f'(a) + f'(b)] + \frac{a-b}{2} f^{(4)}(\xi).$$

2°.  $m=3, n=4, p=0$  :

$$f'''(a) = \frac{120}{(b-a)^3} [f(b) - f(a)] - \frac{60}{(b-a)^2} [f'(b) + f'(a)] + \frac{12}{b-a} [f''(b) - f''(a)] - f'''(b) + \frac{(b-a)^4}{840} f^{(7)}(\xi).$$

3°.  $m=3, n=4, p=1$  :

$$f^{(IV)}(a) = \frac{1080}{(b-a)^4} f(a) + \frac{480}{(b-a)^3} f'(a) + \frac{72}{(b-a)^2} f''(a) - \frac{1080}{(b-a)^4} f(b) + \frac{600}{(b-a)^3} f'(b) - \frac{132}{(b-a)^2} f''(b) + \frac{12}{b-a} f'''(b) - \frac{2(b-a)^3}{105} f^{(7)}(\xi).$$

4°.  $m=3, n=4, p=2$  :

$$f^{(V)}(a) = \frac{-4320}{(b-a)^5} f(a) - \frac{1800}{(b-a)^4} f'(a) - \frac{240}{(b-a)^3} f''(a) + \frac{4320}{(b-a)^5} f(b) - \frac{2520}{(b-a)^4} f'(b) + \frac{600}{(b-a)^3} f''(b) - \frac{60}{(b-a)^2} f'''(b) + \frac{1}{7} (b-a)^2 f^{(7)}(\xi).$$

5°.  $m=3, n=4, p=3$  :

$$f^{(VI)}(a) = \frac{7200}{(b-a)^6} f(a) + \frac{2880}{(b-a)^5} f'(a) + \frac{360}{(b-a)^4} f''(a) - \frac{7200}{(b-a)^6} f(b) + \frac{4320}{(b-a)^5} f'(b) - \frac{1080}{(b-a)^4} f''(b) + \frac{120}{(b-a)^3} f'''(b) - \frac{4(b-a)}{7} f^{(7)}(\xi).$$

6°.  $m=1, n=6, p=0$  :

$$f'(a) = \frac{6}{b-a} [f(b) - f(a)] - 5f'(b) + 2(b-a)f''(b) - \frac{1}{2} f'''(b) + \frac{1}{12} (b-a)^3 f^{(IV)}(b) - \frac{1}{120} (b-a)^4 f^{(V)}(b) + \frac{(b-a)^6}{5040} f^{(7)}(\xi).$$

7°.  $m=1, n=6, p=1$  :

$$f''(a) = \frac{30}{(b-a)^2} [f(a) - f(b)] + \frac{30}{b-a} f'(b) - 14f''(b) + 4(b-a)f'''(b) - \frac{3}{4} (b-a)^2 f^{(IV)}(b) + \frac{1}{12} (b-a)^3 f^{(V)}(b) - \frac{(b-a)^5}{420} f^{(7)}(\xi).$$

8°.  $m=1, n=6, p=2$  :

$$f'''(a) = \frac{120}{(b-a)^3} [f(b) - f(a)] - \frac{120}{(b-a)^2} f'(b) + \frac{60}{b-a} f''(b) - 19f'''(b) + 4(b-a)f^{(IV)}(b) - \frac{1}{2} (b-a)^2 f^{(V)}(b) + \frac{(b-a)^4}{56} f^{(7)}(\xi).$$

9°.  $m=1, n=6, p=3$  :

$$f^{(IV)}(a) = \frac{360}{(b-a)^4} [f(a) - f(b)] + \frac{360}{(b-a)^3} f'(b) - \frac{180}{(b-a)^2} f''(b) + \frac{60}{b-a} f'''(b) - 14f^{(IV)}(b) + 2(b-a)f^{(V)}(b) - \frac{2(b-a)^3}{21} f^{(7)}(\xi).$$

10°.  $m=1, n=6, p=4$  :

$$f^{(V)}(a) = \frac{720}{(b-a)^5} [f(b) - f(a)] - \frac{720}{(b-a)^4} f'(b) + \frac{360}{(b-a)^3} f''(b) - \frac{120}{(b-a)^2} f'''(b) + \frac{30}{b-a} f^{(IV)}(b) - 5f^{(V)}(b) + \frac{5(b-a)^2}{14} f^{(7)}(\xi).$$

11°.  $m=1, n=6, p=5$  :

$$f^{(VI)}(a) = \frac{720}{(b-a)^6} [f(a) - f(b)] + \frac{720}{(b-a)^5} f'(b) - \frac{360}{(b-a)^4} f''(b) + \frac{120}{(b-a)^3} f'''(b) - \frac{30}{(b-a)^2} f^{(IV)}(b) + \frac{6}{b-a} f^{(V)}(b) - \frac{6(b-a)}{7} f^{(7)}(\xi).$$

18. Menționăm că primele 22 formule de derivare numerică — construite în mod explicit, ca exemple, de către prof. T. Popoviciu în importantul său memoriu [13] — se pot obține imediat din formula mai generală (42). Mai sus am dat alte formule decât cele care se găsesc în lucrarea amintită.

#### BIBLIOGRAFIE

1. Ch. Hermite, *Sur la formule d'interpolation de Lagrange*. Journ. f. d. reine n. angew. Math., 1878, tom. LXXXIV, p. 70-79.
2. I. P. Natanson, *Konstruktivnaia teoria funkții*. Moscova-Leningrad, 1949, p. 501.
3. Gy. Zemplén, *Étude sur l'interpolation et la décomposition des fonctions rationnelles en fractions partielles*. Archiv der Mathematik und Physik, 1905 (3) 8, p. 214-226.
4. \* \* *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, 1905, vol. XXXV, p. 283-284.
5. E. Netto, *Les fonctions rationnelles*. Encyclopédie des Sci. Math., 1910, tom. I, vol. II, fasc. 2, p. 62.



6. V. L. Gonciarov, *Teoria interpolirovania i približenia funkčii*. Moscova, 1954, p. 66.
7. A. Markoff, *Sur la méthode de Gauss pour le calcul approché des intégrales*. Math. Annalen, 1885, vol. XXV, p. 427.
8. K. Petr, *O jedné formulí pro numerický výpočet učitých integrálu*. Časopis pro pěstování Matematiky a Fysiky, 1915, tom. XLIV, p. 454—455.
9. N. Obreschkoff, *Neue Quadraturformeln*. Abhandl. d. preuss. Akad. d. Wiss., Math.-naturwiss. Kl., 1940, nr. 4, p. 1—20.
10. Ș. E. Mikeladze, *Cislennte metodî matematiceskogo analiza*. Moscova, 1953, p. 394.
11. — *Cislennoe integrirovanie*. Uspeli Mat. Nauk, t. III, fasc. 6, 1948.
12. D. V. Ionescu, *Generalizarea formulei de cuadratură a lui N. Obreschkoff*. Studii și cercet. științ.-Acad. R.P.R. Filiala Cluj, 1952, nr. 3—4, p. 1—9.
13. T. Popoviciu, *Asupra restului în unele formule de derivare numerică*. Studii și cercet. mat. — Acad. R.P.R., tom. III, nr. 1—2, p. 103.

### Об интерполяционной формуле Хермита и о некоторых их применениях

(Краткое содержание)

После того как отмечается тот факт, что явное выражение, данное Г. Земплем [3], для интерполяционного многочлена Хермита [2] неточно при  $s \geq 2$  и  $r > 2$ , устанавливается, несколько более простым путем чем в [6], формула (13); потом дается более явную формулу (15) для интерполяционного многочлена Хермита, удовлетворяющего условиям (3). В (20) дается эффективное выражение для интерполяционного многочлена:

$$H_{m+n-1}(\underbrace{a, \dots, a}_m, \underbrace{b, \dots, b}_n; f | x).$$

В №. 10—11 применяются предыдущие формулы для разложения рациональной функции на простые дроби. Таким образом, для коэффициентов разложения (23) установились формулы (24). В (27) даны эффективные выражения для коэффициентов разложения частной рациональной функции (26).

В №. 12—13 даны некоторые применения к численному интегрированию функций. В качестве примеров, построены в (29) и (29') две квадратурных формулы высокой точности, полученные при подходящем выборе узлов. Воспользовавшись интерполяционной формулой (20), была установлена квадратурная формула (30). В связи с этим замечается, что как формула (30), как и частная формула (32) были даны Хермитом [1].

В (42) установлена формула численного дифференцирования, аналогичная квадратурной формуле (30) Хермита.

В №. 17 даны 11 примеров таких формул.

### Sur la formule d'interpolation d'Hermite et quelques applications de celle-ci

(Résumé)

Après avoir mentionné que l'expression donnée par G. Z e m p l e n [3] pour le polynôme d'interpolation d' H e r m i t e (2) est inexacte si  $s \geq 2$  et si les nombres  $r_i$  sont plus grands que 2, on établit, par une voie plus simple que celle utilisée dans [6], la formule (13); puis on donne une formule plus explicite (15) pour le polynôme d'interpolation d'Hermite qui vérifie les conditions (3). A (20) on donne l'expression effective pour le polynôme d'interpolation  $H_{m+n-1}(\underbrace{a, \dots, a}_m, \underbrace{b, \dots, b}_n; f | x)$ .

Aux nos. 10—11 on applique les formules précédentes à la décomposition d'une fonction rationnelle en fractions simples. Ainsi, pour les coefficients de la décomposition (23) on a établi les formules (24). A (27) on donne les expressions effectives des coefficients de la décomposition de la fonction rationnelle particulière (26).

Aux nos. 12—13 on fait quelques applications à l'intégration numérique des fonctions. A titre d'exemple, on construit à (29) et (29') deux formules de quadrature d'un haut degré d'exactitude obtenues par un choix convenable des noeuds. En utilisant la formule d'interpolation (20) on établit la formule de quadrature (30). Ici on fait la remarque que la formule (30) ainsi que la formule particulière (32) ont été données pour la première fois par Hermite [1].

A (42) on établit une formule de dérivation numérique analogue à la formule de quadrature (30) d'Hermite. Au no. 17 on donne 11 exemples de pareilles formules.