ECUAŢIA PENDULULUI MATEMATIC DE MASĂ VARIABILĂ

DE

PETRU BRADEANU

Comunicare prezentată la Sesiunea Filialei Cluj a Academiei R.P.R. din 18—21 decembrie 1954.

Mecanica corpului de masă variabilă ca o generalizare a mecanicii clasice newtoniene, care a luat naştere prin lucrările savantului rus Meşcerski [1] şi ale lui T. Levi-Civita [2] s-a format şi dezvoltat în secolul nostru pe baza rezultatelor şi indicaţiilor acestora.

Printre lucrările lui Meşcerski — strînsă într-un volum [1] — se găseşte studiată problema pendulului circular de masă variabilă în cazul oscilaţiilor mici, într-un mediu rezistent, a cărui rezistenţă este proporţională cu viteza exceptînd fenomenul de ciocnire. În acest studiu Meşcerski consideră ecuaţia

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{e}\,\theta - \frac{k}{m}\frac{d\theta}{dt}$$

în care notaţiile au semnificaţia cunoscută, K fiind o constantă.

Se studiază pe urmă cazul

$$\frac{k}{m} = \frac{a}{1+\alpha t}$$

a şi α fiind două constante.

În lucrarea ce urmează am căutat să găsesc o ecuaţie mai generală pentru mişcarea pendulului simplu de masă variabilă, să mă ocup cu integrarea ei în supoziţia oscilaţiilor mici, considerînd diverse cazuri particulare ale variaţiei masei în funcţie de timp şi de viteza centrului de greutate al sistemului de particole emise sau captate.

Cercetez: în ce măsură variaţia masei influenţează mişcarea pendulului (aflarea legii de mişcare), cum ecuaţiile primite se reduc la forme mai simple, la ecuaţii intregrabile prin cuadraturi ori ecuaţii Bessel. Încerc că aduc astfel o contribuţie la teoria pendulului, una dintre problemele teoretice foarte mult studiată în mecanica raţională.

I. În spaţiul orientat de triedrul Oxyz se consideră un punct material M de masă m, funcţie de poziţia punctului şi timp adica

$$m = f(x, y, z, t)$$

Această variaţie a masei se datoreşte fie acumulării, fie expulzării de materie în raport cu variabilele respective. Astfel de fenomene mecanice au loc în natură, ca de exemplu: creşterea masei pămîntului sau altor planete prin căderea pe ele a diferitelor corpuri; descreşterea masei unui meteorit, sau a unui aerostat cînd balastul este lăsat să cadă, descreşterea masei rachetei prin arderea combustibilului etc. Există deci variaţii ale masei în intervale de timp sau sub formă continuă. Presupunem că variaţia masei este o funcţie continuă de poziţia punctului, de viteza lui, de timp.

Ecuaţia de mişcare a punctului de masă variabilă este

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{R} + \frac{dm}{dt}\vec{W}_G$$

unde $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ este viteza punctului de vector de poziţie $\vec{r} = \vec{r}\,(t)$ *iar* $\vec{W}_G$, viteza centrului de greutate al particolelor emise sau captate. Ecuaţia mai ia forma

$$\text{(I)} \qquad m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{R} - \frac{dm}{dt}\vec{v} + \frac{dm}{dt}\vec{W}_G$$

sau

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{R} + \frac{dm}{dt}\vec{W}_r$$

unde $\vec{R}$ este rezultanta forţelor date (exterioare) care acţionează asupra punctului iar $\vec{W}_r = \vec{W}_G - \vec{v}$ viteza relativă a centrului de greutate.

II. **Energia cinetică a punctului de masă variabilă** se notează cu T şi se măsoară prin produsul $\frac{1}{2}mv^2$.

Inmulţind scalar ecuaţia de mişcare I_1 cu $\vec{v}dt = d\vec{r}$, obţinem ecuaţia:

$$m\vec{v}\cdot d\vec{v} = \vec{R}\cdot d\vec{r} + \left[\frac{dm}{dt}\left(\vec{W}_G - \vec{v}\right)\right]\cdot d\vec{r}$$

al cărei membru stîng se mai scrie:

$$m\vec{v}d\vec{v} = md\left(\frac{1}{2}\frac{mv^2}{m}\right) = md\left(\frac{T}{m}\right) =$$

$$= \frac{mdT - Tdm}{m^2}\,m = dT - \frac{dm}{m}T$$

astfel încît avem:

$$dT - \frac{dm}{m}\cdot T = \vec{R}\cdot d\vec{r} + \frac{dm}{dt}\left(\vec{W}_G - \vec{v}\right)\cdot d\vec{r}$$

care se mai scrie

$$dT - \frac{dm}{m}T = \vec{R}\cdot d\vec{r} + \frac{dm}{m}\left(m\vec{W}_G - m\vec{v}\right)\frac{d\vec{r}}{dt} =$$

$$= \vec{R}\cdot d\vec{r} + \frac{dm}{m}\left(m\vec{v}\cdot\vec{W}_G - 2\frac{1}{2}mv^2\right)$$

sau

$$\text{(II)} \qquad dT = \vec{R}d\vec{r} + \frac{dm}{m}\left(\vec{H}\vec{W}_G - T\right)$$

unde $\vec{H} = m\vec{v}$. este cantitatea de mişcare.

Am obţinut astfel o formulă care exprimă o teoremă analoagă teoremei energiei unui punct de masă constantă.

Diferenţiala energiei cinetice a punctului de masă variabilă este egală cu lucrul mecanic elementar al rezultantei forţelor date adunat cu raportul diferenţialei masei punctului material către masa sa, înmulţit cu produsul scalar dintre cantitatea de mişcare şi viteza centrului de greutate al particolelor emise — captate, micşorat cu energia cinetică a punctului.

O b s e r v a r e. Dacă în ecuaţiile I_1 şi II_1 se presupune că masa punctului este constantă, adică $dm = 0$, acestea se reduc la ecuaţiile cunoscute din mecanica punctului de masă constantă. Dacă în formula II_1 se face $W_G^{(x)} = 0$ $W_G^{(y)} = 0$, ceea ce înseamnă că masa emisă (captată) este în repaus faţă de sistemul oxyz, obţinem

$$\text{(2)} \qquad dT = \vec{R}\cdot d\vec{r} - \frac{dm}{m}T,$$

Aceasta reprezintă în mod efectiv o ecuaţie diferenţială liniară în raport cu funcţiunea T, dacă $\vec{R}$ şi m sînt funcţiuni date ce pot depinde de timp, de viteză şi de poziţie simultan sau în parte.

CAP. I

Ecuaţia pendulului matematic de masă variabilă în vid

III. Ecuaţia pendulului de masă variabilă în cazul $\vec{W}_G = 0$. Se consideră un pendul matematic ale cărui elemente sînt date în figura alăturată (fig. 1).

Pentru aflarea ecuaţiei de mişcare, presupunînd masa pendulului variabilă, folosim formula II_1, care se mai scrie:

$$\text{(1)} \qquad dT + \frac{dm}{m}T = \vec{F}d\vec{r}$$

sau

$$\text{(2)} \qquad d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) + \frac{v^2}{2}dm = \vec{F}d\vec{r}.$$

Alegem în jos sensul axei O*x*, forţa $\vec{F}$ fiind greutatea pendulului de com-

ponente $X = mg$, $Y = 0$, $Z = 0$ iar $\vec{dr} = \vec{i}dx + \vec{j}dy$.
Avem:

$$v^2 = l^2\dot{\theta}^2$$

care reprezintă viteza liniară în mișcarea circulară Ecuația (2) devine

$$\frac{1}{2} d \left(ml^2\dot{\theta}^2 \right) - \frac{1}{2} l^2\dot{\theta}^2 \, dm = - \, mgl \sin \theta \cdot \dot{\theta} \, dt$$

sau

$$\frac{d}{dt}\left(m\dot{\theta}^2\right) + \dot{\theta}^2 \frac{dm}{dt} + \frac{2g}{l} m \sin \theta \cdot \dot{\theta} = 0.$$

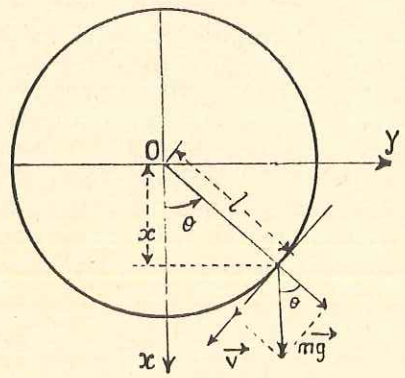

fig. 1

Presupunind $\sin \theta \cong \theta$ (oscilații mici) și efectuind derivatele, ecuația precedentă se scrie:

$$(3) \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{1}{m}\frac{dm}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l}\,\theta = 0$$

care este ecuația pendulului de masă variabilă în cazul $\vec{W}_G = 0$.

Se observă că ecuația (3) se deosebește de forma ecuației pendulului de masă constantă, în condiții identice de mișcare, numai prin adăugarea termenului

$$\frac{1}{m}\frac{dm}{dt}\frac{d\theta}{dt}.$$

Dacă $\frac{1}{m}\frac{dm}{dt}$ = const, prezența termenului de mai sus este echivalentă cu contribuția forței de amortizare ce apare în mișcarea pendulului de masă invariabilă în cazul vitezei mici într-un mediu rezistent sau alte circumstanțe.

Ecuația (3) se deosebește de ecuația lui M e ș c e r s k i prin forma termenului al doilea și prin faptul că deducerea ei s-a făcut în ipoteza de

existență a fenomenului de ciocnire ce are loc în momentul de expulzare sau acumulare de masă.

Dacă $\frac{dm}{dt} = k$ (const.) ecuația (3) este identică ca formă cu ecuația lui M e ș c e r s k i.

În concluzie, ecuația pendulului matematic își păstrează aspectul și dacă masa sa variază. Să aplicăm ecuația (3) obținută la citeva cazuri particulare.

1. Dacă masa pendulului variază după legea:

$$m(t) = m_0 e^{ct}$$

c fiind o constantă pozitivă și prin urmare masa o funcțiune crescătoare de timp, ecuația de mișcare a pendulului va fi:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + c\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l}\,\theta = 0$$

care este echivalentă cu ecuația pendulului de masă constantă într-un mediu rezistent a cărui forță de rezistență este proporțională cu viteza (constanta c fiind rezistența ce amortizează mișcarea caracterizată printr-o viteză egală cu unitatea). Elementele acestei mișcări (elongație, amplitudine, fază, frecvență), definiția, calculul și discuția lor se găsesc în orice tratat de mecanică rațională.

2. Dacă

$$m = m_0(1 - \alpha t)$$

$$\alpha > 0, \; 0 \leqslant t < \frac{1}{\alpha}$$

avem

$$\frac{m'}{m} = -\frac{\alpha}{1 - \alpha t}$$

și ecuația $\mathrm{III}_{(3)}$ devine

$$(4) \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} - \frac{\alpha}{1 - \alpha t}\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l}\,\theta = 0.$$

Facem schimbarea de variabilă

$$1 - \alpha t = \tau$$

și ecuația III_4 devine

$$(4') \qquad \tau\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \frac{d\theta}{d\tau} + \frac{g}{\alpha^2 l}\,\tau\theta = 0$$

sau

$$t\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d\theta}{dt} + \lambda t\theta = 0$$

în care $\lambda = \frac{g}{\alpha^2 l}$, τ s-a înlocuit cu t.

Pentru integrarea ei căutăm o soluție de formă:

$$\theta = C_0 + C_1\, t + C_2\, t^2 + \ldots + C_n t^n + \ldots$$

Scriind că această serie satisface ecuația de mișcare de mai sus, se primește relația de recurență

$$C_{2p} = -\frac{\lambda}{(2p)^2}\, C_{2p-2}.$$

Dacă se face succesiv $p = 1, 2, 3 \ldots, p$ se obțin niște egalități care înmulțite dau formulă de calcul pentru coeficienții c_{2p}:

$$C_{2p} = (-1)^p \frac{\lambda^p}{2^{2p}\,[(p!)]^2}\, C_0$$

așa încît integrala ecuației III_4 este

$$\theta = K \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\lambda^p \left(\frac{t}{2}\right)^{2p}}{(p!)^2} = K \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\, t\right)^{2p}}{(p!)^2}$$

funcția definită de această serie întreagă în raport cu t și cu λ este o funcție Bessel (ecuația III_4 fiind o ecuație Bessel) de speța întîi, ordinul zero și se notează cu $J_0 (\sqrt{\lambda})$ adică

$$J_0\left(\sqrt{\frac{g}{\alpha^2 l}}\right) = 1 - \left(\frac{\sqrt{\frac{g}{\alpha^2 l}}\, t}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{\sqrt{\frac{g}{\alpha^2 l}}\, t}{2}\right)^4 + \ldots$$

Astfel, soluția ecuației diferențiale în cazul considerat se poate pune sub forma:

$$(5) \qquad \theta(t) = K J_0\left(\sqrt{\frac{g}{\alpha^2 l}}\right) \text{ sau } \theta(\tau) = K J_0\left(\sqrt{\frac{g}{\alpha^2 l}}\ \tau\right)$$

pentru ecuația (4′)

Se știe că, între funcțiile Bessel și funcțiile trigonometrice există o legătură, care pentru valori mari ale lui $\sqrt{\frac{g}{\alpha^2 l}}\, t$ se exprimă prin relația

$$J_0\left(\sqrt{\frac{g}{\alpha^2 l}}\, t\right) = \sqrt[4]{\frac{\alpha^2 l}{g}}\ \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\ \cos\left(\sqrt{\frac{g}{\alpha^2 l}}\, t - \frac{\pi}{4}\right)$$

numită expresia asimptotică a funcției Besel J_0. Acest fapt ne îndreptățește să afirmăm că integrala (5), care reprezintă legea de mișcare, exprimă caracterul vibratoriu amortizat de factorul

$$\sqrt[4]{\frac{\alpha^2 l}{g}}\ \sqrt{\frac{2}{\pi l}}$$

al acestei mișcări.

Dacă $g = l$ obținem funcțiunea:

$$J_0(t) = 1 - \left(\frac{t}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2\,!)^2}\left(\frac{t}{2}\right)^4 + \ldots$$

Ecuația $J_0\ (t) = 0$ are o infinitate de rădăcini

$t_1 = 2{,}405$; $t_2 = 5{,}520$; $t_3 = 8{,}654$; $t_4 = 11{,}992$; $t_5 = 14{,}931$ etc....

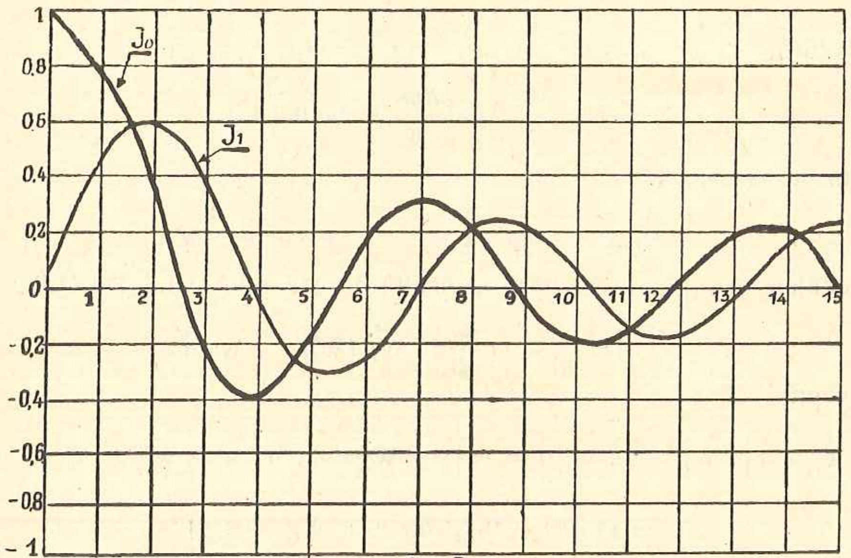

fig.2

Dacă $\alpha > 0$, $t = \frac{1}{\alpha}$ deci $\tau = 0$ ecuația diferențială de mai sus are o soluție care să corespundă problemei lui Cauchy referitoare la existența integralei sale. Din punct de vedere mecanic, în acest moment mișcarea nu mai este definită întrucît existența mișcării presupune existența masei, ori la momentul respectiv masa se anulează. Aceasta justifică și explică restricțiile făcute.

Dacă constanta arbitrară α este negativă adică $\alpha = -\beta$ unde $\beta > 0$ ecuația (4) conduce la ecuația (4′) cu integrala ei, a cărei existență este asigurată în baza condiției de mai sus. Din punct de vedere mecanic ipoteza făcută înseamnă că masa este o funcție liniar crescătoare în raport cu timpul și că acestor ipoteze le corespunde o lege de mișcare unică și bine determinată. Dacă constanta pozitivă α este mică, $t = \frac{1}{\alpha}$ este mare, deci timpul de expulzare al masei are o durată mare, poate avea loc expresia asimptotică. Dacă α este apreciabil, timpul de expulzare al masei este mic și nu are loc expresia asimptotică. În cazul cînd constanta α este negativă, adică are loc o creștere de masă, expresia asimptotică există și mișcarea are aspectul unei mișcări amortizate.

IV. *Ecuația pendulului matematic de masă variabilă.*

— *cazul* $\vec{W}_G \neq 0$.

Pornim de la ecuația energiei punctului de masă variabilă II_1 găsită mai sus

$$dT = \vec{R}\,d\vec{r} + \frac{dm}{m}\left(\vec{H}\ \vec{W}_G - T\right)$$

cu notațiile deja folosite și ținînd seama de figură, avem:

$$dT = \frac{1}{2}\,l^2\left(\dot\theta^2\frac{dm}{m} + 2m\,\dot\theta\,\ddot\theta\right)dt.$$

Avem de asemenea:

$$\vec{R}\,d\vec{r} = mg\,dx = -\,mgl\sin\theta\,\dot\theta\,dt$$

Cantitatea de mișcare și viteza centrului de greutate avînd proecțiile:

$$\vec{H}\left(m\frac{dx}{dt},\ m\frac{dy}{dt}\right),\ \vec{W}_G\left(W_G^{(x)},\ W_G^{(y)}\right)$$

obținem:

$$\vec{H}\cdot\vec{W}_G = m\left(\dot x\,W_G^{(x)} + \dot y\,W_G^{(y)}\right) = m\left(-\,l\,W_G^{(x)}\sin\theta\cdot\dot\theta + W_G^{(y)}\,l\cos\theta\cdot\dot\theta\right) =$$

$$= m\,l\,\dot\theta\left(-\,W_G^{(x)}\sin\theta + W_G^{(y)}\cos\theta\right)$$

și cum $T = \frac{1}{2}\,m\,l^2\,\dot\theta^2$, ecuația energiei devine:

$$(1)\qquad \boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{1}{m}\frac{dm}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{l}\left(\frac{1}{m}\frac{dm}{dt}W_G^{(x)} + g\right)\sin\theta = \frac{1}{lm}\frac{dm}{dt}W_G^{(y)}\cos\theta}$$

Aceasta este ecuația pendulului matematic de masă variabilă în vid. In cazul oscilațiilor mici ecuația devine

$$(2)\qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{1}{m}\frac{dm}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{l}\left(\frac{1}{m}\frac{dm}{dt}W_G^{(x)} + g\right)\theta = \frac{1}{lm}\frac{dm}{dt}W_G^{y}$$

sau

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{1}{m}\frac{dm}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l}\theta + \frac{1}{lm}\frac{dm}{dt}\left(W_G^{(x)}\cdot\theta - W_G^{(y)}\right) = 0.$$

Această ecuație corespunde și generalizează, prin adăugarea termenului respectiv ecuația III_3.

Vom integra această ecuație pentru diferite cazuri particulare.

a) Presupunem:

$$W_G^{(y)} = 0\quad W_G^{(x)} = (K - g)\,t,\ m = ct + m_0$$

Ecuația IV_2 devine

$$(3)\qquad \frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \frac{1}{\tau}\frac{d\theta}{d\tau} + \frac{K}{l}\,\theta = 0 \text{ unde } \tau = t + \frac{m_0}{c}.$$

Această ecuație diferențială este de tipul III_4, și are integrala generală

$$\theta(\tau) = c_1\,J_0\left(\sqrt{\frac{K}{l}}\,\tau\right), \text{ discutată în cazul studiat mai sus.}$$

b) Presupunem că:

$$m = \frac{1}{f^{\mu}(t)};\ W_G^{(x)} = \frac{1}{\mu}\cdot\frac{f(t)}{f'(t)}\left(g - l\lambda f_{(t)}^{2\mu}\right) \text{ și } W_G^{(y)} = 0$$

unde μ și λ sint două constante și $f^{\mu}(t) > 0$ și finită împreună cu derivata ei.

Ecuația IV_2 devine

$$(4)\qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} - \mu\frac{f'(t)}{f(t)}\frac{d\theta}{dt} + \lambda f_{(t)}^{2\mu}\cdot\theta = 0$$

pentru integrarea căreia se face schimbarea de variabilă

$$\theta(t) = \varphi(\tau),\ \tau = \int f^{\mu}(t)\,dt$$

care ne conduce la ecuația:

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \lambda\varphi = 0.$$

Această ecuație se integrează ca o ecuație cu coeficienți constanți și furnizează, ținînd seamă de schimbarea efectuată integrala generală a ecuației IV_4 sub formele

$$\theta = A\cos\left(\lambda\int f_{(t)}^{\mu}\,dt\right) + B\sin\left(\lambda\int f_{(t)}^{\mu}\,dt\right),\ \lambda > 0$$

$$\theta = A\int f(t)\,dt + B \qquad \lambda = 0$$

$$\theta = Ae^{\sqrt{K}\int f^{\mu}dt} + Be^{-\sqrt{K}\int f^{\mu}dt} \qquad \lambda = -K,\ K > 0,$$

A și B fiind două constante de integrare. Dacă $\lambda > 0$ integrala ia forma

$$\theta = A\cos\left[\lambda F(t) + \frac{\Sigma}{2}\right] + B\sin\left[\lambda F(t) + \frac{\Sigma}{2}\right] \text{ sau } \theta = \alpha\sin\left[\lambda F(t) + \Sigma\right]$$

unde prin urmare $\alpha^2 = A^2 + B^2$ și $tg\frac{\Sigma}{2} = \frac{A}{B}$ iar $F(t) = \int f^{\mu}(t)\,dt - \Sigma$

α fiind amplitudinea mișcării.

CAP. II.

Ecuația pendulului matematic de masă variabilă în mediu rezistent

V. Pornind de la formula II_1 și folosind procedeul de calcul utilizat pentru aflarea ecuației pendulului în vid, se găsește ecuația

$$(1)\quad \frac{d\theta^2}{dt^2}+\frac{1}{m}\frac{dm}{dt}\frac{d\theta}{dt}+\frac{1}{l}\left(\frac{1}{m}\frac{dm}{dt}W_G^{(x)}+g\right)\sin\theta=\frac{1}{l}\cdot\frac{1}{m}\frac{dm}{dt}W_G^{(y)}\cos\theta+$$
$$+\frac{1}{l}\cdot\frac{1}{m}\frac{d\vec{r}}{d\theta}\cdot\vec{R}$$

$\vec{R}$ este forța de rezistență a mediului. Se observă, din această ecuație, că influența rezistenței în mișcarea pendulului de masă variabilă se exprimă ca și în cazul masei constante prin adăugarea unui termen de forma de mai sus, a cărei valoare este $-\frac{1}{m}R$, fiindcă $-\vec{R}\cdot d\vec{r}=R\,l d\,\theta$, unde R este mărimea rezistenței. In cazul oscilațiilor mici și a unei rezistențe proporționale cu viteza, adică

$$R=K'lm\frac{d\theta}{dt}=K\,m\,\frac{d\theta}{dt}$$

unde $K=K'l$, ecuația devine

$$(2)\quad \frac{d^2\theta}{dt^2}+\left(\frac{1}{m}\frac{dm}{dt}+K\right)\frac{d\theta}{dt}+\frac{1}{l}\left(\frac{1}{m}\frac{dm}{dt}W_G^{(x)}+g\right)\theta=\frac{1}{l}\frac{1}{m}\cdot\frac{dm}{dt}W_G^{(y)}.$$

Pentru obținerea ecuației IV_4 se ia

$$m=\frac{1}{c}f^{-\mu}_{(t)}e^{-Kt}\ \text{și}\ W_G^{(x)}=\frac{(\lambda f^{2\mu}_{(t)}-g)\,f(t)}{\mu f'+Kf},\ W_G^{(y)}=0.$$

In acest caz ecuația de mai sus ne va conduce la rezultate identice cu cele obținute la integrarea ecuației IV_4.

Mărimea rezistenței va avea forma:

$$R=K'ml^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=K\,m\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

iar ecuația de mișcare devine:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{1}{m}\frac{dm}{dt}\frac{d\theta}{dt}+K\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\frac{1}{l}\left(\frac{1}{m}\frac{dm}{dt}W_G^{(x)}+g\right)\sin\theta=$$
$$\frac{1}{l}\frac{1}{m}\frac{dm}{dt}W_G^{(y)}\cos\theta\cdot\frac{d\theta}{dt}.$$

Să presupunem că masa pendulului este funcție numai de poziția sa, adică $m=f(\theta)$ iar viteza centrului de greutate este funcție de poziție și viteză, adică

$$\vec{W}_G=\vec{W}_G\left(\theta,\frac{d\theta}{dt}\right).$$

In aceste condiții ecuația precedentă se scrie

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\left(\frac{1}{m}\frac{dm}{d\theta}+K\right)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\frac{1}{l}\left[\frac{1}{m}\frac{dm}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}W_G^{(x)}+g\right]\sin\theta=$$
$$=\frac{1}{l}\frac{1}{m}\frac{dm}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}W_G^{(y)}\cos\theta$$

sau

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\left(\frac{1}{m}\frac{dm}{d\theta}+K\right)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\frac{1}{lm}\frac{dm}{d\theta}\left(W_G^{(x)}\sin\theta-W_G^{(y)}\cos\theta\right)\frac{d\theta}{dt}+\frac{g}{l}\sin\theta=0.$$

Dacă se presupune în plus că

$$W_G^{(y)}=\frac{1}{\cos\theta}\cdot l\frac{d\theta}{dt}=\frac{v}{\cos\theta}$$

unde v este viteza la momentul t a pendulului, avem

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+K\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\frac{1}{l}\left[\frac{1}{m}\frac{dm}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}W_G^{(x)}+g\right]\sin\theta=0.$$

In această ecuație să luăm

$$W_G^{(x)}=(la-g)\left(\frac{dm}{d\theta}\right)^{-1}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^{-1}$$

și vom obține ecuația

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+K\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+a\sin\theta=0$$

pentru integrarea căreia se face schimbarea de funcție

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=y\,(\theta)$$

astfel încît ea devine

$$\frac{dy}{d\theta}+2Ky+2a\sin\theta=0$$

adică liniară în funcția necunoscută $y=y(\theta)$.

Prin metodele obișnuit întrebuințate la integrarea ecuațiilor liniare se obține integrala generală:

$$y=c_1e^{-2K\theta}+\frac{2a}{4K^2+1}\left(\cos\theta-2K\sin\theta\right).$$

Ținînd seama de schimbarea făcută și luînd $c_1=\frac{2a}{4K^2+1}$ obținem

$$\sqrt{\frac{2a}{4K^2+1}}\left(t-t_0\right)=\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{d\theta}{\pm\sqrt{e^{-2K\theta}+\cos\theta-2K\sin\theta}}$$

care se permite să exprimăm sub această formă, timpul.

Observare. Un rezultat analog se obţine din ecuaţia IV₁ dacă se va lua $W_g^{(x)}$ sau $W_g^{(y)}$ arbitrar iar celălalt rădăcina ecuaţiei

$$\begin{vmatrix} W_G^{(x)} & W_G^{(y)} \\ \cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix} = 0$$

iar variaţia masei sub forma $m = c\, e^{(a-K)\theta}$ ordonindu-se ecuaţia IV₁ după derivatele componente.

BIBLIOGRFIE

1. I. V. Meşerski, *Raboti po mehanike tel peremennoi massi.*
2. T. Levi — Civita — Rendiconti dei Lincei t. VIII.
3. A. Gray şi Mathews, *Funcţiile Bessel şi aplicaţiile lor in Fizică şi Mecanică* (in Limba rusă).
4. Kamke E., *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Losungen.*

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Уравнение математического маятника переменной массы

ПЕТРУ БРАДЯНУ

В этой работе мы искали уравнение движения для математического маятника переменной массы, исходя от уравнения энергии точки переменной массы:

$$dT - \frac{dm}{m} T = \vec{R} \cdot \vec{dr} \qquad \text{и} \qquad dT = \vec{R} \cdot \vec{dr} + \frac{dm}{m}(\vec{H} \cdot \vec{W}_g - T)$$

первое годное когда $\vec{W}_G = 0$, а второе, когда $\vec{W}_G \neq 0$.

Этим уравнениям соответствовали для маятника уравнения

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{1}{m}\frac{dm}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{dt} + \frac{1}{m}\frac{dm}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{l}\left(\frac{1}{l}\frac{dm}{dt} W_g^{(x)} + g\right)\sin\theta = \frac{1}{m}\frac{1}{l}\frac{dm}{dt} W_g^{(x)}\cos\theta .$$

Были исследованы разные частные случаи, связанные с линейными и показательными изменениями массы, как и разные изменения вектора центра тяжести.

Было найдено потом уравнение маятника переменной массы в устойчивой среде, в форме

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}\frac{1}{m}\frac{dm}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{l}\left(\frac{1}{m}\frac{dm}{dt} W_g^{(x)} + g\right)\sin\theta = \frac{1}{m}\frac{1}{l}\frac{dm}{dt} W_g^{(x)}\cos\theta - \frac{1}{l}\frac{1}{m}\frac{\vec{dr}}{d\theta}\vec{R}$$

где $\vec{R}$ является вектором устойчивости среды. Мы включили это уравнение в случай сопротивляемости пропорциональной со скоростью и с квадратом скорости.

RÉSUMÉ

L'équation du pendule mathématique de masse variable

par

P. BRADEANU

Dans le présent travail nous avons cherché l'équation de mouvement pour un pendule mathématique de masse variable, en partant de l'équation de l'énergie du point de masse variable:

$$dT - \frac{dm}{m} T = \vec{R} \cdot \vec{dr} \qquad \text{et} \qquad dT = \vec{R} \cdot \vec{dr} + \frac{dm}{m}(\vec{H} \quad \vec{W}_g - T)$$

la première étant valable quand $\vec{W}_G = 0$ et la seconde au cas où $\vec{W}_G \neq 0$.

A ces équations correspondent pour le pendule les équations:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{1}{m}\frac{dm}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{1}{m}\frac{dm}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{l}\left(\frac{1}{l}\frac{dm}{dt} W_g^{(x)} + g\right)\sin\theta = \frac{1}{m}\frac{1}{l}\frac{dm}{dt} W_g^{(x)}\cos\theta .$$

Nous avons considéré divers cas particuliers liés à des variations linéaires et exponentielles de la masse et diverses variations du vecteur du centre de gravité.

Nous avons trouvé ensuite l'équation du pendule de masse variable dans le milieu résistant, sous la forme:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{1}{m}\frac{dm}{dt}\frac{d\theta}{ai} + \frac{1}{l}\left(\frac{1}{m}\frac{dm}{dt} W_g^{(x)} + g\right)\sin\theta = \frac{1}{m}\frac{1}{l}\frac{dm}{dt} W_g^{(x)}\cos\theta - \frac{1}{l}\frac{1}{m}\frac{\vec{dr}}{d\theta}\vec{R}$$

où $\vec{R}$ est le vecteur de la résistance du milieu. Nous avons intégré cette équation au cas de la résistance proportionnelle à la vitesse et au carré de la vitesse.