DEDUCEREA DIRECTĂ A ECUAŢIEI HAMILTON-IACOBI DIN ECUAŢIILE TIP NEWTON ÎN TEORIA RELATIVITĂŢII RESTRÎNSE

DE

Z. GÁBOS şi R. V. DEUTSCH

Comunicare prezentată la Sesiunea Filialei Cluj a Academiei R.P.R. din 18—21 decembrie 1954.

Într-o lucrare anterioară (1) am arătat că se poate realiza, prin întrebuinţarea rezultatelor calculului modern al variaţiilor, o nouă sistematizare a ecuaţiilor mecanicii clasice. Avantajul acestei sistematizări este că se vede mai clar legătura între diferitele ecuaţii de mişcare, precum şi domeniul de aplicabilitate ale acestora. In această lucrare aplicăm metoda elaborată în lucrarea precedentă pentru cazul ecuaţiilor de mişcare ale dinamicii relativiste restrînse. Drumul urmat: căutăm condiţiile pentru care ecuaţia Hamilton-Jacobi se poate deduce direct din ecuaţiile tip Newton; formulăm problema cea mai generală, care se poate rezolva cu ajutorul ecuaţiei Hamilton-Jacobi. In sfîrşit demonstrăm că condiţiile pentru care această deducere directă se poate realiza sînt tot o dată suficiente pentru asigurarea minimului integralei care intervine in principiul Hamilton.

1°. *Ecuaţia fundamentală a dinamicii relativiste restrînse*

Să examinăm mişcarea unui singur punct material în cazul cînd mişcarea are loc într-un cîmp electromagnetic şi gravitaţional. Să presupunem că atît cîmpul electromagnetic, cît şi cel gravitaţional pot fi caracterizate printr-un potenţial vector şi un potenţial scalar notate cu $\vec{A}_{em}$, φ_{em} resp. $\vec{A}_{gr}$, φ_{gr}. Mai presupunem, că există o analogie profundă între interacţiunile electromagnetice şi gravitaţionale. În acest caz cîmpul este caracterizat prin potenţialul vector $\vec{A}(x_j, t) = \vec{A}_{em} + \vec{A}_{gr}$, şi potenţialul scalar $\varphi(x_j, t) = \varphi_{em} + \varphi_{gr}$, iar ecuaţiile de mişcare sînt de forma dată în electrodinamică:

$$\frac{d\,P_i}{dt} = -\,\mathrm{grad}_i\,\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\,v_j,\quad i, j = 1, 2, 3, \qquad (1)$$

cu

$$P_i = m\, v_i + \frac{1}{c} A_i, \text{ unde } m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \beta\, m_0.$$

m_0 este masa de repaos, $\vec{P}$ este vectorul cantităţii de mişcare, v_j se defineşte prin dx_j/dt, v este valoarea absolută a vectorului de viteză, c este viteza de propagare a luminii în vid. Sistemul de ecuaţii diferenţiale de sub (1) descrie în concordanţă cu experienţa mişcarea punctului material.

Dacă cunoaştem starea punctului material — valorile x_i, v_i — pentru un moment dat t_0, rezolvînd sistemul de ecuaţii diferenţiale de sub (1) găsim ecuaţiile traiectoriei:

$$x_i = x_i\,(t), \quad i = 1,\, 2,\, 3.$$

2°. *Tratarea cuadridimensională a mişcării*

Avînd în vedere că în ecuaţiile de mişcare intervine timpul (t) ca o variabilă independentă, e avantajos ca mişcarea — care decurge în spaţiul cu trei dimensiuni — să fie tratată din punct de vedere matematic într-un spaţiu cu patru dimensiuni. Să folosim deci în cele ce urmează un sistem cartezian de coordonate în spaţiul cu patru dimensiuni.

În cazul tratării cuadridimensionale a mişcării se iveşte problema de a da vectorul de poziţie şi vectorul de cantitate de mişcare în spaţiul cu patru dimensiuni. Pentru a da coordonata a patra de spaţiu şi componenta a patra a vectorului de cantitate de mişcare, să folosim faptul că mişcarea poate fi descrisă complet cu ajutorul sistemului de ecuaţii de sub (1). Din acest fapt rezultă că componentele a patra a vectorului de poziţie şi a celui de cantitate de mişcare pot fi date cu ajutorul celor trei ecuaţii de sub (1). Primii trei componenţi ai vectorului de poziţie şi ai cantităţii de mişcare să fie

$$x_1,\, x_2,\, x_3;\; P_1,\, P_2,\, P_3$$

adică componenţii acestor vectori în spaţiul cu trei dimensiuni, (în spaţiul în care decurge mişcarea).

Pe baza celor spuse mai sus x_4 şi P_4 pot fi date cu ajutorul ecuaţiilor de sub (1). Să căutăm x_4 şi P_4 presupunînd că ecuaţia (1) are loc şi pentru $i = 4$. Înmulţind prima ecuaţie de sub (1) cu v_1, a doua cu v_2, a treia cu v_3 şi adunînd ecuaţiile primite, găsim că (1) are loc şi pentru $i = 4$, dacă

$$x_4 = i\; ct,\; P_4 = i\, mc + \frac{i}{c}\,\varphi. \tag{2}$$

3°. *Deducerea ecuaţiei Hamilton-Jacobi*

Ecuaţia Hamilton-Jacobi rezolvă problema mişcării în cazul cînd stările iniţiale formează o mulţime continuă. Deoarece mişcarea are loc în spaţiul cu trei dimensiuni, punctele iniţiale în cazul cel mai general formează o suprafaţă în spaţiul cuadridimensional, cu ecuaţia:

$$x_i^0 = x_i^0\,(u_j), \quad i = 1,\, 2,\, 3,\, 4, \; j = 1,\, 2,\, 3. \tag{3}$$

Pentru a descrie mişcarea mai avem nevoie de funcţiile iniţiale

$$v_i^0 = v_i^0\,(u_j), \quad i = 1,\, 2,\, 3. \tag{4}$$

Prin fiecare punct al suprafeţei iniţiale — dat prin valori bine determinate ale parametrilor u — trece o singură traiectorie, care poate fi dată cu ajutorul ecuaţiilor tip Newton. Traectoria cuadridimensională este dată prin ecuaţiile

$$x_i = x_i\,(t),\; i = 1,\, 2,\, 3,\; x_4 = ict.$$

Ecuaţia Hamilton-Jacobi poate fi aplicată în cazul cînd *traectoriile corespunzătoare stărilor iniţiale realizează o acoperire simplă şi continuă într-un domeniu D al spaţiului cuadridimensional.* În cazul dacă are loc acoperirea simplă şi continuă a domeniului D, prin fiecare punct a domeniului D trece o traectorie şi numai o singură traiectorie, şi se pot da funcţii:

$$v_i = v_i\,(x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4),\; i = 1,\, 2,\, 3.$$
$$P_i = P_i\,(x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4),\; i = 1,\, 2,\, 3,\, 4$$

uniforme şi continue. Dacă se introduc aceste funcţii în ecuaţiile de sub (1) găsim sistemul de ecuaţii diferenţiale:

$$\frac{\partial\left(m v_i + \frac{1}{c} A_i\right)}{\partial t} - \left[\vec{v} \times \operatorname{rot}\left(m\,\vec{v} + \frac{1}{c}\vec{A}\right)\right]_i + \operatorname{grad}_i\,(mc^2 + \varphi) = 0$$
$$i = 1,\, 2,\, 3. \tag{5}$$

Avînd în vedere, că

$$\sum (m\, v_i)^2 + (\mathrm{i}mc)^2 + m_0^2 c^2 = 0, \tag{6}$$

avem:

$$m\, c^2 = c \sqrt{\left(P_i - \frac{1}{c} A_i\right)^2 + m_0^2 c^2}\,. \tag{7}$$

Presupunem că cantitatea de mişcare derivă dintr-un potenţial, adică există o funcţie $S(x_1, x_2, x_3, x_4)$ cu ajutorul căreia componenţii cantităţii de mişcare se pot da în felul următor:

$$P_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

În acest caz

$$\operatorname{rot}_i\,(m\,\vec{v} + \frac{1}{c}\vec{A}) = 0,\; i = 1, 2, 3,$$

şi

$$m\, v_i + \frac{1}{c} A_i = \operatorname{grad}_i\, S,\; i = 1, 2, 3.$$

Ţinînd seama de ultimele ecuaţii, ecuaţia (5) se poate scrie în forma:

$$\mathrm{grad}_i\left[\frac{\partial S}{\partial t}+\varphi+c\sqrt{\sum\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}-\frac{1}{c}\,A_i\right)^2+m_0^2c^2}\right]=0.$$

Din ecuaţiile găsite rezultă că expresia din paranteză depinde numai de t. Expresia din paranteză să fie egală cu funcţia f(t). Dacă în loc de funcţia S folosim funcţia $S-\int f(t)dt$, obţinem:

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\varphi+c\sqrt{\sum\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}-\frac{1}{c}\,A_i\right)^2+m_0^2c^2}=0$$

de unde rezultă

$$\sum\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}-\frac{1}{c}\,A_i\right)^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}+\varphi\right)^2+m_0^2c^2=0. \tag{8}$$

Ecuaţia (8) este chiar ecuaţia Hamilton-Jacobi a teoriei relativităţii restrînse.

4°. *Teoremă referitoare la funcţia S.* În punctul precedent am dedus din ecuaţiile tip Newton ecuaţia Hamilton-Jacobi. La deducerea ecuaţiei am folosit două condiţii:

a) traectoriile corespunzătoare stărilor iniţiale realizează o acoperire simplă şi continuă într-un domeniu D al spaţiului cu patru dimensiuni;

b) există un potenţial al vectorului de cantitate de mişcare.

Să analizăm cazul cînd condiţia b) poate fi satisfăcută. Pentru aceasta folosim următoarea teoremă enunţată de noi:

Acele funcţii

$$v_i=v_i(x_1,x_2,x_3,x_4),\quad i=1,2,3,$$

pentru care forma diferenţială

$$P_1dx_1+P_2dx_2=P_3dx_3+P_4dx_4 \tag{9}$$

este diferenţiala totală exactă, satisfac sistemul de ecuaţii diferenţiale de sub (5).

Demonstraţie: Expresia formei diferenţiale (9) poate fi scrisă în forma:

$$P_1dx_1+P_2dx_2+P_3dx_3-H\,dt,$$

unde H — numit funcţie Hamilton — este funcţia

$$H=H(x_1,x_2,x_3,t,P_1,P_2,P_3)=c\sqrt{\sum\left(P_i-\frac{1}{c}\,A_i\right)^2+m_0^2c^2}+\varphi.$$

Se poate da această expresie pe baza ecuaţiilor (2) şi (7). P_i şi H sînt funcţii de x_1, x_2, x_3, t. Expresia diferenţială este diferenţiala totală exactă, dacă avem ecuaţiile:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial P_i}{\partial x_k}=\frac{\partial P_k}{\partial x_i},\quad i,k=1,2,3,\\&-\frac{\partial H}{\partial x_i}=\frac{\partial P_i}{\partial t}\quad i=1,2,3.\end{aligned} \tag{10}$$

Din sistemul de ecuaţii diferenţiale (10) rezultă sistemul de ecuaţii diferenţiale de sub (5). Pentru a demonstra acest fapt să folosim grupa a doua de ecuaţii diferenţiale de sub (10). Aceste ecuaţii pot fi scrise sub forma:

$$\frac{\partial P_i}{\partial t}+\frac{\partial H}{\partial x_i}=0. \tag{11}$$

Pentru derivata parţială a lui H în raport cu x_i, folosind ecuaţia de definiţie a funcţiei H (în care în loc de indicele i folosim pentru cazul nostru indicele k), folosind ecuaţia (7), precum şi relaţia:

$$P_k-\frac{1}{c}\,A_k=m\,v_k=m\,\frac{dx_k}{dt}$$

găsim:

$$\frac{\partial H}{\partial x_i}=\sum_k\frac{\partial P_k}{\partial x_i}\,\frac{dx_k}{dt}-\frac{1}{c}\,\frac{\partial A_k}{\partial x_i}\,v_k+\mathrm{grad}_i\,\varphi.$$

Dacă se introduce această expresie în ecuaţia (11) şi se ia în considerare primul grup de ecuaţii diferenţiale de sub (10) găsim:

$$\frac{dP_i}{dt}=-\,\mathrm{grad}_i\,\varphi+\frac{1}{c}\,\frac{\partial A_k}{\partial x_i}\,v_k.$$

Ecuaţia găsită este tocmai ecuaţia (1). Cu aceasta teorema este demonstrată.

Din teorema enunţată reiese că condiţia b) este satisfăcută dacă cîmpul poate fi caracterizat cu ajutorul unui potenţial vector şi al unui potenţial scalar. Deci *dacă cîmpul poate fi caracterizat printr-un potenţial vector şi în potenţialul scalar, există un potenţial al cantităţii de mişcare, în cazul cînd condiţia a) este satisfăcută.*

5°. *Rezolvarea ecuaţiei Hamilton-Jacobi*

Folosind funcţiile iniţiale de sub (3) şi (4) se pot da valorile derivatelor parţiale de ordinul întîi $\partial S/\partial x_i$ în fiecare punct al suprafeţei iniţiale. Să presupunem că funcţiile iniţiale sînt uniforme şi continue. Derivatele parţiale de ordinul întîi ale acestor funcţii să fie tot funcţii continue. În acest caz avem de-a face tocmai cu problema lui C a u c h y, dacă se poate da încă funcţia $S(u_1, u_2, u_3)$. Se poate da această funcţie dacă forma diferenţială

$$P_1^0\,dx_1^0+P_2^0\,dx_2^0+P_3^0\,dx_3^0+P_4^0\,dx_4^0, \tag{12}$$

— care rezultă din forma diferențială (9) prin înlocuirea funcțiilor inițiale — este diferențială totală exactă. Deci *condiția a) din punctul 4° poate fi înlocuită* (în cazul cînd există potențial vector și potențial scalar) *cu condiția că forma diferențială (12) este diferențială totală exactă.*

Să ne ocupăm cu încă două cazuri particulare.

A) Să examinăm cazul cînd avem de a face cu o singură stare inițială, dat prin valorile x_i^0, v_i^0. Putem da pentru acest caz o infinitate de sisteme de funcții inițiale, care pentru valori bine determinate ale parametrilor dau tocmai valorile corespunzătoare stării inițiale date. Deci în acest caz se poate satisface întotdeauna — printr-o infinitate de sisteme de funcții inițiale — condiția ca expresia (12) să fie diferențială totală. Fiecărui sistem de funcții inițiale îi corespunde o soluție a ecuației Hamilton-Jacobi. Deoarece unei singure stări inițiale îi corespunde o singură traectorie, funcțiile S — corespunzătoare diferitelor sisteme de funcții inițiale — au valori egale pentru valorile x_i ($i = 1, 2, 3, 4$) corespunzătoare traectoriei. Putem afirma același lucru despre derivatele parțiale de ordinul întîi ale funcțiilor S. Dacă introducem un sistem de coordonate cu cinci dimensiuni S, x_i, în acest sistem de coordonate funcțiile S reprezintă suprafețe. Pe baza celor spuse mai sus putem afirma că suprafețele integrale — corespunzătoare diferitelor sisteme de funcții inițiale — au puncte comune pentru valorile lui x_i luate pe traiectorie și totodată au plan tangent comun în aceste puncte. Cu aceasta am demonstrat că *traectoriile sînt curbele caracteristice ale ecuației Hamilton-Jacobi.* Sistemul de ecuații diferențiale al curbelor caracteristice ale ecuației Hamilton-Jacobi poartă numele de ecuații canonice de mișcare. Am reușit deci să dăm în mod foarte simplu demonstrația unei teoreme importante referitoare la legătura definiției matematice și fizice a curbelor caracteristice. Deci în cazul cînd avem de-a face numai cu o singură stare inițială, se caută integrala ecuațiilor canonice de mișcare, integrală care satisface totodată condițiile inițiale date.

B) Am stabilit în cele precedente că stările inițiale formează în spațiul cu patru dimensiuni — în cazul cel mai general — o suprafață. Suprafața inițială poate fi considerată ca înfășurătoare a unei familii de suprafețe. Pentru fiecare membru al familiei de suprafețe poate fi dată o funcție a vectorului de viteză, pentru care se satisface condiția cerută de funcțiile inițiale, și care în punctul de contact dă tocmai vectorul de viteză, care aparține punctului de pe suprafața inițială. Fiecărui membru al familiei de suprafață îi aparține o suprafață în spațiul cu cinci dimensiuni (S, x_i). Înfășurătoarea acestor suprafețe dă suprafața integrală corespunzătoare suprafeței inițiale și funcțiilor de viteză inițială. Rezultatul obținut este principiul Huygens al mecanicii relativității restrînse. Principiul Huygens a fost stabilt în legătură cu propagarea undelor. Am văzut că pe baza studiului funcției S se poate ajunge la principiul Huygens, referitor la mișcarea punctului material. Prin acest fapt se poate explica rolul însemnat pe care-l joacă funcția S în mecanica ondulatorie.

6°. *Semnificația funcției S. Principiul Hamilton.* Să presupunem că punctul material, în momentul t, se găsește în punctul cu coordonatele

x_1, x_2, x_3. Pentru o deplasare a punctului material de-alungul traectoriei avem:

$$dx_i = v_i dt, \quad i = 1, 2, 3,$$

unde dt este durata de timp în care are loc deplasarea. Variația funcției S în decursul acestei deplasări este:

$$dS = \sum (mv_i + \frac{1}{c} A_i)\, v_i dt - (m c^2 + \varphi)\, dt =$$

$$= \left[- m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{1}{c} (\vec{A}, \vec{v}) - \varphi \right] dt.$$

Expresia din paranteză se numește funcție Lagrange, și se notează cu L:

$$L = - m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{1}{c} (\vec{A}, \vec{v}) - \varphi.$$

Avem deci

$$dS = L\, dt. \tag{13}$$

Variația funcției S între punctele 1 și 2 ale traectoriei este:

$$S_2 - S_1 = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt.$$

Deci *integrala funcției Lagrange în raport cu timpul — în cazul dacă integrala se a de-alungul traectoriei — ne dă variația funcției S.*

Dar punctele 1 și 2, luate pe traectorie, pot fi unite în afară de curba traectoriei cu o infinitate de curbe. Se poate demonstra că *în cazul cînd cîmpul în care se mișcă punctul material poate fi caracterizat printr-un potențial vector și un potențial scalar, integrala curbilinie luată între punctele 1 și 2 este minimă pentru traectorie (principiul Hamilton).*

Demonstrație: să introducem funcția F prin definiția

$$F = \frac{\partial S}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial S}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \frac{\partial S}{\partial x_3} \dot{x}_3 + \frac{\partial S}{\partial t} - L\,(t, x_i, \dot{x}_i).$$

Să luăm un punct fix al traectoriei, avînd coordonatele x_1, x_2, x_3. În acest punct fix F este funcție numai de $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$. Dacă înlocuim în funcția F valorile $\dot{x}_i$ corespunzătoare traectoriei, folosind relația (13) găsim:

$$F = 0.$$

Să stabilim valoarea derivatei parțiale a funcției F în raport cu $\dot{x}_i$, presupunînd că se calculează cu valori $\dot{x}_i$ luate pentru traiectorie. Folosind expresia funcției L, găsim:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = P_i.$$

Pe de altă parte, din definiţia funcţiei S rezultă:

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} = P_i$$

Deci pentru valorile $\dot{x}_i$ luate pentru traectorie avem:

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0.$$

Pe baza rezultatelor obţinute putem ajunge la concluzia: se poate că funcţia F are valoare extremă pentru valorile $\dot{x}_i$ date pentru traectorie. Pentru a arăta că într-adevăr avem de-a face cu o valoare extremă, să formăm expresia lui d^2F:

$$d^2F = F_{ik}\, d\dot{x}_i\, d\dot{x}_k, \text{ unde } F_{ik} = \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_k},\ i,\ k = 1,\ 2,\ 3.$$

Vom arăta că forma cuadratică $-F_{ik}\, d\dot{x}_i\, d\dot{x}_k$ este pozitiv definită. Pentru coeficienţii $-F_{ik}$ găsim:

$$-F_{ii} = m_0\, \beta^3 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{\dot{x}_i^2}{c^2}\right),\ i = 1,\ 2,\ 3,$$

$$-F_{ik} = m_0\, \beta^3 \frac{\dot{x}_i \dot{x}_k}{c^2},\ i,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ i \neq k.$$

Să mai dăm următoarele egalităţi:

$$\Delta_1 = -F_{11} = m_0\, \beta^3 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{\dot{x}_1^2}{c^2}\right),$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -F_{11} & -F_{12} \\ -F_{21} & -F_{22} \end{vmatrix} = m_0^2 \beta^4 \left(1 - \frac{\dot{x}_3^2}{c^2}\right),$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -F_{11} & -F_{12} & -F_{13} \\ -F_{21} & -F_{22} & -F_{23} \\ -F_{31} & -F_{32} & -F_{33} \end{vmatrix} = m_0^3 \beta^5.$$

Se vede că Δ_1, Δ_2, Δ_3 au valori pozitive dacă valoarea absolută a vectorului de viteză (v) este mai mică decît c (viteza de propagare a luminii în vid). Inegalitatea aceasta are loc întotdeauna pentru puncte materiale cu masă de repaos diferită de zero. Putem afirma deci că forma cuadratică $-F_{ik}\, d\dot{x}_i\, d\dot{x}_k$ este pozitvă definită, prin urmare expresia lui d^2F este negativ definită. Funcţia F are deci valoare minimă pentru valori $\dot{x}_i$ luate pentru traectorie. Avem deci:

$$\frac{\partial S}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial S}{\partial x_2}\dot{x}_2 + \frac{\partial S}{\partial x_3}\dot{x}_3 + \frac{\partial S}{\partial t} - L \leqq 0,$$

sau

$$d\,S \leqq L\, dt.$$

In cazul cînd în funcţia L se introduc valori luate pentru traectorie avem de-a face cu o egalitate, în caz contrar avem de-a face cu o inegalitate. Din rezultatul obţinut derivă numaidecît că integrala funcţiei L în raport cu timpul are valoare minimă pentru traectorie. Cu aceasta afirmaţia noastră este demonstrată.

Din demonstraţie reiese că existenţa minimului este legată de existenţa funcţiei S. Deci dacă se satisfac condiţiile care asigură existenţa funcţiei S, este asigurat şi minimul integralei care intervine în principiul Hamilton. Cînd avem de-a face cu o singură stare iniţială existenţa minimului este asigurată dacă cîmpul derivă dintr-un potenţial vector şi un potenţial scalar. Se vede deci că principiul Hamilton este o lege a interacţiunii care are loc între cîmp şi particulă, deoarece existenţa minimului este asigurată de existenţa unor funcţii de interacţiune. Prin urmare principiul Hamilton nu este o lege *numai* a punctului material. Am amintit acest lucru pentrucă unii autori au interpretat greşit acest principiu, formulînd în felul următor: punctul material alege traectoria cea mai convenabilă adică acea traectorie pentru care integrala de mai sus are valoare minimă. Din cele de mai sus rezultă că această interpretare a principiului este cu totul greşită.

7°. *Transformări de coordonate*

In cele precedente pentru descrierea mişcării punctului material, am folosit numai coordonate carteziene. Cum putem realiza transformarea ecuaţiilor de mişcare cînd trecem de la un sistem de coordonate carteziene la un sistem de coordonate curbilinii? In cazul cînd există un potenţial de cantitate de mişcare, această trecere se poate realiza foarte uşor. Integrala care intervine în principiul Hamilton este invariantă faţă de transformări de coordonate. Pentru a găsi ecuaţiile de mişcare pentru un sistem de coordonate curbilinii, se efectuează transformarea în cazul funcţiei L şi se dau ecuaţiile de mişcare în mod obişnuit. Dar poate fi folosită şi expresia diferenţială:

$$dS = P_i\, dx_i, \tag{14}$$

care îşi păstrează valoarea şi forma în cazul transformărilor de coordonate. Coordonate noi se introduc de obicei cu ajutorul ecuaţiilor:

$$x_i = x_i(q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4),\ i = 1,\ 2,\ 3,\ 4, \tag{15}$$

sau prin ecuaţiile

$$q_i = q_i(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4),\ i = 1,\ 2,\ 3,\ 4. \tag{16}$$

Aceste ecuaţii trebuie să satisfacă condiţia că pentru fiecare sistem de valori q_i să corespundă numai un singur sistem de valori x_i şi invers. Prin transformarea funcţiei $S(x_1, x_3, x_2, x_4)$ ajungem la funcţia $S'(q_1, q_2, q_3, q_4)$. Să efectuăm transformarea în ambele părţi ale ecuaţiei (14). Obţinem relaţia

$$dS' = P'_i\, dq_i,$$

unde

$$P'_i = \frac{\partial S'}{\partial q_i}, \; i = 1, 2, 3, 4.$$

Avind in vedere că dS = dS' pe baza ecuaţiilor (14) şi (15) găsim sistemul de ecuaţii:

$$P'_i = \frac{\partial x_j}{\partial q_i} P_j \quad i, j = 1, 2, 3, 4.$$

P'_i sint componentele cantităţii de mişcare generalizată. Dacă se rezolvă acest sistem de ecuaţii in raport cu cantităţile P_i, găsim ecuaţii de forma:

$$P_i = P_i\,(q_j, P'_j), \; i = 1, 2, 3, 4,$$

Avind in vedere semnificaţia funcţiilor S şi S' avem relaţia:

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} = P_i\left(q_j, \frac{\partial S'}{\partial q_j}\right). \tag{17}$$

Dacă se introduc expresiile de sub (17) in ecuaţia (8) găsim ecuaţia Hamilton-Jacobi pentru coordonate generalizate.

8°. *Transformarea Lorentz*

Pentru cazul cind punctul material are mişcarea rectilinie şi uniformă (in acest caz $\vec{A} = 0$ şi $\varphi = 0$) O. O n i c e s c u a stabilit următorul postulat:

„*Forma inerţială* Ω_δ *este invariantă pentru transformările care corespund deplasărilor sistemului de referinţă legat de punctul material în mişcare*". [4].

În lucrarea noastră rolul formei inerţiei Ω_δ îl joacă expresia diferenţială dS. Pe baza postulatului de invarianţă O. O n i c e s c u a reuşit să dea o nouă deducţie a formulelor de transformare Lorentz, o deducţie care pentru studiul mişcării mecanice este mult mai potrivită decît cea obişnuită.

În postulat se atrage atenţia asupra faptului că transformarea Lorentz face legătură între două sisteme de referinţă. Unul este în repaos (relativ), iar altul este *legat* de punctul material în mişcare.

Folosind postulatul lui O. O n i c e s c u să dăm o nouă deducere a legii compunerii vitezelor. Să examinăm mişcarea unui punct material care se mişcă in direcţia axei x_1 a sistemului de referinţă în repaos. Coordonatele măsurate in sistemul in repaos sint (x_1, x_2, x_3), iar cele măsurate in sistemul de coordonate legat de punctul material, (care se mişcă cu viteza v in direcţia axei x_1), sint (x'_1, x'_2, x'_3). Formulele care fac legătură între cele două sisteme de referinţă sint:

$$x'_1 = \beta\,(x_1 - vt), \; t' = \beta\,\left(t - \frac{v}{c^2}\,x_1\right), \tag{18}$$

Să examinăm mişcarea punctului material intr-un sistem de referinţă (q_1, q_2, q_3). Axa q_1 a acestui sistem de coordonate să coincidă cu axele x_1, x'_1. Pentru acest sistem de coordonate avem $q_4 = ic\,t_q$. Origina acestui sistem se mişcă cu viteza constantă v_q in raport cu origina sistemului de coordonate (x_1, x_2, x_3). Să căutăm formulele de transformare care fac legătura intre sistemele de coordonate (x'_1, x'_2, x'_3) şi (q_1, q_2, q_3). Avind in vedere că sistemul (q_i) se mişcă cu viteza v_q in direcţia axei x_1, se pot scrie următoarele relaţii:

$$q_1 = \beta_q(x_1 - v_q t), \; t_q = \beta_q\left(t - \frac{v_q}{c^2}\,x_1\right), \; \beta_q = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_q^2}{c^2}}}. \tag{19}$$

Rezolvind sistemul de ecuaţii de sub (19) in raport cu x_1 şi t şi dacă se introduc expresiile găsite in ecuaţiile (18) găsim relaţiile:

$$x'_1 = \beta_r\,(q_1 - v_r t_q), \; t' = \beta_r\left(t_q - \frac{v_r}{c^2}q_1\right),$$

unde

$$v_r = \frac{v - v_q}{1 - \frac{v v_q}{c^2}} \text{ şi } \beta_r = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_r^2}{c^2}}}. \tag{20}$$

Ecuaţia intiia de sub (20) este tocmai legea de compunere a vitezelor.

Observaţie: Ecuaţia fundamentală (1) are la bază următoarele ipoteze:

1. forţa are forma dată in electrodinamică;

2. dependenţa de viteză a masei este dată de relaţia $m = \beta\, m_0$. Din lucrare se vede că folosind aceste ipoteze şi folosind ecuaţia de mişcare tip Newton $(d\vec{p}/dt = \vec{K})$ se pot da ecuaţiile de mişcare ale mecanicii teoriei relativităţii restrinse. Ori ecuaţia tip Newton este o consecinţă a legii conservării cantităţii de mişcare. Deci la deducerea ecuaţiilor de mişcare ale teoriei reltivităţii restrinse se pot folosi legea conservării cantităţii de mişcare precum şi ipotezele 1 şi 2.

BIBLIOGRAFIE

1. Gábos Zoltán, *Studii şi Cercetări Ştiinţifice,* Filiala Cluj a Academiei R.P.R., I, fasc. 2, 1950, Cluj.
2. L. Landau şi E. Lifşit, *Teoria polia,* Ogiz, Moscova—Leningrad, 1948, p. 33—41, 51—60, 107—109.
3. C. Carathéodory, *Geometrische Optik,* Berlin, 1937, p. 15—16.
4. O. Onicescu, *Revista Universităţii „C. I. Parhon" şi a Politehnicii,* Bucureşti, 3, 1953, p. 23—27.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Прямой вывод уравнения Гамильтон—Якоби из уравнений типа Ньютона в теории ограниченной относительности

З. ГАБОШ и Р. В. ДЕЙТШ

Применяя метод выработанный в предшествующей работе (для классической механики), в этой работе выведено уравнение Гамильтон-Якоби ограниченной теории относителности прямо из уравнений типа Ньютона. Полученные результаты:

1. Факт, что уравнение Гамильтон—Якоби может быть выведено прямо из уравнений типа Ньютона делает возможной новую систематизацию уравнений движения. Преимущество этой систематизации заключается в том, что яснее видна связь между разными уравнениями движения, а также область их применяемости.

2. Показано, что условия, из-за которых уравнение Гамильтон—Якоби может быть прямо выведено из уравнений типа Ньютона являются в то же время достаточными условиями для обеспечения минимума интеграла, входящего в принцип Хамильтона.

3. Дается новый вывод формулы состава скоростей.

RÉSUMÉ

Déduction directe de l'équation Hamilton—Iacobi des équations du type Newton dans la théorie de la relativité restreinte

par

Z. GÁBOS et R. V. DEUTSCH

Dans le présent travail nous déduisons l'équation Hamilton—Iacobi de la théorie de la relativité restreinte directement des équations du type Newton, en appliquant une méthode élaborée dans un travail précédent (pour le cas de la mécanique classique). En voici les résultats:

1. La déduction directe de l'équation Hamilton—Iacobi des équations du type Newton permet de donner une nouvelle systématisation des équations de mouvement. L'avantage de cette systématisation consiste en ce qu'elle permet d'entrevoir plus clairement le rapport entre les différentes équations de mouvement et leur domaine d'applicabilité.

2. Les conditions qui rendent possible la déduction directe de l'équation Hamilton—Iacobi des équations du type Newton sont toujours suffisantes pour assurer le minimum de l'intégrale qui intervient dans le principe Hamilton.

3. Nous présentons aussi une nouvelle déduction de la formule de composition des vitesses.