DESPRE FUNCŢIILE UNIVALENTE (II)

DE

G. CĂLUGĂREANU

Comunicare prezentată în şedinţa din 29 mai 1954
a Filialei Cluj a Academiei R. P. R.

In teoria funcţiilor univalente este bine cunoscută teorema ariei (L.) Bieberbach), conform căreia, dacă funcţia $f(z)$, definită de dezvoltarea

$$(1) \qquad Z=f(z)=z+\frac{\alpha_1}{z}+\frac{\alpha_2}{z^2}+\cdots+\frac{\alpha_n}{z^n}+\cdots$$

este olomorfă şi univalentă inafara cercului unitate, $|z|>1$, atunci

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,|\alpha_n|^2 \leqslant 1.$$

Această condiţie necesară pentru univalenţa funcţiei $f(z)$ în domeniul $z>1$ a fost completată de Bieberbach [1] printr-o infinitate de alte condiţii necesare de aceeaşi natură, însă fără a se obţine condiţiile necesare şi suficiente.

Scopul acestei lucrări este de a stabili condiţiile necesare şi suficiente pentru univalenţa funcţiei $f(z)$ în domeniul $|z|>1$, printr-o exploatare mai completă a principiului demonstraţiei lui Bieberbach.

1. Vom face în prealabil cîteva observări de natură geometrică asupra corespondenţei planurilor (z) şi (Z) prin transformarea $Z=f(z)$, dată de (1), unde $f(z)$ este olomorfă în domeniul $|z|>1$, fără a fi şi univalentă în acest domeniu. Fie Γ_r curba analitică închisă ce corespunde cercului $|z|=r>1$ prin $Z=f(z)$. Se ştie că pentru r_0 destul de mare funcţia $f(z)$ este şi univalentă în domeniul $|z|>r_0$, deci Γ_{r_0} este o curbă simplă. Cînd z descrie cercul $|z|=r_0$ în sens direct, Z descrie curba Γ_{r_0} în sens direct, o singură dată. Curba Γ_{r_0} împarte planul în 2 domenii simplu conexe dintre care unul, $D_{r_0}^{\infty}$, conţine punctul la infinit al planului (Z), iar celălalt D_{r_0} este mărginit.

Să facem acum pe r să descrească, prin valori $r>1$. Domeniul D_r^{∞} acoperit de valorile $Z=f(z)$ pentru $|z|>r$ va creşte în dauna domeniului D_r,

pînă cînd, pentru o valoare $r_1<r_0$, $r_1>1$, curba Γ_{r_1} va prezenta puncte multiple. Aceasta poate avea loc în două împrejurări:

I. In punctul multiplu a, curba Γ_{r_1} este tangentă la ea însăşi, fără ca a să fie un punct de întoarcere.

II. Punctul multiplu a este un punct de întoarcere al curbei Γ_{r_1}. (Atunci avem $f'(a)=0$).

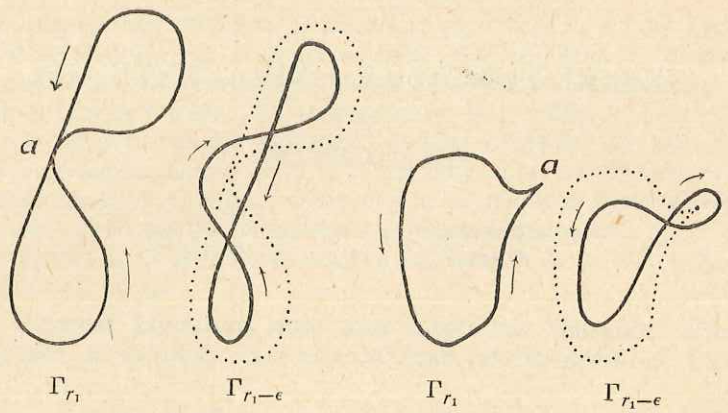

Fig. I Fig. II

In ambele cazuri, pentru o valoare $\varepsilon>0$ destul de mică, curba $\Gamma_{r_1-\epsilon}$ va avea puncte duble şi va descompune planul în mai multe domenii mărginite, dintre care cel puţin unul va avea o *arie negativă*, în sensul că frontiera acestui domeniu este descrisă în sens indirect atunci cînd z descrie cercul $|z|=r_{1-\epsilon}$ în sensul direct. De aceea integrala curbilinie

$$\int XdY-YdX \qquad (Z=X+iY)$$

aplicată arcelor de curbă $\Gamma_{r_1-\epsilon}$ care limitează acel domeniu, va avea o valoare negativă.

Aşadar, atunci cînd $f(z)$ nu este univalentă în domeniul $|z|>1$, există valori $r>1$ pentru care curba Γ_r determină arii negative. Rezultă că *pentru univalenţa funcţiei $f(z)$ în domeniul $|z|>1$ este necesar şi suficient ca nici o curbă Γ_r, $r>1$, să nu determine arii negative.*

2. Acest fapt este utilizat în demonstraţia teoremei ariilor scriindu-se

$$\int_{\Gamma_r} XdY-YdX>0\ , \quad r>1$$

şi obţinîndu-se astfel o inegalitate necesară pentru univalenţa funcţiei $f(z)$ în domeniul $|z|>1$. Putem da însă condiţii necesare şi suficiente de o natură asemănătoare, în modul următor. Fie $F(X,Y)$ un polinom oarecare. Vom

avea

$$\int_{\Gamma_r} F(X,Y)(XdY-YdX)=\iint_{\Gamma_r}\left(\frac{\partial}{\partial X}XF+\frac{\partial}{\partial Y}YF\right)dXdY=\iint_{(\Gamma_r)}\left(X\frac{\partial F}{\partial X}+Y\frac{\partial F}{\partial Y}+2F\right)dXdY$$

Integrala dublă se ia aci în diferitele domenii mărginite, determinate de curba Γ_r, afectate fiecare cu cîte un indice întreg, pozitiv sau negativ, după o regulă cunoscută[2]). Să determinăm polinomul $F(X,Y)$ astfel încît să avem

$$X\frac{\partial F}{\partial X}+Y\frac{\partial F}{\partial Y}+2F=|P(Z)|^2$$

unde $P(Z)$ e un polinom oarecare, de gradul n. Aceasta se mai scrie, notînd $F_1(Z,\bar{Z})=F(X,Y)$

$$Z\frac{\partial F_1}{\partial Z}+\bar{Z}\frac{\partial F_1}{\partial \bar{Z}}+2F_1=P(Z)\overline{P(Z)}\ .$$

Scriind

$$P(Z)\overline{P(Z)}=\varphi_0+\varphi_1(Z,\bar{Z})+\cdots+\varphi_{2n}(Z,\bar{Z})$$

unde $\varphi_k(Z,\bar{Z})$ conţine omogen toţi termenii de grad k ai polinomului din primul membru, apoi

$$F_1(Z,\bar{Z})=\psi_0+\psi_1(Z,\bar{Z})+\cdots+\psi_{2n}(Z,\bar{Z})$$

cu aceeaşi convenţie, vom avea, ţinînd seama de omogenitate,

$$Z\frac{\partial\psi_k}{\partial Z}+\bar{Z}\frac{\partial\psi_k}{\partial\bar{Z}}=k\psi_k$$

şi ecuaţia de mai sus se scrie

$$\sum_{k=0}^{2n}(k+2)\psi_k=\sum_{k=0}^{2n}\varphi_k\ .$$

Ecuaţia va fi verificată luînd

$$\psi_k=\frac{\varphi_k}{k+2}, \quad \text{deci} \quad F_1=\sum_{k=0}^{2n}\frac{\varphi_k(Z,\bar{Z})}{k+2}\ .$$

In definitiv

$$\int_{\Gamma_r} F_1(Z,\bar{Z})(XdY-YdX)=\iint_{(\Gamma_r)}|P(Z)|^2\,dXdY>0\ . \tag{2}$$

Condiţia este evident necesară pentru ca Γ_r să nu determine arii negative, căci dacă Γ_r descompune planul în domenii de arie pozitivă (neţinînd seama de D_r^∞), şi „aria pozitiv ponderată" de mai sus va fi pozitivă oricare ar fi polinomul $P(Z)$.

Dar această condiţie este şi suficientă. Dacă $f(z)$ nu este univalentă

în domeniul $|z|>1$, integrala (2) nu poate fi pozitivă oricare ar fi polinomul $P(Z)$. In adevăr, în acest caz putem găsi o valoare $r=r_{1-\epsilon}$ pentru care Γ_r determină cel puţin un domeniu de arie negativă. Un punct al frontierei acestui domeniu poate fi unit cu punctul ∞ din planul (Z) printr-o curbă conţinută în întregime în domeniul D_r^∞. In aceste condiţii se ştie însă că[3]) putem alege polinomul $P(Z)$ astfel încît în domeniul de arie negativă el să aproximeze oricît de bine o constantă $A>0$ cît voim de mare, în timp ce el aproximează pe zero oricît de bine în celelalte domenii mărginite, definite de curba Γ_r. Vom avea deci

$$|P(Z)-A|<\epsilon$$

în domeniul de arie negativă, şi

$$|P(Z)|<\epsilon$$

în celelalte domenii. Aşadar contribuţia domeniului de arie negativă la integrala (2) va fi negativă, oricît voim de mare în valoare absolută, iar contribuţia celorlalte domenii mărginite definite de curba Γ_r va fi cît voim de mică. Rezultă că integrala (2) va fi negativă pentru o alegere convenabilă a polinomului $P(Z)$.

In definitiv, *condiţia necesară şi suficientă pentru univalenţa funcţiei $f(z)$, olomorfă în domeniul $|z|>1$, este ca integrala* (2) *să fie pozitivă oricare ar fi $r>1$, şi oricare ar fi polinomul* $P(Z)$.

3. Această condiţie se traduce fără dificultate într-o infinitate de condiţii necesare şi suficiente de univalenţă, care fac să intervină coeficienţii a_n ai dezvoltării (1), sub o formă care e analoagă celei sub care se prezintă teorema ariei. Să scriem

$$P(Z)=a_0+a_1Z+\cdots+a_nZ^n\,,\quad |P(Z)|^2=\sum_{p,q=0}^{n} a_p\bar{a}_q Z^p\bar{Z}^q$$

$$F_1(Z,\bar{Z})=\sum_{p,q=0}\frac{a_p\bar{a}_q}{p+q+2}Z^p\bar{Z}^q\,,\quad XdY-YdX=d\sigma=\mathcal{J}(\bar{Z}dZ)$$

$$I=\int_{\Gamma_r}F_1(Z,\bar{Z})\,d\sigma=\sum_{p,q=0}^{n}a_p\bar{a}_q\frac{1}{p+q+2}\int_{\Gamma_r}Z^p\bar{Z}^q\,d\sigma\,.$$

Notînd

$$\mu_{p,q}=\int_{\Gamma_r}Z_p\bar{Z}^q\,d\sigma=\int_{\Gamma_r}Z^p\bar{Z}^p\,\mathcal{J}(\bar{Z}dZ)=\bar{\mu}_{q,p}$$

condiţiile necesare şi suficiente de univalenţă sînt

$$I=\sum_{p,q=0}^{n}a_p\bar{a}_q\frac{\mu_{p,q}}{p+q+2}>0\,,\qquad n=1,2,\ldots$$

oricare ar fi întregul pozitiv n, şi coeficienţii a_p. Pentru ca această formă

hermitiană să fie pozitivă, e necesar şi suficient să avem

$$(3)\qquad \mu_{00}>0\,,\quad \begin{vmatrix}\frac{\mu_{00}}{2} & \frac{\mu_{01}}{3}\\ \frac{\mu_{10}}{3} & \frac{\mu_{11}}{4}\end{vmatrix}>0\,,\quad \begin{vmatrix}\frac{\mu_{00}}{2} & \frac{\mu_{01}}{3} & \frac{\mu_{02}}{4}\\ \frac{\mu_{10}}{3} & \frac{\mu_{11}}{4} & \frac{\mu_{12}}{5}\\ \frac{\mu_{20}}{4} & \frac{\mu_{21}}{5} & \frac{\mu_{22}}{6}\end{vmatrix}>0\,,\ldots$$

Prima condiţie, $\mu_{00}>0$, care se scrie

$$\int_{\Gamma_r}d\sigma>0$$

este aceea care conduce la teorema ariei. Dealtfel, condiţiile $\mu_{nn}>0$, evident necesare, au fost scrise de către Bieberbach[1]).

Condiţiile (3), necesare şi suficiente pentru univalenţa funcţiei $f(z)$, olomorfă în domeniul $|z|>1$, se mai scriu sub formă de integrale curbilinii multiple, astfel

$$\int_\Gamma d\sigma>0\,,\quad \iint_{\Gamma\Gamma}\bar{Z}_2\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{3}Z_1\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4}Z_2\end{vmatrix}d\sigma_1d\sigma_2>0,\quad \iiint_{\Gamma\Gamma\Gamma}\bar{Z}_2\bar{Z}_3^2\begin{vmatrix}\frac{1}{2}, & \frac{1}{3}Z_1, & \frac{1}{4}Z_1^2\\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{4}Z_2, & \frac{1}{5}Z_2^2\\ \frac{1}{4}, & \frac{1}{5}Z_3, & \frac{1}{6}Z_3^2\end{vmatrix}d\sigma_1d\sigma_2d\sigma_3>0,\ldots$$

Aci, punctele Z_1, $Z_2\ldots$ descriu independent conturul Γ, şi s-a notat $d\sigma_k=X_kdY_k-Y_kdX_k$. Sub această formă, condiţiile necesare şi suficiente sunt valabile şi în cazul cînd $X+iY$ nu formează o funcţie analitică de z, transformarea $X=X(x,y)$, $Y=Y(x,y)$ fiind continuă în domeniul $|z|>1$, şi avînd jacobianul pozitiv în acest domeniu.

Pentru a introduce coeficienţii α_n ai dezvoltării (1) în condiţiile (2), vom calcula momentele $\mu_{p,q}$. Să notăm, punînd $z=re^{i\theta}$,

$$Z=\sum_{k=-1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{r^k}e^{-ki\theta}\,,\quad \alpha_{-1}=1\,,\quad \alpha_0=0\,.$$

Avem, pentru m întreg pozitiv,

$$Z^m=\sum_{k=-m}^{\infty}\frac{B_k^m}{r^k}e^{-ki\theta}\,,\quad B_k^m=\sum_{-1}^{k+1}\alpha_{p_1}\alpha_{p_2}\ldots\alpha_{p_m}\,,\quad p_1+p_2+\cdots+p_m=k$$

$$d\sigma=XdY-YdX=\mathcal{J}(\bar{Z}dZ)=-\mathcal{J}\left(\sum_{-1}^{\infty}\frac{\bar{\alpha}_k}{r^k}e^{ki\theta}\,.\,i\sum_{-1}^{\infty}\frac{h\alpha_h}{r^h}e^{-hi\theta}\right)d\theta=$$

$$= -\mathcal{R}\left(\sum_{h,k=-1}^{\infty} \frac{h\alpha_h\bar{\alpha}_k}{r^{h+k}} e^{i(k-h)\theta}\right) d\theta = -\frac{1}{2}\sum \frac{h}{r^{h+k}}[\alpha_h\bar{\alpha}_k e^{i(k-h)\theta} + \alpha_k\bar{\alpha}_h e^{i(h-k)\theta}]\, d\theta =$$

$$= -\frac{1}{4}\sum \frac{h+k}{r^{h+k}}[\alpha_h\bar{\alpha}_k e^{i(k-h)\theta} + \alpha_k\bar{\alpha}_h e^{i(h-k)\theta}]\, d\theta = -\frac{1}{2}\sum_{h,k=-1}^{\infty} \frac{h+k}{r^{h+k}} \alpha_h\bar{\alpha}_k e^{i(k-h)\theta}\, d\theta$$

$$\mu_{pq} = \int_{\Gamma_r} Z^p\bar{Z}^q\, d\sigma = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sum_{s=-p}^{\infty} \frac{B_s^p}{r^s} e^{-si\theta} \cdot \sum_{t=-q}^{\infty} \frac{\bar{B}_t^q}{r^t} e^{ti\theta} \cdot \sum_{h,k=-1}^{\infty} \frac{h+k}{r^{h+k}} \alpha_h\bar{\alpha}_k e^{i(k-h)\theta}\, d\theta =$$

$$= -\pi \sum_{s,t,h,k} (h+k) \frac{B_s^p \bar{B}_t^q \alpha_h\bar{\alpha}_k}{r^{s+t+h+k}}, \quad -s+t+k-h=0.$$

Vom lua $s+h=t+k=n$, $h=n-s$, $k=n-t$. Punînd

$$\rho = \max(p+1,\ q+1)$$

avem

$$\mu_{pq} = -\pi\sum_{n,s,t}(2n-s-t)\frac{B_s^p\bar{B}_t^q\alpha_{n-s}\bar{\alpha}_{n-t}}{r^{2n}} = -\pi\sum_{n=-p}^{\infty}\frac{1}{r^{2n}}\sum_{s,t=-1}^{n+1}(2n-s-t)B_s^p\bar{B}_t^q\alpha_{n-s}\bar{\alpha}_{n-t}.$$

Avem însă

$$\sum_{s,t=-1}^{n+1}(2n-s-t)B_s^p\bar{B}_t^q\alpha_{n-s}\bar{\alpha}_{n-t} = 2n\sum_s B_s^p\alpha_{n-s}\cdot\sum_t \bar{B}_t^q\bar{\alpha}_{n-t} -$$

$$-\sum_s sB_s^p\alpha_{n-s}\cdot\sum_t \bar{B}_t^q\bar{\alpha}_{n-t} - \sum_s B_s^p\alpha_{n-s}\cdot\sum_t t\bar{B}_t^q\bar{\alpha}_{n-t} =$$

$$= 2nB_n^{p+1}\bar{B}_n^{q+1} - \bar{B}_n^{q+1}\sum_s sB_s^p\alpha_{n-s} - B_n^{p+1}\cdot\sum_t t\bar{B}_t^q\bar{\alpha}_{n-t}.$$

Să notăm

$$E_{n,p+1} = \sum_{s=-1}^{n+1} sB_s^p\alpha_{n-s} = \sum_{-1}^{n+1}(n-i_1)\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\cdots\alpha_{i_{p-1}},\quad i_1+i_2+\cdots+i_{p+1}=n$$

Putînd permuta aci indicii, avem

$$E_{n,p+1} = \sum_{-1}^{n+1}(n-i_1)\alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_{p+1}} = \sum_{1}^{n+1}(n-i_2)\alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_{p+1}} = \cdots = \frac{p^n}{p+1}B_n^{p+1}.$$

Așadar

$$\mu_{pq} = -\pi\sum_{n=-\rho}^{\infty}\frac{1}{r^{2n}}(2nB_n^{p+1}\bar{B}_n^{q+1} - E_{n,p+1}\bar{B}_n^{q+1} - \bar{E}_{n,q+1}B_n^{p+1}) =$$

$$= -\pi\sum_{n=-\rho}^{\infty}\frac{n}{r^{2n}}\left(2-\frac{p}{p+1}-\frac{q}{q+1}\right)B_n^{p+1}\bar{B}_n^{q+1} = -\pi\left(\frac{1}{p+1}+\frac{1}{q+1}\right)\sum_{n=-\rho}^{\infty}\frac{n}{r^{2n}}B_n^{p+1}\bar{B}_n^{q+1}$$

deci

$$\frac{\mu_{pq}}{p+q+2} = -\frac{\pi}{(p+1)(q+1)}\sum_{n=-\rho}^{\infty}\frac{n}{r^{2n}}B_n^{p+1}\bar{B}_n^{q+1}. \tag{4}$$

Avem $B_n^1 = \alpha_n$, deci condiția $\mu_{00} > 0$ ne dă

$$\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{n}{r^{2n}}|\alpha_n|^2 < 0$$

care exprimă teorema ariei. Condițiile $\mu_{pp} > 0$ ne dau inegalitățile

$$\sum_{n=-p-1}^{\infty}\frac{n}{r^{2n}}|B_n^{p+1}|^2 < 0,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{r^{2n}}|B_n^{p+1}|^2 < (p+1)r^{2(p+1)}|B_{-p-1}^{p+1}|^2 + \cdots + r^2|B_{-1}^{p+1}|_2 \tag{5}$$

obținute de Bieberbach. Se vede că seriile $\sum_1^{\infty} n|B_n^p|^2$ converg, oricare ar fi $p > 0$. Avem în special

$$\sum_1^{\infty} n|B_n^2|^2 \leqslant 2,\quad \sum_1^{\infty} n|B_n^3|^2 \leqslant 3 + 9|\alpha_1|^2.$$

Însă condițiile necesare și suficiente se obțin scriind inegalitățile (3). Avem

$$\begin{vmatrix} \frac{\mu_{00}}{2} & \frac{\mu_{01}}{3} \\ \frac{\mu_{10}}{3} & \frac{\mu_{11}}{4} \end{vmatrix} = \frac{\pi^2}{4}\sum_{-2}^{\infty}\frac{n_1n_2}{r^{2(n_1+n_2)}}\begin{vmatrix} \bar{B}_{n_1}^1 & B_{n_2}^1 \\ \bar{B}_{n_1}^2 & \bar{B}_{n_2}^2 \end{vmatrix} B_{n_1}^1 B_{n_2}^2 = \frac{\pi^2}{8}\sum_{-2}^{\infty}\frac{n_1n_2}{r^{2(n_1+n_2)}}|D_{n_1,n_2}^{12}|^2$$

notînd

$$D_{n_1n_2}^{12} = \begin{vmatrix} B_{n_1}^1 & B_{n_1}^2 \\ B_{n_2}^1 & B_{n_2}^2 \end{vmatrix}.$$

De altfel avem, pentru $s < t$,

$$\begin{vmatrix} \frac{\mu_{ss}}{2s+2} & \frac{\mu_{st}}{s+t+2} \\ \frac{\mu_{ts}}{s+t+2} & \frac{\mu_{tt}}{2t+2} \end{vmatrix} = \frac{\pi^2}{2(s+1)(t+1)}\sum_{-(t+1)}^{\infty}\frac{n_1n_2}{r^{2(n_1+n_2)}}|D_{n_1n_2}^{st}|^2 > 0.$$

Așadar a doua condiție este, făcînd $r = 1$,

$$\sum_{n_1,n_2=-2}^{\infty} n_1n_2|D_{n_1n_2}^{12}|^2 > 0. \tag{6}$$

În același mod se vede că avem

$$\begin{vmatrix} \frac{\mu_{00}}{2} & \frac{\mu_{01}}{3} & \frac{\mu_{02}}{4} \\ \frac{\mu_{10}}{3} & \frac{\mu_{11}}{4} & \frac{\mu_{12}}{5} \\ \frac{\mu_{20}}{4} & \frac{\mu_{21}}{5} & \frac{\mu_{22}}{6} \end{vmatrix} = -\frac{\pi^3}{216}\sum_{-3}^{\infty}\frac{n_1n_2n_3}{r^{2(n_1+n_2+n_3)}}|D_{n_1n_2n_3}^{123}|^2 > 0$$

deci condiția

$$(7)\qquad \sum_{n_1,n_2,n_3=-3}^{\infty} \frac{n_1 n_2 n_3}{r^{2(n_1+n_2+n_3)}} \left| D^{2\,3\,1}_{n_1 n_2 n_3} \right|^2 < 0$$

notînd

$$D^{p\,q\,r}_{n_1 n_2 n_3} = \begin{vmatrix} B^p_{n_1} & B^q_{n_1} & B^r_{n_1} \\ B^p_{n_2} & B^q_{n_2} & B^r_{n_2} \\ B^p_{n_3} & B^q_{n_3} & B^r_{n_3} \end{vmatrix}$$

In definitiv, condițiile necesare și suficiente pentru univalența funcției $f(z)$ dată de dezvoltarea (1), holomorfă in domeniul $|z| > 1$, sînt

$$(8)\qquad (-1)^p \sum_{n_1,\dots,n_p=-p}^{\infty} \frac{n_1 n_2 \dots n_p}{r^{2(n_1+\dots+n_p)}} \left| D^{1\,2\dots p}_{n_1 n_2 \dots n_p} \right|^2 > 0\,,\quad r > 1$$

Am notat in general

$$D^{s_1 s_2 \dots s_p}_{n_1 n_2 \dots n_p} = \left| B^{s_j}_{n_i} \right|.$$

4. Să analizăm acum aceste condiții. Deoarece determinanții D sînt nuli orideciteori 2 indici inferiori sau 2 indici superiori devin egali, în suma (8) putem lua indicii $n_1, \dots, n_p$ diferiți, și chiar $n_1 < n_2 < n_3 < \dots n_p$. Condiția (6) se scrie

$$2r^6 \left| D^{1\,2}_{-2,-1} \right|^2 - 2r^4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{r^{2n}} \left| D^{1\,2}_{-2,n} \right|^2 - r^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{r^{2n}} \left| D^{1\,2}_{-1,n} \right|^2 + \sum_{n_1,n_2=1}^{\infty} \frac{n_1 n_2}{r^{2(n_1+n_2)}} \left| D^{1\,2}_{n_1 n_2} \right|^2 > 0$$

deci

$$2r^4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{r^{2n}} \left| D^{1\,2}_{-2,n} \right|^2 + r^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{r^{2n}} \left| D^{1\,2}_{-1,n} \right|^2 < 2r^6 \left| D^{1\,2}_{-2,-1} \right|^2 + \sum_{n_1,n_2=1}^{\infty} \frac{n_1 n_2}{2(n_1+n_2)} \left| D^{1\,2}_{n_1 n_2} \right|^2.$$

Avem

$$D^{1\,2}_{-2,-1} = -1,\ D^{1\,2}_{-2,n} = -\alpha_n\,,\ D^{1\,2}_{-1,n} = B^2_n$$

deci

$$2r^4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{r^{2n}} \left| \alpha_n \right|^2 + r^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{r^{2n}} \left| B^2_n \right|^2 < 2r^6 + \sum_{n_1,n_2=1}^{\infty} \frac{n_1 n_2}{r^{2(n_1+n_2)}} \left| D^{1\,2}_{n_1 n_2} \right|^2.$$

Aplicind o generalizare a identității lui Lagrange, avem

$$\sum_{n_1<n_2}^{\infty} \frac{n_1 n_2}{r^{2(n_1+n_2)}} \left| D^{1\,2}_{n_1 n_2} \right|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{r^{2n}} \left| \alpha_n \right|^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{r^{2n}} \left| B^2_n \right|^2 - \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{r^{2n}} \alpha_n \overline{B}^2_n \right|^2.$$

Ținind seama de (5) pentru $p = 1$, vedem că seriile sînt convergente și pentru $r = 1$, deci obținem

$$(9)\qquad \sum_{n_1,n_2=1}^{\infty} n_1 n_2 \left| D^{1\,2}_{n_1 n_2} \right|^2 \geqslant \sum n \left| B^2_n \right|^2 - 2\left(1 - \sum n \left| \alpha_n \right|^2\right).$$

Aplicind direct condiția (3) sub forma $8\,|\mu_{01}|^2 \leqslant 9\,\mu_{00}\mu_{11}$, obținem

$$(10)\qquad \left| \sum_{n=1}^{\infty} n\,\alpha_n \overline{B}^2_n \right|^2 \leqslant \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} n \left| \alpha_n \right|^2\right)\left(2 - \sum_{n=1}^{\infty} n \left| B^2_n \right|^2\right).$$

De aci, ca și din (5) rezultă

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left| B^2_n \right|^2 \leqslant 2\,.$$

Așadar, condiția (6) ne duce la inegalitatea (10), al cărei inconvenient este că mărginește superior modulul unei sume infinite. Sub forma (9), inegalitatea ne poate da condiții în termeni finiți pentru coeficienții α_n dacă membrul II este pozitiv. Trecind la inegalitatea (7), putem obține insă inegalități in termeni finiți, și tot astfel în cazul general (8), pentru p impar. Făcind $r = 1$, avem

$$-6\left|D^{1\,2\,3}_{-3,-2,-1}\right|^2 + 6\sum_1^{\infty} n \left|D^{1\,2\,3}_{-3,-2,n}\right|^2 + 2\sum_1^{\infty} n \left|D^{1\,2\,3}_{-2,-1,n}\right|^2 + 3\sum_1^{\infty} n \left|D^{1\,2\,3}_{-3,-1,n}\right|^2$$

$$-3\sum_1^{\infty} n_1 n_2 \left|D^{1\,2\,3}_{-3,n_1,n_2}\right|^2 - 2\sum_1^{\infty} n_1 n_2 \left|D^{1\,2\,3}_{-2,n_1,n_2}\right|^2 - \sum_1^{\infty} n_1 n_2 \left|D^{1\,2\,3}_{-1,n_1,n_2}\right|^2 +$$

$$+ \sum_1^{\infty} n_1 n_2 n_3 \left|D^{1\,2\,3}_{n_1 n_2 n_3}\right|^2 \leqslant 0\,.$$

Avem $D^{1\,2\,3}_{-3,-2,-1} = -1$, $D^{1\,2\,3}_{-3,-2,n} = -\alpha_n$, $D^{1\,2\,3}_{-2,-1,n} = -B^3_n$, $D^{1\,2\,3}_{-3,-1,n} = B^2_n$, $D^{1\,2\,3}_{-3,n_1,n_2} = D^{1\,2}_{n_1 n_2}$, $D^{1\,2\,3}_{-2,n_1,n_2} = -D^{1\,2}_{n_1 n_2}$, $D^{1\,2\,3}_{-1,n_1,n_2} = D^{2\,3}_{n_1 n_2}$, așadar

$$\sum_1^{\infty} n_1 n_2 n_3 \left|D^{1\,2\,3}_{n_1 n_2 n_3}\right|^2 \leqslant 6\left(1 - \sum n \left|\alpha_n\right|^2\right) + 3\left(\sum n_1 n_2 \left|D^{1\,2}_{n_1 n_2}\right|^2 - \sum n \left|B^2_n\right|^2\right) +$$

$$+ 2\left(\sum n_1 n_2 \left|D^{1\,3}_{n_1 n_2}\right|^2 - \sum n \left|B^3_n\right|^2\right) + \sum n_1 n_2 \left|D^{2\,3}_{n_1 n_2}\right|^2.$$

Generalizind inegalitatea lui Lagrange, avem

$$\sum_{\substack{1 \\ n_1<n_2}}^{\infty} n_1 n_2 \left|D^{p\,q}_{n_1 n_2}\right|^2 = \sum_1^{\infty} n_1 \left|B^p_{n_1}\right|^2 \cdot \sum_1^{\infty} n_2 \left|B^q_{n_2}\right|^2 - \left|\sum_1^{\infty} n\, B^p_n \overline{B}^q_n\right|^2$$

$$\sum_1^{\infty} n_1 n_2 n_3 \left|D^{p\,q\,r}_{n_1 n_2 n_3}\right|^2 = \begin{vmatrix} \sum n \left|B^p_n\right|^2 & \sum n\, B^p_n \overline{B}^q_n & \sum n\, B^p_n \overline{B}^r_n \\ \sum n\, B^q_n \overline{B}^p_n & \sum n \left|B^q_n\right|^2 & \sum n\, B^q_n B^r_n \\ \sum n\, B^r_n \overline{B}^p_n & \sum n\, B^r_n \overline{B}^q_n & \sum n \left|B^r_n\right|^2 \end{vmatrix}, \text{ etc.}$$

care arată că toate seriile $\sum_1^{\infty} n_1 n_2 \cdots n_p \left|D^{s_1 s_2 \dots s_p}_{n_1 n_2 \dots n_p}\right|^2$ sînt convergente.

Obținem astfel

$$\sum_1^\infty n_1n_2n_3 \left| D^{1\,2\,3}_{n_1n_2n_3} \right|^2 \leqslant 3\left(1-\sum_1^\infty n\,|\alpha_n|^2\right)\left(2-\sum_1^\infty n\,|B_n^2|^2\right)-3\left|\sum_1^\infty n\,\alpha_n \overline{B}_n^2\right|^2 -$$

$$-2\left(1-\sum_1^\infty n|\alpha_n|^2\right)\sum_1^\infty n|B_n^3|^2-2\left|\sum_1^\infty n\alpha_n B_n^3\right|^2+\sum_1^\infty n|B_n^2|^2\cdot\sum_1^\infty n|B_n^3|^2-\left|\sum_1^\infty nB_n^2\overline{B}_n^3\right|^2$$

deci, majorînd membrul II,

$$\sum_1^\infty n_1n_2n_3 \left| D^{1\,2\,3}_{n_1n_2n_3} \right|^2 \leqslant 6\,(1-|\alpha_1|^2)+2(3+9\,|\alpha_1|^2) = 12\,(1+|\alpha_1|^2)$$

din care rezultă, oricare ar fi întregii pozitivi n_1, n_2, n_3

$$\left| D^{1\,2\,3}_{n_1n_2n_3} \right|^2 \leqslant \frac{12\,(1+|\alpha_1|^2)}{n_1n_2n_3}.$$

Avem aci o infinitate de inegalități în termeni finiți pentru coeficienții α_n. Cercetarea consecințelor acestor inegalități va face obiectul unei alte lucrări.

5. Să observăm că metoda indicată mai sus ne poate da și condițiile necesare și suficiente pentru ca reprezentarea $Z = z + \frac{\alpha_1}{z} + \cdots$ să se facă pe un domeniu stelat. E necesar și suficient să avem

$$d\sigma = XdY - YdX \geqslant 0$$

dealungul curbei Γ_r, deci

$$\int_0^{2\pi} |P(\cos\theta,\ \sin\theta)|^2\, d\sigma > 0$$

oricare ar fi polinomul trigonometric P. Luînd

$$P = a_0 + a_1e^{i\theta} + a_2e^{2i\theta} + \cdots + a_ne^{ni\theta}$$

avem

$$\sum_{p,q} a_p\bar{a}_q \int_0^{2\pi} e^{i(p-q)\theta}\, d\sigma > 0 \qquad \text{sau} \qquad \sum_{p,q} a_p\bar{a}_q\, \nu_{p-q} > 0$$

unde am notat

$$\nu_k = \int_0^{2\pi} e^{ki\theta}\, d\sigma = \bar{\nu}_{-k}.$$

Condiția e și suficientă, căci dacă $d\sigma$ ar fi negativ pe un arc $(\theta_1,\ \theta_2)$ al cercului unitate, am putea alege polinomul trigonometric așa încît să aproximeze o constantă $A>0$ oricît de mare pe arcul $(\theta_1,\ \theta_2)$, și să aproximeze pe 0 în restul intervalului $(0, 2\pi)$. Integrala ar fi negativă pentru A

destul de mare. Deci, forma hermitiană de mai sus fiind pozitivă, avem condițiile necesare și suficiente

$$\nu_0 > 0,\quad \begin{vmatrix} \nu_0 & \nu_1 \\ \nu_{-1} & \nu_0 \end{vmatrix} > 0,\quad \begin{vmatrix} \nu_0 & \nu_1 & \nu_2 \\ \nu_{-1} & \nu_0 & \nu_1 \\ \nu_{-2} & \nu_{-1} & \nu_0 \end{vmatrix} >,\ \text{etc.}$$

Acestea se mai scriu

$$\int_\Gamma d\sigma > 0,\ \iint_\Gamma |e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2}|^2\, d\sigma_1 d\sigma_2 > 0,\ \iiint_\Gamma |e^{i\theta_2}-e^{i\theta_3}|^2\,|e^{i\theta_3}-e^{i\theta_1}|^2\,|e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2}|^2$$

$$d\sigma_1 d\sigma_2 d\sigma_3 > 0,\ \ldots$$

In general putem scrie

$$\iint\cdots\int_\Gamma |V(e^{i\theta_1},\ e^{i\theta_2},\ \ldots,\ e^{i\theta_n})|^2\, d\sigma_1 d\sigma_2 \ldots d\sigma_n > 0.$$

De altfel avem

$$\nu_k = -\frac{1}{2}\sum_{s,t=-1}^{\infty} \frac{s+t}{r^{s+t}}\,\alpha_s\bar{\alpha}_t \int_0^{2\pi} e^{i(k+t-s)\theta}\, d\theta = -\pi\sum_{t=-1}^{\infty}\frac{2t+k}{r^{2t+k}}\,\alpha_{t+k}\,\bar{\alpha}_t$$

Pentru $r = 1$ avem

$$\nu_k = -\pi\sum_{-1}^{\infty}(2n+k)\,\alpha_{n+k}\,\bar{\alpha}_n$$

și aceste formule permit explicitarea condițiilor și studiul lor.

(Lucrare depusă la data de 6 apr. 1954).

Catedra de teoria funcțiilor
Universitatea „V. Babeș", Cluj

BIBLIOGRAFIE

1). L. Bieberbach, *Einführung in die konforme Abbildung*, 3-tte Aufl., Samml Göschen, 1937.
2). E. Goursat, *Cours d'Analyse math.*, t. I, 3-me éd., pp. 230—31.
3). P. Montel, *Séries de polynomes à une variable complexe*. Coll. Borel, 1910, pp. 97—100.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

О оцновалентных функциях (II)

Г. КЭЛУГЭРЯНУ

Работа содержит необходимые и достаточные условия для того чтобы функция $f(z)$, представленная (1) была голоморфной и одновалетной в области $|z| > 1$. Результат получается путем полного использования принципа, приведшего L. Bieberbach'a к теореме площади, и применения классического свойства эрмитовых форм. Необходимые и достаточные условия одновалентности записываются в форме XXX (8), где определители D содержат по

конечному числу коэффициентов α развития (1). Для нечетных p получаются таким образом неравнества в конечных членах для этих коэффициентов. Аналогичный метод применяется для функций $f(z)$, применяющим область $|z| > 1$ вне звездчатой области.

RÉSUMÉ

Sur les fonctions univalentes (II)

par

G. CĂLUGĂREANU

Ce travail contient les conditions nécessaires et suffisantes pour l'univalence de la fonction $f(z)$, représentée par (1), holomorphe dans le domaine $|z|>1$. On arrive à ce résultat en exploitant complètement le principe qui a conduit L. Bieberbach à son théorème de l'aire, et en y appliquant une propriété classique des formes hermitiennes. Ces conditions nécessaires et suffisantes d'univalence prennent la forme (8), les déterminants D contenant chacun un nombre fini de coefficients α. Pour p impair, on en déduit des inégalités en termes finis pour ces coefficients. Une méthode analogue y est appliquée aux fonctions $f(z)$ qui représentent le domaine $|z|>1$ sur l'extérieur d'un domaine étoilé.