CLASIFICAREA SUPRAFEŢELOR PE BAZA GEOMETRIEI LOR INTRINSECI

DE

E. GERGELY

Comunicare prezentată în şedinţa din 15 februarie 1954 a Filialei Cluj a Academiei R. P. R.

I. Introducere

Scopul articolului de faţă este clasificarea suprafeţelor din punctul de vedere al proprietăţilor topologice ale geometriei lor intrinseci.

Clasificarea topologică a suprafeţelor în spaţiul cu trei dimensiuni este o chestiune rezolvată. Vom da aici o clasificare cu alt caracter. Nu echivalenţa topologică, ci geometria intrinsecă „ în mare" va fi punctul de vedere al clasificării.

Vom înţelege prin suprafaţă o mulţime de puncte în spaţiul euclidian cu trei dimensiuni, în care orice punct are o vecinătate omeomorfă cu interiorul unui cerc şi în care două puncte oarecare pot fi legate de un arc de curbă continuă. Arcul de curbă continuă este imaginea continuă a unui segment de dreaptă, iar curba continuă închisă este imaginea continuă a unui cerc. Clasa de suprafeţe, astfel definită, o restrîngem prin condiţia ca între două puncte oarecare ale suprafeţei să existe o curbă continuă de lungime finită. Mai jos vom admite încă două ipoteze respective.

In această lucrare noţiunea de geometrie intrinsecă este întrebuinţată în sensul creat de A. D. Alexandrov, Cohn-Vossen şi alţii. Ea a fost elaborată pentru chestiunile fundamentale ale suprafeţelor convexe.

In cercetările de geometria suprafeţelor, care lucrează cu metodele geometriei diferenţiale, instrumentul matematic întrebuinţat determină limite naturale. Cu această metodă se studiază în primul rînd proprietăţile în vecinătatea unui punct, aşa numitele proprietăţi „în mic", iar în al doilea rînd se limitează la o clasă de suprafeţe relativ restrînsă, deoarece se presupune că funcţiile care intervin sînt derivabile de cîteva ori şi astfel numai suprafeţele destul de „netede" sînt cercetate. Proprietăţile „în mare", relative la toată suprafaţa sau la o parte mai mare a ei, sînt accesibile numai într-o măsură mică metodelor geometriei diferenţiale şi cu mari greutăţi. Geometria integrală ajunge la anumite rezultate în această direcţie cu mijloacele analizei, dar multe clase de suprafeţe, importante din punct de vedere practic, rămîn în afara sferei de cercetare, ca de exemplu poliedrele. Geometria intrinsecă în mare a poliedrelor nu se încadrează în geometria diferenţială. Mai departe, rămîn nestudiate suprafeţele cu muchii drepte sau curbe, cu vîrfuri, cu feţe curbe sau cu feţe curbe şi plane, de exemplu suprafaţa lentilelor optice ş.a.m.d.

Matematicienii sovietici, care lucrează în acest domeniu, pornesc direct de la definiţia suprafeţei şi folosesc numai continuitatea curbelor, care leagă două puncte de pe suprafaţă, lungimea lor finită şi echivalenţa topologică a vecinătăţilor cu un cerc. In geometria astfel definită, noţiunea fundamentală este distanţa între două puncte ale suprafeţei. Prin această distanţă se înţelege marginea inferioară exactă a lungimilor tuturor curbelor de pe suprafaţă, care leagă cele două puncte considerate. Prin această introducere a distanţei suprafaţa devine un spaţiu metric şi geometria intrinsecă a suprafeţei este totalitatea proprietăţilor spaţiului metric astfel definit. Noţiuni ale geometriei intrinseci, ca unghiul, aria, curbura, etc., se definesc numai cu ajutorul acestei distanţe.

Este evident, că prin aceasta, pe de o parte se atrage în cîmpul cercetării o clasă mai vastă de suprafeţe, pe de altă parte cercetarea geometrică se eliberează din cadrul „în mic" şi cercetarea globală „în mare" devine accesibilă.

In lucrarea de mare importanţă a lui A. D. Alexandrov din 1948, premiată cu premiul Stalin, „Geometria intrinsecă a suprafeţelor convexe", autorul cercetează din acest punct de vedere în primul rînd suprafeţele convexe. (In cele ce urmează mă voi referi la această operă prin: Alexandrov).

Este necesar să vedem pe scurt cercetările lui Alexandrov, deoarece vom utiliza rezultatele lui. Prin corp convex se înţelege o mulţime de puncte în spaţiul euclidian cu trei dimensiuni, care are puncte interioare şi care conţine fiecare punct al segmentului determinat de două puncte oarecare al mulţimii. Suprafaţa convexă este frontiera corpului convex sau o parte din această frontieră. Linia cea mai scurtă între două puncte ale suprafeţei este aceea a cărei lungime este egală cu distanţa celor două puncte. In ceea ce priveşte existenţa liniilor celor mai scurte şi condiţiile lor de existenţă mă refer la lucrarea lui Alexandrov. Definiţia unghiului liniilor celor mai scurte se bazează pe noţiunea de distanţă, deci se fundamentează pe geometria intrinsecă, fără utilizarea tangentelor şi unghiului lor. Măsura mulţimilor de puncte de pe suprafaţă este o noţiune importantă în geometria intrinsecă. Bazîndu-se pe ea, tratează curbura mulţimii de puncte pe suprafaţă şi prin aceasta curbura părţilor de suprafaţă şi a suprafeţei rămînînd în cercul de noţiuni al spaţiului metric definit. Dă condiţii pentru realizarea suprafeţei convexe, care are o metrică dată pe sferă (pentru detalii vezi Alexandrov).

Se vede deci că cercetările de geometria suprafeţei în direcţia arătată de A. D. Alexandrov sînt importante din punct de vedere practic şi teoretic. Ele descoperă proprietăţi, care nu pot fi găsite prin geometria diferenţială

şi astfel contribuie în măsură considerabilă la realizarea scopului geometriei: a face cît mai completă cunoaşterea proprietăţilor spaţiale ale materiei.

II. Clasificarea suprafeţelor pe baza geometriei intrinseci.

§ 1. Puncte cu vecinătate convexă. Porţiunile convexe şi neconvexe ale suprafeţei.

Punctele suprafeţei, care au o vecinătate cu metrica convexă în sensul lui Alexandrov, sînt numite puncte cu vecinătate convexă. Vecinătatea are o metrică convexă a lui Alexandrov dacă două puncte oarecari ale vecinătăţii pot fi unite cu cea mai scurtă linie şi dacă condiţia de convexitate este satisfăcută (vezi Alexandrov).

Această definiţie a punctelor cu vecinătate convexă are un caracter de geometrie intrinsecă pură, deoarece utilizează numai astfel de proprietăţi. De aceea este valabilă şi în acel caz, cînd facem abstracţie de spaţiul în care se află suprafaţa şi considerăm suprafaţa ca un spaţiu metric .

Putem însă defini punctele cu vecinătate convexă şi cu ajutorul spaţiului cu trei dimensiuni, în care se află suprafaţa, deci cu elemente spaţionale din afara suprafeţei. Această definiţie e mai intuitivă, dar nu intră în cadrul metodelor pure ale geometriei intrinseci. Un punct al suprafeţei este cu vecinătate convexă, dacă are o vecintătate în care fiecărui punct îi corespunde un astfel de plan, că celelalte puncte ale vecinătăţii sînt pe o aceiaşi parte a planului sau în plan.

Un asemenea plan va fi numit în cele ce urmează plan local de sprijin, spre deosebire de planul obişnuit de sprijin ,faţă de care toată suprafaţa se află la o aceiaşi parte.

Cele două definiţii ale punctelor cu vecinătate convexă sînt echivalente. După rezultatele lui A. D. Alexandrov vecinătatea care apare în definiţia cu planul local de sprijin este o parte din suprafaţa unui corp convex şi astfel se bucură de toate proprietăţile metricei convexe. Deci punctul cu vecinătate convexă în sensul definiţiei a doua este cu vecinătate convexă şi în sensul primei definiţii. Pe de altă parte într-o vecinătate convexă a primei definiţii este valabilă metrica convexă şi deoarece suprafaţa în spaţiul cu trei dimensiuni poate fi realizată numai cu o parte dintr-o suprafaţă convexă, la care corespunde un plan local de sprijin în fiecare punct, iar partea de suprafaţă este aşezată pe o parte a acestui plan sau în plan.

O mulţime convexă de puncte cu vecinătate convexă se numeşte domeniu convex.

Teorema 1. Orice domeniu convex este un domeniu în sens obişnuit (o mulţime convexă şi conţinînd numai puncte interioare ale spaţiului metric).

Teorema este o consecinţă imediată a definiţiei domeniului convex. Fiecare punct al domeniului convex are o vecinătate convexă, iar aceasta pe baza definiţiei conţine numai puncte cu vecinătate convexă, deci fiecare punct al domeniului convex este punct interior.

Suprafeţele convexe au numai puncte cu vecinătatea convexă.

Punctele fără vecinătate convexă, formează domenii închise, curbe sau puncte izolate. Totalitatea lor e mulțimea complementară a domeniilor convexe.

Exemple: 1) Pe tor punctele cu vecinătatea convexă sînt punctele eliptice ale suprafeței pînă la cercurile paralele de separare. In aceste puncte planul local de sprijin este planul tangent, care e totodată și plan de sprijin obișnuit, deoarece întreaga suprafață se află pe o parte a planului. Mulțimea complementară se compune din punctele iperbolice ale torului și din cele două cercuri de separare. Punctele cercului de separare au un plan tangent comun. Un punct al cercului de separare nu are nici o vecinătate, în care fiecare punct ar poseda cîte un plan local de sprijin și la fel nu există plan local de sprijin pentru punctele iperbolice. Deci pe tor avem un singur domeniu convex; mulțimea lui complementară este un domeniu închis.

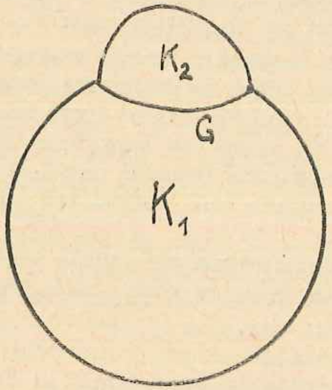

Fig. 1

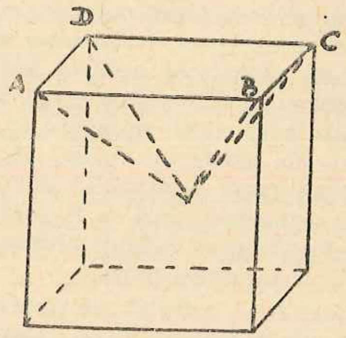

Fig. 2

2) Iperboloidul cu o pînză nu are niciun punct cu vecinătate convexă. Nu are niciun domeniu convex.

3) Așezăm pe suprafața unei sfere o altă sferă secantă de rază mai mică sau egală și păstrăm din suprafața fiecărei sfere partea exterioară celeilalte. Suprafața obținută nu este convexă, ea se compune din două domenii convexe. Punctele lor sînt cu vecinătate convexă. Mulțimea complementară (mulțimea punctelor fără vecinătate convexă) se compune din cercul de intersecție al celor două sfere. In adevăr, punctele cercului de intersecție sînt fără vecinătate convexă. Pe ele condiția de convexitate nu este satisfăcută și ele nici nu au plan local de sprijin în sensul introdus mai înainte (fig. 1).

4) Inlocuim una din fețele unui cub prin triunghiuri, avînd ca vîrf centrul cubului și ca bază laturile feței înlocuite. Suprafața obținută nu este convexă. Condiția de convexitate nu este verificată în punctele A, B, C și D. In celelalte puncte ale suprafeței ea este verificată. Mulțimea complementară se compune numai din punctele A, B, C, și D. Domeniul convex este suprafața întreagă, din care se îndepărtează aceste patru puncte.

§ 2. Frontierele domeniilor convexe.

Teorema 2. Frontiera unui domeniu convex se compune din curbe continue și puncte izolate.

Teorema 1 arată că punctele cu vecinătate convexă formează domenii deschise pe suprafață.

Punctele-frontieră ale acestora pot avea vecinătăți conținînd numai puncte cu vecinătatea convexă cu excepția punctului considerat, precum arată exemplul 4. din § 1. Aceste puncte vor fi numite *puncte izolate de separare* și existența lor arată tocmai exemplul amintit.

Dacă punctul A este un punct-frontieră neizolat al unui domeniu convex, atunci toate vecinătățile conțin și puncte cu vecinătate convexă și puncte fără vecinătate convexă. Punctul A fiind pe suprafață, are o vecinătate omeomorfă cu un cerc. Intersecția acestei vecinătăți cu domeniu convex considerat fiind iarăși un domeniu va avea ca imagine topologică pe

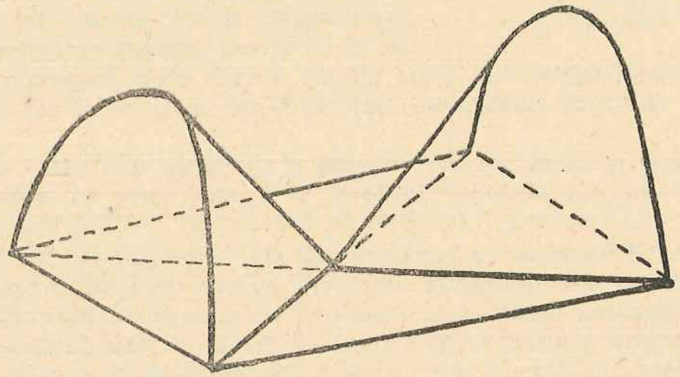

Fig. 3

cerc de asemenea un domeniu. Avînd în vedere proprietatea frontierei domeniului plan de conexiune n, putem afirma că imaginea intersecției are o frontieră compusă din n continuuri. In cele ce urmează ne ocupăm numai cu suprafețe, la care aceste continuuri sînt curbe continue. Vecinătatea punctului A poate fi aleasă în așa fel, ca intersecția ei cu domeniul convex să fie un domeniu simplu conex și astfel acea porțiune a frontierei domeniului convex considerat, care se află în vecinătatea noastră este un arc de curbă continuă, ca și imaginea sa topologică pe cerc și este un singur arc de curbă continuă, care trece prin punctul A. Astfel, frontiera domeniului convex considerat se compune din arcuri de curbe continue care se racordează între ele și deci frontiera se compune dintr-o singură sau mai multe curbe continue. Prin restricția făcută am eliminat numai suprafețe cu o structură cu totul deosebită.

Frontiera domeniului convex mărginit se compune din curbe continue, unele din ele putînd fi puncte singulare izolate. Domeniul convex nemărginit are o frontieră deschisă, conținînd curbe continue și eventual puncte izolate.

Curbele și punctele izolate, care compun frontiera domeniilor convexe, vor fi numite *curbe de separare* respectiv *puncte izolate de separare*.

Observație. Din definiția suprafeței rezultă că suprafețele noastre nu pot avea linii multiple, nu se pot tăia pe ele însele și nici nu pot fi tangente la ele însele. Intr-adevăr, un asemenea punct de intersecție sau tangență n-ar avea o vecinătate omeomorfă cu un cerc. Din același motiv suprafețele noastre sînt bilatere, deci orientabile.

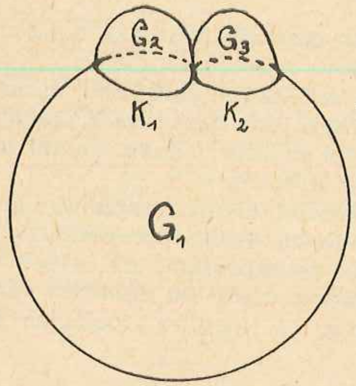

Fig. 4

Curbele de separare se pot intretăia sau pot fi și tangente.

Exemple: 1) Descompunem un paralelogram in triunghiuri prin cele două diagonale. Vom păstra două din triunghiurile opuse ca o figură plană, iar pe celelalte două construim semicercuri perpendiculare pe planul paralelogramului, tăind planul pe cele două diagonale. Pe suprafața astfel obținută diagonalele sînt curbe de separare și ele se intretaie (fig. 3).

2) Așezăm pe două cercuri tangente K_1 și K_2 ale unei sfere, două calote sferice. Pe suprafața obținută liniile K_1 și K_2 sînt curbe de separare și sînt tangente.

Teorema 3. Curbele de separare nu sînt inlănțuite și nu au noduri. Două curbe sînt inlănțuite, dacă nu putem restringe niciuna din ele prin transformarea continuă la un punct exterior celeilalte curbe. O curbă continuă inchisă atunci are nod, dacă nu poate fi transformată in spațiul cu trei dimensiuni intr-un cerc, printr-o transformare topologică. Porțiunile de suprafață mărginite de curbe inlănțuite sau cu nod se taie neapărat și astfel pe baza observației precedente nu aparțin clasei de suprafețe considerată.

§ 3. Clasificarea suprafeței prin curbe de separare. Notarea bordurilor convexe și neconvexe ale curbelor de separare. Clasificarea suprafețelor prin sisteme de curbe de separare.

S-a văzut in § 2 că suprafețele noastre sint bilaterale. Astfel, fiecare curbă pe suprafață are două borduri bine definite. Am văzut de asemenea că in general la un bord se atașează un domeniu convex și la celălalt unul neconvex, dar nu este exclus nici cazul, cind la amîndouă bordurile se atașează domenii convexe.

Pe baza acestora putem introduce următoarea notație pentru curbele de separare: se notează cu h_0 bordul curbei de separare h, la care se atașează un domeniu convex, cu h_o acel bord sau porțiune de bord, la care se atașează un domeniu neconvex. Pentru curbe sau porțiuni de curbe de separare, la care se atașează la amîndouă bordurile cite un domeniu convex vom utiliza notația h_{00}. Curbele de separare afectate cu acești indici de bord

vor fi numite curbe cu indici. Punctele izolate de separare din domeniile convexe se notează cu I. Domeniile convexe și neconvexe se notează cu K respectiv N.

Din definiția suprafeței rezultă, că două puncte oarecare ale ei pot fi unite cu o curbă continuă de lungime finită.

Să considerăm un punct O pe suprafața noastră și fie P un punct al suprafeței diferite de O. Notăm cu (l_{OP}) mulțimea lungimilor tuturor curbelor continue pe suprafață, care leagă punctele O și P. Numărul pozitiv $l_O^P = \inf (l_{OP})$ este distanța superficială a punctelor O și P. La fiecare pereche de puncte a suprafeței aparține un astfel de număr, care este o funcțională a perechilor de puncte.

Raza interioară a suprafeței relativă la punctul O se definește prin

$$l_O = \sup_P l_O^P .$$

Raza interioară este un număr pozitiv sau ∞. In sfîrșit dacă punctul O parcurge suprafața, expresia

$$l = \sup_O l_O$$

este numită diametrul interior al suprafeței și poate fi iarăși un număr pozitiv sau ∞.

Toate aceste definiții se bazează pe lungimea curbelor finite trasate pe suprafață și nu au nimic comun cu spațiul in care se găsește suprafața noastră. Deci am introdus noțiuni de geometrie intrinsecă.

In planul euclidian avem $l_o = \infty$. Fiecare rază interioară este infinită și astfel și diametrul interior al planului euclidian este infinit. Situația este analoagă la orice suprafață infinită.

Observație. Noțiunea diametrului interior se deosebește esențial de noțiunea obișnuită de diametru al unei mulțimi, care operează cu distanțe ale spațiului inconjurător și nu cu lungimea curbelor pe o suprafață.

Perechile de puncte pentru care avem $l - \epsilon \leq l_O^P \leq l$, sînt numite punctele suprafeței la distanță maximală cu eroarea ϵ. La orice număr ϵ aparține astfel de perechi.

Să presupunem că există pe suprafață domenii convexe și neconvexe. Prin aceasta excludem suprafețele convexe și cele fără domenii convexe. Aceasta vor forma clase separate de suprafețe.

Fie O un punct al unui domeniu convex și l_o raza interioară relativă la O. Pentru orice $\epsilon > 0$ putem găsi puncte P, astfel ca $l_O^P < l_O - \bar{\epsilon}$. Unim aceste puncte P cu punctul O prin curbe continue, ale căror lungimi aproximează pe l_O^P mai precis decit $\bar{\epsilon}$. Astfel de curbe există cu siguranță pe baza definiției numărului l_O^P.

Observație. Dacă $\bar{\epsilon} \to 0$, atunci porțiunile curbelor considerate, situate in domeniul convex conținind punctul O, vor converge către liniile cele mai scurte ale domeniului convex, pe baza proprietăților domeniilor convexe.

Restrîngerea definiției suprafeței. In cele ce urmează admitem, că *sistemul curbelor de separare nu este nicăieri dens.* Prin urmare suprafața noastră nu va avea puncte, în a căror vecinătate arbitrară există o infinitate de curbe de separare sau cu alte cuvinte: orice punct al suprafeței are o vecinătate, prin care nu trece decît un număr finit de curbe de separare.

In acest caz, toate curbele definite mai înainte taie numai un număr finit de curbe de separare. In caz contrar curbele de intersecție ar avea un punct de acumulare pe curba de lungime finită, ceea ce este in contradicție cu ultima restricție.

Să unim cîte un punct al fiecărui domeniu convex și neconvex cu punctul O cu ajutorul curbelor de mai înainte. In jurul lui O există un domeniu, care satisface condițiile de convexitate și astfel unghiul complet din jurul lui O $\leqslant 2\pi$ (vezi Alexandrov). Fiecare domeniu convex are frontieră comună cu domenii convexe și neconvexe în mulțime cel mult numerabilă (pe baza restricției definiției) și astfel puterea mulțimilor curbelor L, care trec prin punctul O este cel mult numerabilă. Intr-adevăr, pe porțiunea de suprafață determinată de punctul O și numărul ε pot să existe domenii convexe sau porțiuni de domenii convexe în mulțime cel mult numerabilă pe baza faptului că două puncte oarecare ale suprafeței pot fi unite cu o curbă de lungime finită și pe baza restricției făcute suprafețelor.

Fie $\epsilon_n = \frac{1}{n}$. Pe porțiunea de suprafață determinată de punctul O și de numărul ϵ_n sînt deci curbe de separare (sau arce ale lor) în mulțime cel mult numerabilă. Numărul curbelor de separare determinate de O și ϵ_{+n} este mai mare sau egal cu numărul celor determinate de O și ϵ_n, dar creșterea lor e numerabilă. Dacă $n \to \infty$ mulțima de puncte determinată de O și ϵ_n acoperă suprafața întreagă și astfel obținem toate curbele de separare. Putem enunța:

Teorema 4. Mulțimea curbelor de separare este numerabilă.

La fiecare suprafață aparține deci un sistem bine determinat de curbe continue afectate cu indici și puncte izolate în mulțime cel mult numerabilă.

Așezăm în aceeași clasă toate suprafețele, la care sistemul curbelor și punctelor izolate de separare poate fi transformat topologic unul în altul cu păstrarea indicilor.

In acest mod am clasificat suprafețe cu ajutorul proprietăților topologice ale sistemelor de curbe și puncte de separare. In cele ce urmează vom arăta însemnătatea acestei clasificări din punctul de vedere al geometriei intrinseci și vom arăta proprietățile clasificării noastre.

Vom caracteriza în mod simbolic suprafețe cu ajutorul curbelor de separare, a domeniilor atașate la ele și a punctelor izolate pe domenii convexe prin următoarea notație simbolică.

Vom nota mulțimea numerabilă a curbelor de separare cu $h_1, h_2, h_3 \ldots\ldots$, Domeniile convexe care se atașează la curba h_i se notează cu $K_{i1}, K_{i2}, K_{i3} \ldots\ldots$, cele neconvexe cu $N_{i1}, N_{i2}, N_{i3}, \ldots\ldots$ Am văzut, că la fiecare curbă de separare se atașează cel mult o mulțime numerabilă de domenii convexe și neconvexe, deci notația noastră este posibilă. Simbolul domeniilor convexe

se scrie la stînga lui h_i și cel al domeniilor neconvexe la dreapta lui:

$$\ldots K_{i3} K_{i2} K_{i1} h_i N_{i1} N_{i2} N_{i3} \ldots$$

Notăm cu H_i ansamblul acestor domenii și al curbei h_i. Dacă pe un domeniu convex există puncte izolate de separare, de exemplu pe Kij, atunci acestea fiind de asemenea în mulțime numerabilă, le notăm într-o ordine oarecare: $I_{ij1}, I_{ij2}, \ldots\ldots$ Aceste simboale se scriu la stînga lui K_{ij} și continuăm enumerarea, I_{ijn}-urile aparțin de asemenea la sistemul H_i.

Să considerăm totalitatea sistemelor H

$$H_1, H_2, H_3, \ldots\ldots H_i, \ldots\ldots$$

Vom reprezenta suprafața prin acest șir.

In notația noastră un domeniu convex sau neconvex figurează de atîtea ori, de cîte ori se atașează la vreo curbă de separare. Fiecare punct izolat figurează de atîtea ori de cîte ori figurează domeniul convex, care îl conține. Pentru a caracteriza această situație trebuie să introducem niște relații de identitate. Dacă același domeniu convex se atașează la h_s și h_t, figurînd odată cu notația K_{si} și a doua oră cu cu K_{tj}, atunci trebuie să notăm că $K_{si} = K_{tj} = \ldots\ldots$, extinzînd relația de identitate la toți indicii, care reprezintă același domeniu, dar în racordarea lui cu diferite curbe de separare. In mod analog avem relații de identitate și pentru N și I.

Astfel carecterizarea structurii geometrice intrinseci a unei suprafețe este dată de șirul $H_1, H_2, \ldots\ldots H_n, \ldots\ldots$, de structura diferiților H^i și de relațiile de identitate relative la K N și I.

Exemple:

1. Notația suprafeței convexe este: K_1
2. Suprafața din fig. 1 se notează cu $K_{12}\ K_{11}\ h_1$
3. Suprafața din fig. 2 se notează cu $I_{14}\ I_{13}\ I_{12}\ I_{11}\ K_1$
4. Suprafețele din fig. 4: $K_{12}\ K_{11}\ h_1\ K_{22}\ K_{21}\ h_2,\ K_{11} = K_{21}$

Am dat deci un procedeu pentru caracterizarea suprafeței cu ajutorul curbelor de separare și un mijloc de notare caracterizînd geometria intrinsecă. Din punctul de vedere al proprietăților geometriei intrinseci „în mare" suprafața este caracterizată prin sistemul curbelor de separare, dat topologic și cu indici de bord, ceea ce am descris prin șirul H. Șirul H, împreună cu structura mulțimilor H și cu relațiile de identitate exprimă structura topologică și de indice al sistemului curbelor de separare.

Observație. Curbele de separare figurează întotdeauna ca frontierele domeniilor atașate de ele. Astfel, indicatoarea de bord a aceleiași curbe continue variază pe ambele borduri în conformitate cu caracterul domeniilor atașate:

Este evident, că modul clasificării suprafețelor pe această bază intrinsecă e mult mai complicat decît clasificarea topologică. Suprafețele aparținînd la clase topologice diferite aparțin cu siguranță la diferite clase geometrice intrinseci, dar și suprafețele care aparțin la aceeași clasă topologică pot prezenta o mare varietate din punct de vedere al geometriei intrinseci. De exemplu pe o suprafață omeomorfă cu sfera, domeniile convexe și neconvexe pot fi așezate în cele mai variate moduri.

Prin procedeul nostru de clasificare am redus problema clasifirării suprafețelor pe baza geometriei intrinseci la clasificarea topologică a sistemelor de curbe afectate cu indici de bord. Din paragrafele următoare va reieși că această clasificare poate fi încă rafinată.

Clasificarea curbelor și a sistemelor de curbe e o problemă încă nerezolvată. Procedeul nostru arată că clasificarea geometrică intrinsecă a suprafețelor coincide în linii mari cu această problemă. Este încă neîndoielnic, că fiind dată o suprafață concretă, putem desemna acea clasă de suprafețe, la care aparține din punct de vedere al geometriei intrinseci și la fiecare sistem de curbe de separare bine definit putem construi suprafața care îi aparține.

§ 4. Proprietățile curbelor de separare.

1) *Punctele de intersecție ale curbelor de separare pot fi eliminate.*

Să presupunem că într-un punct al suprafeței se taie două curbe de separare. Să deosebim două cazuri: curbele separă două domenii convexe sau domenii convexe și neconvexe. In amîndouă cazurile considerăm tăiate ramurile curbelor de separare în punctul de intersecție și le împreunăm într-o altă combinație în așa fel, ca în punctul de intersecție inițial cele două curbe de separare transformate să aibă punct comun fără intersecție (fig. 5).

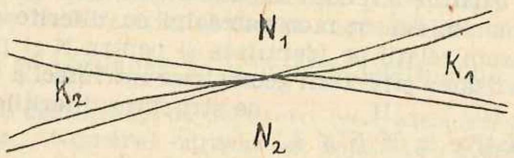

Fig. 5

2) *Un punct al suprafeței poate fi comun numai unui număr finit de curbe de separare sau numai un număr finit de domenii se pot întîlni într-un punct.*

In adevăr, dacă o infinitate de domenii concurează într-un punct comun, atunci acel punct este punct de acumulare pentru curbele de separare, ceea-ce e în contradicție cu faptul că sistemul curbelor de separare nu e nicăieri dens.

3) *Prin eliminarea punctelor de intersecție, curbele de separare formează un sistem de curbe continue nesecante, care pot avea contact între ele în vîrfuri sau puncte de tangență.*

4) *La o curbă de separare de lungime finită se poate atașa numai un număr finit de domenii convexe și neconvexe.*

In adevăr, în cazul contrar punctele de racordare ale curbelor care separă domeniile atașate cu curba de separare considerată ar forma o mulțime infinită, da la un punct de racordare poate să aparțină numai un număr finit de curbe de separare în conformitate cu 2). Pe curba de separare de lungime finită ar exista un punct de acumulare și într-o vecinătate a acestuia ar fi o infinitate de curbe de separare, ceea ce e în contradicție cu faptul că sistemul curbelor de separare nu e nicăieri dens.

5) *Curbele de separare închise sînt de lungime finită.*

Orice curbă de separare e frontiera unui domeniu convex. In caz dacă curba de separare închisă ar avea lungime infinită, ar exista pe suprafață un punct în a cărui vecinătate curba de separare ar trece de o infinitate de ori, ceea ce e iarăși în contradicție cu faptul, că sistemul curbelor de separare nicăieri nu e dens.

6) *La o curbă de separare închisă se atașează un număr finit de domenii convexe și neconvexe.*

Curba de separare închisă e de lungime finită și astfel din 4) rezultă 6).

7) *Există curbe de separare de lungime finită și deschise.*

Exemplu. La fiecare punct al unui segment de dreaptă să așezăm într-un plan perpendicular pe segment o curbă de forma din fig. 6, astfel ca diametrul curbei să fie proporțional cu distanța la extremitatea mai apropiată a segmentului. Suprafața astfel generată formează un singur domeniu convex. Punctele segmentului nu sînt cu vecinătate convexă și astfel segmentul este o curbă de separare. Ea este lungime finită și deschisă.

Fig 6

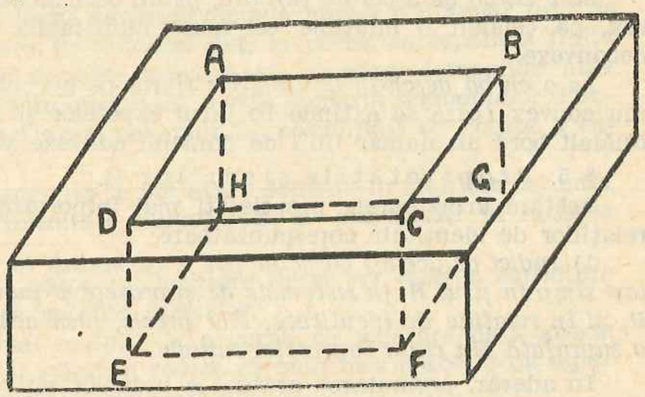

Fig. 7

8) *La o curbă de separare deschisă, de lungime finită, într-o anumită vecinătate a capetelor curbei nu se pot atașa decît domenii convexe.*

In adevăr, să presupunem contrariul. La un capăt se atașează un domeniu convex și neconvex. Acestea trebuie să se racordeze într-o vecinătate a capătului și cu ale puncte de separare, deci curba de separare poate fi continuată dincolo de capătul ei, ceea ce este imposibil. Rezultă, că la un bord al unei curbe de separare deschisă, de lungime finită, se atașează un domeniu convex, care se leagă de curba de separare și pe celălalt bord dealungul a cîte un segment în vecinătatea capetelor.

9) Pe baza proprietăților stabilite rezultă că curbele de separare ale clasei de suprafețe cercetată pot fi următoarele tipuri:

a) curbe continue închise, de lungime finită, fără noduri.

b) curbe continue deschise, de lungime finită.

c) curbe continue infinite, fără noduri.

10) *Pe un domeniu convex putem avea o infinitate de puncte izolate de separare* (de mulțime numerabilă).

Exemplu (vezi fig. 7). Punctele A, B, C, D, E, F, G și H sînt puncte izolate de separare. Celelalte puncte ale suprafeței sînt cu vecinătate convexă. Suprafața se compune dintr-un singur domeniu convex. Suprafața arătată e un domeniu dublu conex cu 8 puncte izolate de frontieră.

Putem construi o suprafață analoagă prin scoaterea unei prizme triunghiulare sau atașind la partea scoasă o suprafață piramidală cu vîrful în interiorul corpului. Prizma scoasă poate avea oricîte fețe și prin aceasta am arătat proprietatea enunțată.

1) *Sistemul complet al curbelor de separare ale suprafeței se compune din curbe continue de tipul a), b), c), care se racordează în anumite puncte, fără a se înlănțui sau dintr-o mulțime cel mult numerabilă de astfel de sisteme, izolate unele de altele și iarăși fără a fi înlănțuite.*

12) *La o curbă de separare închisă* pe un bord se atașează un singur domeniu convex, pe celălalt bord un număr finit de domenii convexe și neconvexe.

La o curbă de separare infinită, pe un bord se atașează un domeniu convex, pe celălalt o mulțime cel mult numerabilă de domenii convexe și neconvexe.

La o curbă deschisă de lungime finită pe un bord se atașează un domeniu convex (care se extinde în jurul capetelor și în celălalt bord), iar la celălalt bord un număr finit de domenii convexe și neconvexe.

§ 5. Proprietățile șirurilor H.

Arătăm următoarele proprietăți mai importante ale șirurilor H și ale relațiilor de identitate corespunzătoare:

1) *Indici de același caracter pot fi permutați în mod arbitrar dar în același timp în șirul H, în sistemele de suprafețe și puncte notate ale diferiților H_i și în relațiile de identitate. Mai precis, prin această permutare obținem o suprafață din clasa suprafeței inițiale.*

In adevăr, permutarea arătată a indicilor nu schimbă decît *ordinea de enumerare* a curbelor de separare și a domeniilor, care îi aparțin, dar lasă neschimbat caracterul geometric intrinsec al domeniilor, precum și sistemul racordării lor la curbele de separare, la punctele izolate de separare și a racordării domeniilor între ele.

2) In loc de construcția șirului H, arătată la § 3. putem lua următoarea notație: scriem la stînga lui H domeniile de pe un bord al lui H, la dreapta cele de pe celălalt bord, de la un domeniu oarecare, dar în așa fel, ca totdeauna să continuăm cu un domeniu atașat nemijlocit dealungul lui H.

3) *Curbele de separare pot fi prevăzute și ele cu indici, care arată ordinea de construcție.* Pornim de la o curbă de separare oarecare H_i și continuăm cu curbele de separare ale domeniilor atașate lui H_i în ordinea atașării lor. După aceea luăm curbele de separare ale domeniilor atașate la primul domeniu de mai înainte, apoi la al doilea, al treilea, etc. într-o ordine oarecare și continuăm pînă cînd am epuizat toate domeniile suprafeței. La acest procedeu de enumerare sînt încă arbitrare: domeniul de pornire și totdeauna alegerea primului domeniu din cele atașate unul la altul.

4) *Numărul relațiilor de identitate este independent de alegerea indicilor.*

In adevăr, relațiile de identitate arată domenii la care curba de

separare este atașată și numărul lor arată la cîte curbe se atașează. Domeniul considerat trebuie să figureze la fiecare curbă de separare legată de el și astfel numărul acelor relații de identitate, la care apare acest domeniu, depinde numai de structura geometrică intrinsecă și este independentă de alegerea indicilor.

5. *Mulțimea relațiilor de identitate este cel mult numerabilă.*

Mulțimea curbelor de separare este numerabilă și la fiecare se atașează cel mult o mulțime numerabilă de domenii. Rezultă de aci proprietatea 5.

6. *In șirul nostru H putem rafina notația de structură,* dacă indicăm la fiecare domeniu dacă el este mărginit sau se întinde la infinit. Notarea se face prin intercalarea literei f respectiv ∞ la notația domeniului. De exemplu $K_{12}f$ înseamnă domeniul convex mărginit, atașat la H_1, cu indicele 2 și $N_{31}\infty$ domeniul neconvex infinit, atașat la H_3, cu indicele 1.

7. La un sistem dat de curbe de separare există posibilități diferite de notare cu indici.

La o curbă de separare finită se poate efectua numai un număr finit de schimbări de indici, deoarece în sistemul dat, la curba de separare finită aparține un număr finit de domenii. Dacă n este numărul domeniilor atașate de-a lungul unor segmente, deci dacă n este numărul segmentelor afecțate cu diferiți indici, atunci avem cel mult 2_n posibilități de notare a indicilor.

La o curbă de separare infinită se pot atașa domenii în mulțime cel mult numerabilă, deci avem o infinitate numerabilă de posibilități în notarea indicilor.

8. *La un sistem dat de curbe de separare avem cel mult o infinitate numerabilă de posibilități în notarea indicelor.*

După cum am văzut mai înainte, la o curbă de separare dată aceste posibilități sînt numerabile și avînd în vedere că mulțimea curbelor de separare este numerabilă, proprietatea este arătată.

9. *La un sistem de indici de bord oarecare nu aparține neapărat o suprafață.*

De exemplu la segmentele de terminație ale unei curbe de separare deschisă de lungime finită nu se pot pune decît indici de racordare convecși la amîndouă bordurile. Dacă la un bord al unei curbe de separare nu se racordează nici o altă curbă de separare, atunci acel bord este afectat cu un singur indice pe toată lungimea lui. De aceea am întrebuințat la enunțarea proprietății anterioare termenul de „cel mult". Puterile date sînt numai margini superioare.

§ 6. Elemente geometrice intrinseci de construcție ale suprafețelor.

Suprafețele din diferite clase geometrice intrinseci pot fi construite din elementele de construcție mai simple. Acestea sînt elementele de construcție pentru toate suprafețele ori cît de complicate ar fi ele.

Elementele de construcție au următoarele tipuri:

1. calota sferică, ca tipul unui domeniu convex, finit.
2. suprafața infinită, complet convexă din care se scot părți mărginite de curbe de separare închise, ca tipul domeniului convex, infinit (fig. 8),

3. domeniile constînd din punctele cu vecinătate convexă ale unei suprafețe de conexiune n (forma unui covrig cu 2 n curbe de separare închise).

4. domeniul convex al unei suprafețe de tipul torului.

5. domeniul finit, neconvex din fig. 9.

6. o porțiune finită dintr-un iperboloid cu o pînză, ca reprezentantul domeniului finit neconvex.

7. o porțiune dintr-un iperboloid, finită într-un sens al axei imaginare și infinită în celălalt sens, ca reprezentantul domeniului infinit neconvex, atașat la o curbă de separare închisă.

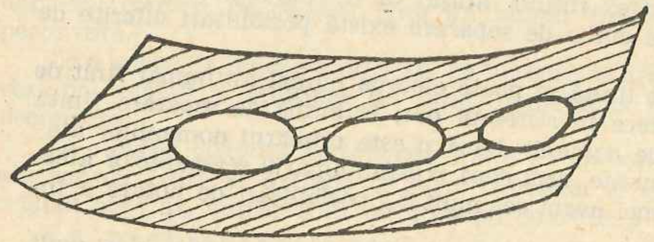

Fig. 8

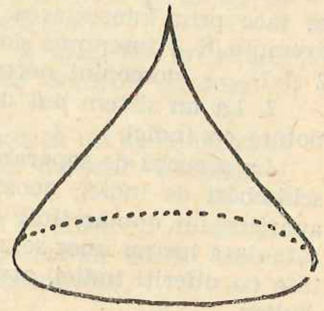

Fig. 9

Afară de aceasta, din fiecare tip de construcție luăm suprafața, care rămîne în urma detașării unui număr finit de porțiuni mărginite de curbe închise ale suprafeței. La suprafețe infinite porțiunile detașate pot fi în mulțime numerabilă.

Observație. Aceste tipuri de construcție sînt reprezentanți ai domeniilor convexe și neconvexe și nu trebuiesc concepute în sensul ca și cum de exemplu un domeniu convex finit ar fi întotdeauna o calotă sferică. Să considerăm o suprafață construită cu elementele noastre de construcție și să punem aceste elemente la deformări, care păstrează totuși proprietățile geometrice intrinseci esențiale, adică păstrează caracterul convex sau neconvex. Suprafața deformată aparține la aceeași clasă de suprafețe în clasificarea noastră ca și suprafața considerată.

§ 7. Construcția suprafeței care aparține la un sistem dat de curbe de separare.

Fie date: un sistem de curbe de separare cu indici de bord, care satisface proprietățile enumerate în § 4, clasa topologică a suprafeței, care aparține la sistemul dat de curbe și sistemul punctelor izolate de separare sau ceea ce e același lucru: șirul H, structura sistemelor H și relațiile de identitate.

Șirul H împreună cu relațiile de echivalență caracterizează clasa topologică a suprafeței, precum se vede ușor.

In concordanță cu indicii de bord construim pe curbele de separare elementele de construcție corespunzătoare, după o eventuală deformare topologică convenabilă (§ 6). La diferitele curbe de separare (§ 4, 9, a, b, c,)

corespund anumite elemente de construcție și caracterul lor e determinat de indicii de bord.

La un sistem de curbe de separare cu proprietățile din § 4 în toate cazurile putem construi o suprafață, în care curbele de separare coincid cu sistemul de curbe dat. Punctele izolate sînt date împreună cu sistemul și după cum am văzut, totdeauna se poate construi o suprafață, pentru care punctele date sînt puncte izolate de separare. Dar, prin punctele de separare n-am determinat încă caracterul topologic al suprafeței, precum arată exemplele date mai sus. Suprafața din fig. 8 are opt puncte izolate și e *dublu conexă*, în timp ce cu atașarea unei piramide putem construi o suprafață *simplu conexă*, care de asemenea are 8 puncte izolate și conține un singur domeniu convex.

Am stabilit deci

Teorema V. Unui sistem de curbe și puncte izolate de separare cu proprietățile înșirate în § 4 și 5 îi aparține întotdeauna o suprafață, al cărei sistem de curbe și puncte izolate de separare este tocmai sistemul dat. Tipul suprafeței poate fi construit din elementele de construcție date în § 6.

Fiecare sistem de curbe și puncte izolate de separare poate fi caracterizat printr-un șir H și astfel la fiecare șir H cu proprietățile înșirate în § 5. aparține cîte o clasă de suprafețe din clasificarea noastră.

Dacă transformăm topologic sistemul de curbe în așa fel ca să putem atașa domenii corespunzătoare indicilor de bord, atunci sistemul transformat îi corespunde o suprafață din clasa suprafeței inițiale.

Sistemul curbelor de separare ale suprafețelor din aceeași clasă sînt topologic echivalente.

Astfel am arătat că o clasă de suprafețe este determinată din punctul de vedere al geometriei ei intrinseci prin sistemul de curbe și puncte izolate de separare cu indici de bord (prin clasa topologică a sistemului). La același sistem de curbe și puncte de separare aparțin suprafețe, care coincid în privința proprietăților geometrice intrinsece esențiale, iar la sisteme diferite suprafețe cu proprietăți diferite. Este esențial, că sistemele curbelor de separare ale suprafețelor din aceeași clasă sînt omeomorfe între ele.

Probleme care se deschid.

Clasificarea fără îndoială poate fi continuată, rafinată. In forma ei arătată nu caracterizează suprafața din punctul de vedere al geometriei intrinseci decît în trăsăturile ei mari.

Din problemele care se indică cea mai importantă este elaborarea detailată a geometriei intrinseci pentru domenii neconvexe și cercetarea proprietăților importante ale domeniilor convexe și neconvexe în racordarea lor. La racordarea a două domenii, proprietățile „în mare" ale acestora se schimbă. Astfel se schimbă liniile cele mai scurte, domeniul perechilor de puncte, care pot fi legate prin cele mai scurte linii, chestiunea unghiurilor, mai ales în vecinătatea liniei de racordare. Problema curburii domeniilor de suprafață, care trec peste linia de separare, este de asemenea o problemă deschisă, etc.

Cercetarea celor mai simple tipuri geometrice intrinseci, care corespund la o anumită clasă topologică de suprafețe, este iarăși de cercetat, apoi proprietățile geometrice globale diferite și caracteristice ale diferitelor suprafețe din aceeași clasă intrinsecă, rafinarea clasificării in subclase, etc.

Se vede deci că sînt posibilități mari în direcția cercetărilor începute de A. D. Alexandrov și se pun probleme mari. Cercetarea în această direcție va conduce la cunoașterea acelor propriétăți generale ale suprafețelor, care nu pot fi obținute prin mijloacele geometriei diferențiale și care interesează suprafețele intîlnite in practică.

(Lucrare depusă la data de 18 dec. 1953).

Universitatea Bolyai, Cluj,
Catedra de geometrie.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Выяснение поверхностей на основании присущей им геометрии

Е. ГЕРГЕЛИ

Основываясь на работах А. Д. Александрова автор классифицирует поверхности согласно присущей им геометрии. Вводятся понятия о выпуклой и невыпуклой областях на поверхности. Выпуклыми областями являются те множества точек поверхности, имеюшие выпуклые соседства в смысле А. Д. Александрова. Невыпуклые области суть дополнительные множества выпуклых областей. В дополнительном множестве могут быть и изолированные точки и кривые. Автор рассматривает поверхности, у которых границы выпуклых областей являются непрерывными кривыми и у которых эти кривые, названные кривыми отделения, составляют множество, не являюшееся нигде плотным. Указывается, что на такой поверхности множество кривых отделения преимущественно счетное. Оба окаймления кривых отделения снабжены каждое по одному показателю, указываюшему относится ли выпуклая или невыпуклая область к этому окаймлению. Поверхности классифицированы автором посредством системы кривых отделения, снабженных показателями. В одном присушем геометрическом классе помешены все поверхности, все кривые раздела которых могут быть преобразованы одна в другую путем топологичоского преобразования с сохранением показателя окаймления. Для присушей геометрической характеристики поверхностей вводится автором обозначени для кривых отделения, отмечается какие области относятся к кривой отделения и в водится соотношения тождества между областями, относяшимися к нескольким кривым. Каждая поверхность характеризуется системой кривых отделения, системой областей, относяшихся к одной кривой с указанием их выпуклости или невыпуклости и соотношением тождества. Устанавливаются важные характерные свойства кривых отделения и введенных пометок. Кривые отделения могут быть непрерывными замкнутым кривыми конечной длины без узлов или непрерывными разомкнутым кривыми конечной длины или накопец непрерывными кривыми о бесконечными ветвями без узлов. К кривой отделения конечной длины относится конечное число выпуклых и невыпуклых областей, к бесконечной кривой отделения могут относиться области и в счетном множестве. Определяются некоторые

элементы построения ограниченных и бесконечных, выпуклых и невыпуклых областей и при помоши их показывается, что для каждой системы кривых, удовлетворяюшей условиям кривых отделения, можно построит поверхность, системе кривых отделения которой совпадает с заданной системой кривых. Системы кривых поверхностей одного и того же класса топологически эквивалентны. Возникают следуюшие еше неразрешенные вопросы: подробная разработка присушей геометрии для невыпуклых поверхностей, позволяюшая изучение классов поверхностей, сложных с точки зрения присушей геометрии "в обших чертах". В таком случае несомненно будет возможно уточнение данной классификации.

RÉSUMÉ

La classification des surfaces sur la base de leur géometrie intrinsèque

par

E. GERGELY

En prenant pour base les travaux de A. D. Alexandrov, l'auteur classifie les surfaces sur la base de leur géometrie intrinsèque. Il introduit les notions de domaine convexe et non-convexe sur surface. Les domaines convexes sont ces quantités de points de la surface, qui ont des voisinages convexes dans le sens de A. D. Alexandrov. Les domaines non-convexes sont les quantités complémentaires des domaines convexes. Dans la quantité complémentaire peuvent exister aussi des points isolés et courbes. L'auteur s'occupe des surfaces, dont les frontières des domaines convexes sont des courbes continues et où ces courbes dénommées courbes de séparation forment une quantité qui n'est dense nulle part. L'auteur montre que sur une pareille surface la quantité des courbes de séparation est tout au plus numérable. Les deux bords des courbes de séparation sont affectés chacun d'un indice, qui montre si un domaine convexe ou non-convexe se racorde à ce bord. Les surfaces sont classifiées par l'auteur à l'aide du système des courbes de séparation, pourvues d'indices. Dans une classe géometrique intrinsèque sont mises toutes les surfaces dont le système de courbes de séparation peut être transformé un dans l'autre par une transformation topologique avec la conservation des indices de bord. Pour caractériser les surfaces a.p.v. de la géometrie intrinsèque l'auteur introduit une notation pour de système des courbes de séparation, il note quels sont les domaines qui se raccordent à la courbe de séparation et il introduit des relations d'identité entre les domaines, qui se raccordent à plusieurs courbes. Chaque surface est caractérisée par le système des courbes de séparation, par le système des domaines qui se raccordent à une courbe avec l'indication de leur convexité ou de leur non-convexité et par les relations d'identité. L'auteur établit les propriétés caractéristiques importantes des systèmes de courbes de séparation et de notation introduits. Les courbes de séparation peuvent être des courbes continues fermées, de longeur finie, sans noeuds, ou des courbes continues

ouvertes de longueur finie, où enfin des courbes continues aux branches infinies, sans noeuds. A une courbe de séparation de longueur finie se raccorde un nombre fini de domaines convexes et non convexes, à une courbe de séparation infinie peuvent se raccorder des domaines en quantité numérable. L'auteur détermine encore quelques éléments de construction comme des représentants des domaines limités et infinis, convexes et nonconvexes et à leur aide il démontre qu'à chaque système de courbes, qui satisfait les conditions des courbes de séparation, on peut construire une surface, dont le système de courbes de séparation coincide avec le système de courbes donné. Les systèmes de courbes des surfaces de la même classe sont topologiquent équivalents. L'auteur montre enfin que des problèmes non encore résolus se posent, à savoir: l'élaboration détaillée de la géometrie intrinsèque pour des surfaces non convexes, qui permettrait l'étude des classes de surfaces compliquées, au point de vue de la géometrie intrinsèque „en grand". Dans ce cas, il sera, sûrement, possible de raffiner la classification donnée.