UNELE PROBLEME PRACTICE PRIVIND NOMOGRAFIEREA ECUAȚIILOR DE TIP $f_3(w) = f_1(u)f_2(v)$

O nomogramă universală pentru determinarea indicatorilor principali ai observării selective

DE

V. CSEKE și Z. CSENDES

Comunicare prezentată în ședința de comunicări din 27 septembrie 1954 a Filialei Cluj a Academiei R. P. R.

1. M. V. Pentkovski [2] vorbind despre nomogramele ecuațiilor de a doua formă canonică a ecuației de ordinul trei nomografic, dă o metodă practică de nomografierea ecuației

$$f_3(w) = f_1(u) + f_2(v) \tag{1}$$

pe trei scări paralele. Ecuațiile scărilor nomogramei sint:

$$\begin{aligned} &\text{scara } u : x = -H, && y = Lm_1 (f_1 - a); \\ &\text{scara } v : x = H, && y = Lm_2 (f_2 - b); \\ &\text{scara } w : x = \frac{H(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} && y = \frac{Lm_1 m_2}{m_1 + m_2}(f_3 - a - b), \end{aligned}$$

unde parametrii a, b, m_1, m_2, H și L au o interpretare geometrică bine determinată. In acest caz scările sunt uniforme, pe care valorile u, v, w, sînt marcate ținînd seamă de funcțiile f_1, f_2, f_3. Natural, și caracteristicile scărilor depind de funcțiile date.

Mai departe Pentkovski aplică rezultatul de mai sus la ecuația de forma

$$w = Au^{\alpha}v^{\beta}$$

unde u, v, w sînt variabile, A un coeficient constant, iar α și β exponenți constanți (pozitivi sau negativi). Logaritmînd ambele părți ale ecuației (2), se obține o ecuație de forma (1) și pe suporții paraleli apar scări pur logaritmice. Construirea nomogramei ecuației (2) astfel devine foarte simplă, iar folosirea ei ușoară.

2. Pentkovski amintește, că prin metoda indicată se pot construi no-

mograme şi în cazul cînd în ecuaţia (2) în locul uneia dintre variabile intră o funcţie oarecare a ei. În acest caz pe scara logaritmică a acestei funcţii trebuie să marcăm mai întîi valorile corespunzătoare ale variabilei respective, ceea ce se face găsind valorile funcţiei pe şablonul corespunzător.

În cele ce urmează, vom arăta că metoda indicată se aplică şi în acel caz, cînd toate cele trei variabile sînt înlocuite cu cîte o funcţie a lor, adică şi în cazul ecuaţiei

$$f_3(w) = f_1(u) \, . \, f_2(v) \qquad (3)$$

Logaritmînd această ecuaţie ,obţinem o ecuaţie de forma (1):

$$\lg f_3(w) = \lg f_1(u) + \lg f_2(v) \; ^{*}),$$

de unde ecuaţiile scărilor situate pe suporţii paraleli sînt următoarele:

$$\begin{aligned} &\text{scara } u : x = -H, && y = Lm_1(\lg f_1 - a); \\ &\text{scara } v : x = H, && y = Lm_2(\lg f_2 - b); \\ &\text{scara } w : x = \frac{H(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}, && y = \frac{Lm_1 m_2}{m_1 + m_2}(\lg f_3 - a - b), \end{aligned}$$

sau introducînd notaţiile:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= Lm_1, & a_1 &= Lm_1 a, \\ \mu_2 &= Lm_2, & b_1 &= Lm_2 b, \\ \mu_3 &= \frac{m_1 + m_2}{Lm_1 m_2}, & c_1 &= \frac{Lm_1 m_2}{m_1 + m_2}(a + b), \end{aligned}$$

ecuaţiile de mai sus se pot scrie sub forma:

$$\begin{aligned} &\text{scara } u : x = -H, && y = \mu_1 \lg f_1 - a_1; \\ &\text{scara } v : x = H, && y = \mu_2 \lg f_2 - b_1; \\ &\text{scara } w : x = \frac{H(\mu_1 - \mu_2)}{\mu_1 + \mu_2}, && y = \mu_3 \lg f_3 - c_1. \end{aligned}$$

Construind scările logaritmice paralele de modulele μ_i ale funcţiilor f ($i = 1, 2, 3$), valorile variabilelor u, v, w se vor marca cu ajutorul şabloanelor corespunzătoare. E natural, că aplicabilitatea şi punctualitatea nomogramei depinde de natura funcţilor f_i şi din această cauză, în primul rînd trebuie să se cerceteze, în ce măsură caracteristicele logaritmice ale scărilor diferă de caracteristica logaritmică constantă.

În legătură cu construirea nomogramei notăm, că modulele μ_1 şi μ_2 se vor alege în aşa fel, ca

$$\mu_1 \approx \frac{L_1}{\lg f_1(u_2) - \lg f_1(u_1)}, \quad \mu_2 \approx \frac{L_2}{\lg f_2(v_2) - \lg f_2(v_1)},$$

unde u_1 şi u_2, respectiv v_1 şi v_2 sînt limitele variabilelor u şi v, iar L_1 şi L_2 lungimile plănuite ale scărilor u şi v (semnul $\approx$ în acest caz arată, că re-

* Natural, funcţiile f_i ($i = 1, 2, 3$) în cadrul limitelor variabilelor sînt considerate pozitive.

zultatele obţinute pentru μ_1 şi μ_2 se vor rotunji — schimbînd la nevoie valorile L_1 şi L_2 — pînă la mărimi învecinate, pentru care avem şabloane). Din punct de vedere practic e bine să utilizăm scări de lungime egală şi atunci se poate scrie, că

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{m_1}{m_3} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\lg f_2(v_2) - \lg f_2(v_1)}{\lg f_1(u_2) - \lg f_1(u_1)},$$

unde h_1 şi h_2 reprezintă distanţele scării-răspuns de scările u şi v. Ce priveşte modulul μ_3 al scării-răspuns, din definiţia de mai sus a modulelor μ_1 şi μ_2 şi din relaţia, care determină pe μ_3 urmează că

$$\mu_3 = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}.$$

3. Un caz particular al cazului general tratat în punctul 2., este nomografierea ecuaţiei (2). Într-adevăr punînd în (2):

$$f_1(u) = u^{\alpha}, \quad f_2(v) = v^{\beta} \quad \text{şi} \quad f_3(w) = \frac{w}{A},$$

ecuaţiile scărilor sînt următoarele:

$$\begin{aligned} &\text{scara } u: x = -H, && y = \mu_1 \alpha \lg u - a_1; \\ &\text{scara } v: x = H, && y = \mu_2 \beta \lg v - b_1; \\ &\text{scara } w: x = \frac{H(\mu_1 - \mu_2)}{\mu_1 + \mu_2}, && y = \mu_3 \lg \frac{w}{A} - c_1, \end{aligned}$$

de unde introducînd notaţiile:

$$\begin{aligned} M_1 &= \mu_1 \alpha, & a' &= a_1, \\ M_2 &= \mu_2 \beta, & b' &= b_1, \\ M_3 &= \mu_3, & c' &= c_1 + \mu_3 \lg A, \end{aligned}$$

obţinem ecuaţiile date de Pentkovski.

În cele ce urmează, vom studia cum trebuie să fie funcţiile f_i ($i = 1, 2, 3$), ca ecuaţia (3) să poată fi nomografiată cu succes după metoda indicată, adică pe scări logaritmice sau quasilogaritmice aşezate pe suporţi paraleli. Acest studiu îl vom face pe baza studiului caracteristicii logaritmice [$\Delta s = s'(u) \, . \, u \, \delta$] ale scării. Dacă această caracteristică nu diferă mult de caracteristica logaritmică constantă a scării logaritmice, nomograma se va putea folosi cu succes.

În cazul general considerat de noi, lungimea s a arcului suportului este dată de relaţia $s = y$ şi astfel caracteristica logaritmică a scării w de exemplu, se poate scrie:

$$\Delta s_w = (\mu_3 \lg f_3 - c_1)' \, . \, w \, . \, \delta = \mu_3 \delta \cdot \frac{f_3'}{f_3} \cdot w \, .$$

Cum $\mu_3 \delta$ = const., se va studia numai expresia $\frac{f_3'}{f_3} \cdot w$.

In cazul ecuaţiei (2) s-a văzut deja, că dacă funcţiile f_i sînt funcţii de putere, nomograma se compune chiar din scări logaritmice, caracteristica ei fiind constantă.

Se obţine rezultat bun şi în acel caz, cînd funcţiile f_i sînt polinoame, sau puteri de polinoame şi valorile considerate ale variablielor u, v, w satisfac unele condiţii. Intr-adevăr, presupunînd că f_3 de exemplu este de forma

$$f_3(w)=(\alpha_n w^n+\alpha_{n-1}w^{n-1}+\cdots+\alpha_0)^p,$$

putem scrie că:

$$\frac{f_3'\cdot w}{f_3}=\frac{p\,[n\alpha_n w^{n-1}+(n-1)\alpha_{n-1}w^{n-2}+\cdots+\alpha_1]w}{\alpha_n w^n+\alpha_{n-1}w^{n-1}+\cdots+\alpha_0}=$$

$$=p\cdot\frac{n+\dfrac{(n-1)\alpha_{n-1}}{\alpha_n w}+\cdots+\dfrac{\alpha_1}{\alpha_n w^{n-1}}}{1+\dfrac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n w}+\cdots+\dfrac{\alpha_0}{\alpha_n w^n}},$$

ceea ce diferă din ce în ce mai puţin de constanta $k=pn$, dacă w este mai mare decît $M=\max\,(l, l')$, unde l şi l' sînt limitele superioare ale rădăcinilor pozitive pentru polinoamele f_3, respectiv f'_3.

In caz particular, dacă funcţiile f_i sînt puteri ale unor funcţii lineare de variabilele considerate, nomogramele construite după metoda indicată sînt foarte potrivite.

La fel, punînd anumite condiţii, metoda expusă se poate aplica şi în acel caz, cînd una sau mai multe dintre funcţiile f_i, de exemplu f_1 are forma:

$$f_1(u)=C(u).u^{\alpha},$$

unde $C(u)$ este o funcţie mărginită şi monotonă şi satisface condiţia $C(u)\geq 1$. Intr-adevăr, presupunem pentru fixarea ideilor, că $C(u)$ este crescătoare şi $\lim\limits_{n\to\infty} C(u)=K$. Fie u_0 o valoare pentru care $C(u)\geqq K-\varepsilon$, unde $\varepsilon>0$ e oricît de mic vrem. Presupunînd $C(u)$ derivabilă şi fără puncte de inflexiune pentru $u\geqq u_0$, formula creşterilor finite ne dă:

$$\varepsilon>(u-u_0).C'(\bar{u}),\qquad u_0<\bar{u}<u$$

de unde

$$C'(u)<C'(\bar{u})<\frac{\varepsilon}{u-u_0}.$$

Dacă $C(u)$ este descrescătoare, obţinem aceeaşi relaţie pentru $|C'(u)|$, deci putem scrie în ambele cazuri:

$$|C'(u)|<\frac{\varepsilon}{u-u_0}.$$

Calculînd acuma caracteristica logaritmică, obţinem

$$\frac{f_1'(u).u}{f_1(u)}=\frac{C'(u).u}{C(u)}+\alpha$$

şi cum $C(u)\geqq 1$,

$$\left|\frac{C'(u).u}{C(u)}\right|\leqslant|C'(u).u|<\frac{\varepsilon.u}{u-u_0}=\frac{\varepsilon}{1-\dfrac{u_0}{u}}.$$

Dacă $u\geqq 2u_0$, $|C'(u).u|<2\varepsilon$, ceea ce înseamnă că pentru valori u corespunzător alese $(u\geqq 2u_0)$, caracteristica logaritmică diferă cu mai puţin decît 2ε de constanta α.

In unele probleme practice funcţia $C(u)$ se prezintă ca o funcţie definită numai pentru valori întregi (sau mai general numai pentru valori discrete) ale variabilei. Valorile acestei funcţii (date în majoritatea cazurilor în table uzuale) pot fi privite în principiu ca valorile unei funcţii continue, care satisface toate condiţiile puse mai sus şi astfel aplicabilitatea metodei prezentate este justificată şi în acest caz.

In cele de mai sus am studiat unele tipuri de funcţii alese pe considerente practice. Teoretic problema se pune în felul următor: să se găsească funcţiile $Y(t)$, care satisfac ecuaţia diferenţială:

$$\frac{Y'(t)}{Y(t)}\cdot t=k+\sigma(t),$$

unde k e constantă, iar $|\sigma(t)|<\alpha$, α fiind un număr destul de mic. Soluţia generală a acestei ecuaţii se prezintă sub forma

$$Y(t)=C\,t^k\,e^{\int\frac{\sigma(t)}{t}dt},$$

care în cel mai simplu caz (pentru $\sigma(t)$ = const.) ne redă funcţia de puteri din ecuaţia (2) tratată de Pentkovski.

Ar fi interesant ca într-o lucrare viitoare să se vadă comportarea curbelor integrale ale ecuaţiei (4) faţă de curbele integrale ale ecuaţiei fără termenul $\sigma(t)$, ceea ce s-ar putea face cu metodele teoriei calitative ale ecuaţiilor diferenţiale.

4. In cele ce urmează, dăm un exemplu de nomografierea practică a unei ecuaţii de tip (3), care are aplicaţii imediate în statistica economică la metoda selectivă (determinarea erorilor).

Eroarea absolută a mediei $(\triangle_x)$ din mostră, respectiv eroarea frecvenţei relative $(\triangle_w)$ din mostră se determină cu formulele cunoscute:

$$\Delta_x=K(n)\cdot\frac{t.s}{\sqrt{n}}\sqrt{1-\frac{n}{N}},$$

respectiv

$$\Delta_w=\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\sqrt{1-\frac{n}{N}},$$

pentru $n\geqq 80$ şi $np\geqq 4$, în care t este variabila funcţiei Liapunov-Gauss $\Phi(t)$, s abaterea tip, n numărul unităţilor din mostră, p frecvenţa relativă a unităţilor purtătoare a caracteristicii urmărite, iar $K(n)$ e o funcţie de n. Acest $K(n)$:

a) pentru domeniul $2 \leq n < 25$ este dat de relaţia

$$K(n) = \frac{1}{C_n},$$

unde

$$C_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \sqrt{\frac{2}{n}} \qquad [1., \text{pag. } 169]$$

b) pentru domeniul $25 \leq n < 80$ este dat prin relaţia

$$K(n) = \frac{t'}{t} \sqrt{\frac{n}{n-1}},$$

unde t' este variabila din funcţia $\varphi(t')$ a probabilităţilor pentru colectivităţi cu volum redus [1., pag. 169]

c) pentru domeniul $n \geq 80$, $K(n) = 1$.

Considerînd în aceste formule $t = 3$ şi $\sqrt{1 - \frac{n}{N}} = 1$, se poate scrie, că

$$f_3(w) = \frac{\Delta_x}{3}, \quad f_1(u) = \frac{K(n)}{\sqrt{n}}, \quad f_2(v) = s,$$

sau în formula a doua

$$f_3(w) = \frac{\Delta_w}{3}, \quad f_1(u) = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad f_2(v) = \sqrt{p(1-p)}.$$

Pe baza celor arătate în punctele 2. şi 3., funcţiunile de mai sus vor putea fi nomografiate într-un sistem de trei axe paralele pe scări logaritmice, Δ_x', respectiv Δ_w şi s fiind reprezentate în scări pur logaritmice. Valorile lui n şi $p / 1-p$ sînt cotate ţinînd seama de expresiile $\frac{K(n)}{\sqrt{n}}$ şi $\sqrt{p(1-p)}$, ale căror valori formează deasemenea scări pur logaritmice.

Corecţiile necesare pentru valori t diferite de 3 şi $\sqrt{1 - \frac{n}{N}} < 1$, se rezolvă cu ajutorul combinării nomogramei de mai sus cu două nomograme reticulare.

Pentru corecţiile corespunzătoare diferitelor valori ale lui t, s-a construit nomograma reticulară aşezată în majoritate în stînga scării Δ_x. Această nomogramă se compune din trei familii de drepte: cele inclinate sînt cotate cu valorile Δ_x corespunzătoare la $t = 3$ (se citesc la intersecţia acestor drepte cu scara Δ_x), cele paralele cu scara Δ_x sînt cotate cu valorile funcţiei $P = \Phi(t)$, corespunzătoare la diferitele valori ale lui t, iar cele per-

6

e o func-

. 169]

colectivi-

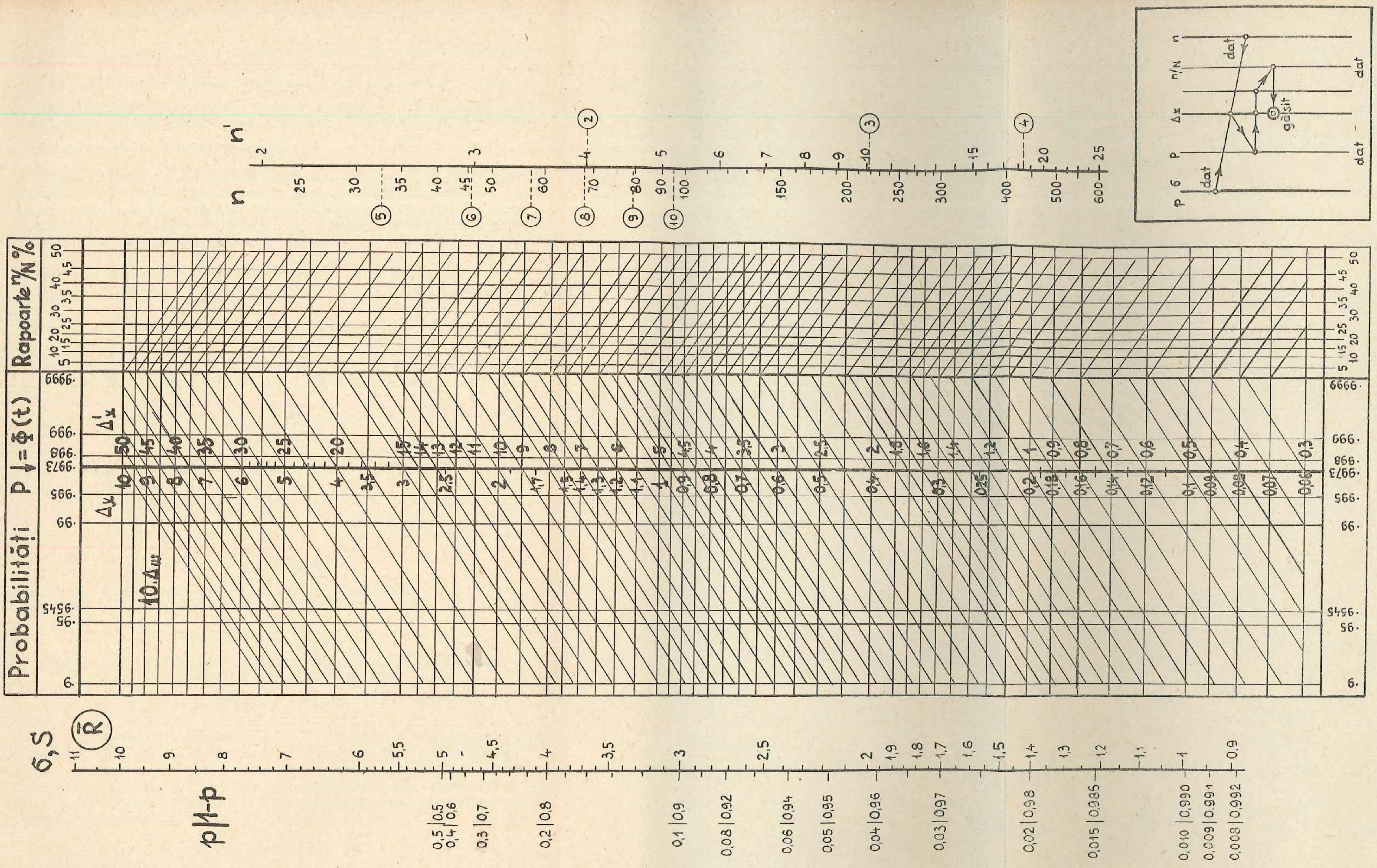
scrie, că

sus vor
logarit-
ritmice.
$\frac{K(n)}{\sqrt{n}}$ și
ritmice.

rezolvă

ne reti-

-a con-
. Acea-
te sînt
a aces-
valorile
le per-



pendiculare pe scara Δ_x sînt cotate cu valorile Δ_x corectate (citibile tot pe scara Δ_x). Corecţiile necesare pentru $\sqrt{1-\frac{n}{N}} < 1$ se rezolvă cu nomograma reticulară aşezată în partea dreaptă a scării Δ_x. Construcţia acestei nomograme e asemănătoare celei precedente (dreptele paralele cu scara Δ_x aici sînt cotate cu valorile raportului $\left.\frac{n}{N}\right)$.

Modul de folosire a nomogramei este următorul: valorile s şi n (pentru domeniul $2 \leq n < 25$ notat cu n') se caută pe scările respective şi unind aceste puncte cu o linie dreaptă, rezultatul se citeşte pe scara Δ_x (pentru valorile n) sau Δ'_x (pentru valorile n'). Δ_w se citeşte pe scara $10 \, \Delta_x$ (în valori mărite de 10 ori), valorile lui p fixîndu-se pe scara $p \mid 1-p$. Erorile $\Delta_x(\Delta'_x)$ şi Δ_w găsite astfel corespund la $t = 3$ $(P = 0{,}9973)$ şi $\sqrt{1-\frac{n}{N}} = 1$.

Pentru a găsi erorile pentru alte valori de probabilitate şi alte valori ale lui $\sqrt{1-\frac{n}{N}}$ folosim nomogramele reticulare amintite conform schemei de pe nomogramă.

In nomogramă s-au trecut şi valorile $2 \leq \widehat{(n)} \leq 10$, pentru calculul erorii valorii medii din mostră, cu folosirea amplitudinii din mostră:

$$\Delta_x = \frac{t \cdot R}{d_n \cdot \sqrt{n}},$$

în care R este amplitudinea medie a unui număr de mostre, iar d_n este dat în table uzuale în funcţie de n [1., pag. 169].

(Lucrare depusă la data de 9 iulie 1954).

Catedra de analiză şi algebră a Universităţii Bolyai din Cluj

BIBLIOGRAFIE

1. Dlin A. M., *Matematicescaia statistica v tehniche*. Moscova, 1951.
2. Pentkovski M. V. *Nomografia*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1952.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Некоторые практические задачи относящиеся к номографии уравнений типа $f_3(w) = f_1(u) \cdot f_2(v)$

Б. ЧЕКЕ и З. ЧЕНДЕШ

Авторы исходя от практического метода номографии уравнений (1) и (2) данного Пентковским, доказывают, что этот метод можно применить и вообще к уравнениям типа (3). Потом они изучают форму функций f_i где номография уравнения (3) при помощи указанного метода может быть успешно сделана. Работа производится путём изучения логарифмической характеристики масштабов.

В конце авторы дают один пример практической номографии уравнения типа (3) а именно строят путём указанного метода номограмму, при помощи которой можно вычислить в одно и то же время абсолютную ошибку среднего количества образца, ошибку сравнительной чистоты образца, а также и ошибку средней ценности образца с пользованием его величины.

RÉSUMÉ

Quelques problèmes pratiques concernant la construction de nomogrammes pour les équations du type $f_3(w) = f_1(u).f_2(v)$

par

V. CSEKE et Z. CSENDES

Les auteurs prennent comme point de départ la méthode pratique de construction des nomogrammes pour les équations (1) et (2), indiquée par Pentkovschi, et démontrent que cette méthode peut s'étendre, en général, à toutes les équations du type (3). Puis ils étudient la forme des fonctions f_i pour lesquelles la construction de nomogrammes pour l'équation (3), par la méthode indiquée, peut se faire avec succès. Cette étude se fait par l'analyse des caractéristiques logarithmiques des échelles. Les auteurs donnent ensuite un exemple de construction pratique d'un nomogramme pour une équation du type (3), à l'aide duquel il est possible de calculer en même temps l'erreur absolue de la moyenne, l'erreur de la fréquence relative et l'erreur de la valeur moyenne d'un échantillon, en se servant de l'amplitude de ce dernier.