GENERALIZAREA FORMULEI DE CUADRATURĂ A LUI N. OBRESCHKOFF

DE

D. V. IONESCU

Comunicare prezentată de Prof. TIBERIU POPOVICIU, m. coresp. al Academiei R.P.R., în şedinţa de comunicări din 24 Sept. 1952 a Filialei Cluj a Academiei R.P.R.

1. Fie $f(x)$ o funcţiune definită în intervalul $[a, b]$ având derivate succesive până la ordinul $p+q$. Se cunoaşte formula de cuadratură

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{\alpha=1}^{q} (-1)^{\alpha-1} \frac{C_q^\alpha}{C_{p+q}^\alpha} \frac{(b-a)^\alpha}{\alpha!} f^{(\alpha-1)}(b) + \sum_{\beta=1}^{p} \frac{C_p^\beta}{C_{p+q}^\beta} \frac{(b-a)^\beta}{\beta!} f^{(\beta-1)}(a) + \frac{(-1)^q}{(p+q)!} \int_a^b (x-a)^q (b-x^p) f^{(p+q)}(x)\,dx. \tag{1}$$

care a fost dată de N. O b r e s c h k o f f [3].

Când $p = q$, formula precedentă devine

$$\int_a^b (f x)\,dx = \sum_{\alpha=1}^{q} (-1)^{\alpha-1} \frac{C_q^\alpha}{C_{2q}^\alpha} \frac{(b-a)^\alpha}{\alpha!} [f^{(\alpha-1)}(b) + (1-)^{\alpha-1} f^{(\alpha-1)}(a)] + \frac{(-1)^q}{(2q)!} \int_a^b (x-a)^q (b-x)^q f^{(2q)}(x)\,dx. \tag{2}$$

Ea a fost dată înaintea formulei (1) de către K. P e t r [4].

Formulele (1) şi (2) au fost studiate şi de către matematicianul sovietic S. E. M i k e l a d z e [2].

In această lucrare vom da o generalizare a formulei (1) a lui N. O b r e s c h k o f f.

2. Fie $\pi(x)$ o funcţiune integrabilă în intervalul $[a, b]$ şi $f(x)$ o funcţiune având derivate succesive în acest interval până la ordinul $n+p+q$. Să considerăm integrala:

$$\mathrm{I} = \int_a^b \pi(x) f(x)\, dx \tag{3}$$

pentru care vrem să dăm o formulă de cuadratură cu ajutorul valorilor lui $f^{(r)}(a)$, unde $r = 0, 1, \ldots, n+p-1$ şi ale lui $f^{(s)}(b)$ unde $s = 0, 1, \ldots, q-1$.

In acest scop să ataşăm la integrala (3) ecuaţia diferenţială

$$\varphi^{(n+p+q)}(x) = \pi(x) \tag{4}$$

pe care s'o integrăm cu condiţiile la limită

$$\varphi^{(r)}(a) = 0, \qquad r = 0, 1, \ldots, q-1 \tag{5}$$

$$\varphi^{(s)}(b) = 0, \qquad s = 0, 1, \ldots, n+p-1. \tag{6}$$

Acest procedeu de lucru l-am mai folosit şi cu altă ocazie [1].

Funcţiunea $\varphi(x)$ este bine determinată de ecuaţia (4) şi de condiţiile la limită (5) şi (6).

Ţinând seamă numai de condiţiile la limită (6), avem

$$\varphi(x) = (-1)^{n+p+q} \int_x^b \pi(t) \frac{(t-x)^{n+p+q-1}}{(n+p+q-1)!}\, dt + \mathrm{H}(x) \tag{7}$$

unde

$$\mathrm{H}(x) = \frac{-1}{(n+p+q-1)!} \sum_{s=1}^{q} \mathrm{C}_{n+p+q-1}^{s-1} \lambda_{s-1} (b-x)^{n+p+q-s} \tag{8}$$

$\lambda_0 \lambda_1, \ldots, \lambda_{q-1}$ fiind constante arbitrare.

Derivând de r ori formula (7), vom avea:

$$\varphi^{(r)}(x) = \frac{(-1)^r}{(n+p+q-r-1)!} \Big\{ (-1)^{n+p+q} \int_x^b \pi(t)(t-x)^{n+p+q-r-1}\, dt - \sum_{s=1}^{q} \mathrm{C}_{n+p+q-r-1}^{s-1} \lambda_{s-1} (b-x)^{n+p+q-r-s} \Big\} \tag{9}$$

Dacă în această ecuaţie înlocuim pe x cu a şi ţinem seamă de condiţiile (5), vom obţine sistemul de ecuaţii lineare

$$\sum_{s=1}^{q} \mathrm{C}_{n+p+q-r-1}^{s-1} \lambda_{s-1} (b-a)^{n+p+q-r-s} = (-1)^{n+p+q} \int_a^b \pi(t)(t-a)^{n+p+q-r-1}\, dt \tag{10}$$

unde $r = 0, 1, \ldots q-1$, care determină în mod unic pe $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{q-1}$.

Sistemul (10) se mai scrie:

$$\sum_{s=1}^{q} \mathrm{C}_{n+p+u}^{s-1} \lambda_{s-1} (b-a)^{n+p+u-s+1} = (-1)^{n+p+q} \int_a^b \pi(t)(t-a)^{n+p+u}\, at \tag{11}$$

unde $u = 0, 1, \ldots, q-1$.

Să arătăm cum se rezolvă sistemul de ecuaţii (11) în raport cu $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{q-1}$. Pentru aceasta să considerăm primele l ecuaţii (11) unde $l = 1, 2 \ldots, q$, pe care să le înmulţim pe rând cu

$$(b-a)^{l-1}, \ -\mathrm{C}_{l-1}^{1}(b-a)^{l-2}, \ldots, (-1)^{l-1}\mathrm{C}_{l-1}^{l-1}$$

şi să le adunăm.

Notând:

$$\mathrm{T}_r = \mathrm{C}_{n+p}^{r} - \mathrm{C}_{l-1}^{1}\mathrm{C}_{n+p+1}^{r} + \cdots + (-1)^{l-1}\mathrm{C}_{l-1}^{l-1}\mathrm{C}_{n+p+l-1}^{r}$$

se va obţine ecuaţia

$$\sum_{s=1}^{q} \mathrm{T}_{s-1} \lambda_{s-1} (b-a)^{n+p+l-s-1} = (-1)^{n+p+q} \int_a^b \pi(t)(t-a)^{n+p}(b-t)^{l-1}\, dt \tag{12}$$

unde $l = 1, 2, \ldots, q$.

Se demonstrează că,

$$\mathrm{T}_{s-1} = (-1)^{l-1} \mathrm{C}_{n+p}^{s-l} \tag{13}$$

astfel că

$$\mathrm{T}_0 = 0, \ \mathrm{T}_1 = 0, \ldots, \ \mathrm{T}_{l-2} = 0. \tag{14}$$

Ţinând seama de relaţiile (13) şi (14), ecuaţiile (12) se vor scrie

$$\sum_{s=l}^{q} \mathrm{C}_{n+p}^{s-l} \lambda_{s-1} (b-a)^{n+p+l-s-1} = (-1)^{n+p+q+l-1} \int_a^b \pi(t)(t-a)^{n+p}(b-t)^{l-1}\, dt \tag{15}$$

unde $l = 1, 2, \ldots, q$.

Se vede bine că ultima din aceste ecuaţii determină pe λ_{q-1}, apoi penultima pe λ_{q-2}, şi aşa mai departe, prima determină pe λ_0.

Funcţiunea $\varphi(x)$ este astfel bine determinată de ecuaţia diferenţială (4) şi de condiţiile la limită (5) şi (6).

3. Să revenim la integrala (3) şi să înlocuim pe $\pi(x)$ cu primul membru al ecuaţiei (4). Vom avea:

$$\mathrm{I} = \int_a^b \varphi^{(n+p+q)}(x) f(x)\, dx$$

şi aplicând formula de integrare prin părţi generalizată, vom avea:

$$I=\left[\varphi^{(n+p+q-1)}(x)f(x)-\varphi^{(n+p+q-2)}(x)f'(x)+\cdots+(1)^{n+p+q-1}\varphi(x)f^{(n+p+q-1)}(x)\right]_a^b$$
$$+(-1)^{n+p+q}\int_a^b \varphi(x)f^{(n+p+q)}(x)\,dx$$

şi ţinând seamă de condiţiile (5) şi (6), această formulă se reduce la formula de cuadratură:

$$\int_a^b \pi(x)f(x)\,dx=\sum_{s=1}^{q} B_{s-1}f^{(s-1)}(b)+\sum_{r=1}^{n} A_{r-1}f^{(r-1)}(a) \tag{16}$$
$$+(-1)^{n+p+q}\int_a^b \varphi(x)f^{(n+p+q)}(x)\,dx$$

unde

$$B_{s-1}=(-1)^{s-1}\varphi^{(n+p+q-s)}(b) \qquad (s=1,2,\ldots,q) \tag{17}$$

şi

$$A_{r-1}=(-1)^{r}\varphi^{(n+p+q-r)}(a) \qquad (r=1,2,\ldots,n+p) \tag{18}$$

4. Să presupunem acum că $\pi(x)$ este un polinom de gradul n, pe care să-l determinăm astfel ca în formula (16) să avem:

$$A_p=0,\quad A_{p+1}=0,\ldots,\quad A_{p+n-1}=0. \tag{19}$$

Aceasta înseamnă, ţinând seamă de formulele (18), că funcţiunea $\varphi(x)$ trebue să verifice în afară de condiţiile (5) şi (6) şi condiţiile:

$$\varphi^{(q)}(a)=0,\ \varphi^{(q+1)}(a)=0,\ldots,\varphi^{(q+n-1)}(a)=0. \tag{20}$$

Ţinând seamă de formulele (9) şi de ecuaţiile (10), va trebui să exprimăm că sistemul de ecuaţii:

$$\sum_{s=1}^{q} C_{n+p+q-r-1}^{s-1}\lambda_{s-1}(b-a)^{n+p+q-r-s}=(-1)^{n+p+q}\int_a^b \pi(t)(t-a)^{n+p+q-r-1}\,dt, \tag{21}$$

în $\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_{q-1}$ unde $r=0,1,\ldots,n+q-1$ este compatibil.

Acest sistem se mai scrie

$$\sum_{s=1}^{b} C_{p+u}^{s-1}\lambda_{s-1}(b-a)^{p+u-(s-1)}=(-1)^{n+p+q}\int_a^b \pi(t)(t-a)^{p+u}\,dt \tag{22}$$

unde $u=0,1,\ldots,n+q-1$.

Să considerăm $q+1$ ecuaţii succesive din (22), care se obţin dând lui u valorile $v,\ v+1,\ldots,v+q$, unde $v=0,1,\ldots,n-1$. Aceste ecuaţii să le înmulţim pe rând cu

$$(b-a)^q,\ -C_q^1(b-a)^{q-1},\ldots,(-1)^q C_q^q,$$

şi să le adunăm. Coeficienţii lui $\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_{q-1}$, devin $T'_0,\ T'_1,\ldots,T'_{k-1}$, unde în general:

$$T'_{s-1}=C_{p+v}^{s-1}-C_q^1 C_{p+v+1}^{s-1}+\cdots+(-)1^q C_q^q C_{p+v+q}^{s-1} \tag{23}$$

$(s=1,2,\ldots,q)$.

Se obţin astfel ecuaţiile:

$$\sum_{s=1}^{q} T'_{s-1}\lambda_{s-1}(b-a)^{p+v-(s-1)+q}=(-1)^{n+p+q}\int_a^b \pi(t)(t-a)^{p+v}(b-t)^q\,dt \tag{24}$$

unde $v=0,1,\ldots,n-1$.

Se demonstrează că

$$T'_{s-1}=C_{p+v}^{s-q-1}$$

şi ţinând seamă că s ia valorile $1,2,\ldots,q$, se deduce că toţi coeficienţii T'_{s-1} din formulele (24) sunt nuli, astfel că formulele (24) se scriu:

$$\int_a^b \pi(t)(t-a)^p(b-t)^q(t-a)^v\,dt=0 \tag{25}$$

pentru $v=0,1,\ldots,n-1$.

Polinomul $\pi(t)$ de gradul n este perfect determinat de ecuaţiile (25), afară de un multiplicator constant.

Să scriem $\pi=\pi_n(t)$, punând în evidenţă că polinomul $\pi_n(t)$ este de gradul n. Relaţiile (25) arată că şirul de polinoame $\pi_n(t)$ este un şir ortogonal faţă de funcţiunea $(t-a)^p(b-t)^q$, adică avem:

$$\int_a^b (t-a)^p(b-t)^q\pi_n(t)\pi_m(t)\,dt=0 \tag{26}$$

pentru $n\neq m$.

Relaţiile (26) arată că $\pi_n(t)$ este un polinom Jacobi definit de formula:

$$\pi_n(t)=J_n(p+q+1,q+1;x) \tag{27}$$
$$=\frac{(-1)^n p!}{(n+p)!(b-a)^n(x-a)^p(b-x)^q}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x-a)^{n+p}(b-x)^{n+q}\right].$$

5. Dacă alegem pentru $\pi(x)$ polinomul lui Jacobi (27) formula de cuadratură (16) devine:

$$\int_a^b J_n(x)f(x)\,dx=\sum_{s=1}^{q} B_{s-1}f^{(s-1)}(b)+\sum_{r=1}^{q} A_{r-1}f^{(r-1)}(a) \tag{28}$$
$$+(-1)^{n+p+q}\int_a^b \varphi(x)f^{(n+p+q)}(x)\,dx.$$

6

Să dăm expresia lui $\varphi(x)$ și a coeficienților A_{r-1}, B_{s-1} în acezt caz. Știm că $\varphi(x)$ satisface la condițiile la limită (5), (6) și (20) adică:

(29)
$$\varphi^{(r)}(a)=0 \qquad (r=0,1,\dots,n+q-1)$$
$$\varphi^{(s)}(b)=0 \qquad (s=0,1,\dots,n+p-1)$$

Numărul acestor condiții este $2n+p+q$. Derivând de n ori ecuația (4), obținem:

(30)
$$\varphi^{(2n+p+q)}(x)=J_n^{(n)}(x)$$

membru al doilea fiind o constantă.

Ecuațiile (29) și (30) arată că:

(31)
$$\varphi(x)=J_n^{(n)}(x)\,\frac{(-1)^{n+p}(x-a)^{n+q}(b-x)^{n+p}}{(2n+p+q)!}.$$

Rămâne să determinăm constanta $J_n^{(n)}(x)$. Aplicând formula lui Leibniz, putem scrie:

$$J_n(x)=\frac{(-1)^n p!}{(n+p)!(b-a)^n}\Big\{(n+p)(n+p-1)\dots(p+1)(b-x)^n - C_n^1(n+p)(n+q-1)\dots(p+2)(n+q)(x-a)(b-x)^{n-1} + \dots\dots + (-1)^n C_n^n(n+q)(n+q-1)\dots(q+1)(x-a)^n\Big\}$$

Derivând de n ori, avem:

(32)
$$J_n^{(n)}(x)=\frac{1}{C_{n+p}^p(b-a)^n}E_n(p,q)$$

unde

$$E_n(p,q)=(n+p)(n+p-1)\dots(p+1)+C_n^1(n+p)(n+p-1)\dots(p+2)(n+q)+\dots\dots+C_n^n(n+q)(n+q-1)\dots(q+1).$$

Utilizând formula

$$C_n^j=C_{n-1}^j+C_{n-1}^{j-1}$$

unde $j=1,2,\dots,n$, în $E_n(p,q)$ se pot grupa termenii doi câte doi, ceeace pune în evidență factorul $n+p+q+1$, și ne conduce la relația de recurență

$$E_n(p,q)=(n+p+q+1)E_{n-1}(p+1,q+1)$$

Ținând seamă că

$$E_1(p+n-1,q+n-1)=n+p+n+q,$$

se deduce că

$$E_n(p,q)=(n+p+q+1)(n+p+q+2)\dots(2n+p+q)$$

și prin urmare revenind la formula (32), vom avea:

$$J_n^{(n)}(x)=\frac{(n+p+q+1)(n+p+q+2)\dots(2n+p+q)}{C_{n+p}^p(b-a)^n}$$

astfel încât formula (31) devine în definitiv

(33)
$$\varphi(x)=(-1)^{n+p}\frac{(x-a)^{n+q}(b-x)^{n+p}}{C_{n+p}^n(n+p+q)!(b-a)^n}.$$

Pentru a avea expresiile coeficienților A_{r-1} și B_{s-1} din formula (28), folosim relațiile (17) și (18)

(34)
$$A_{r-1}=(-1)^r\varphi^{(n+p+q-r)}(a) \qquad (r=1,2,\dots,p)$$

(35)
$$B_{s-1}=(-1)^{s-1}\varphi^{(n+p+q-s)}(b) \qquad (s=1,2,\dots,q)$$

Scriind pe $\varphi(x)$ sub forma

$$\varphi(x)=\frac{(-1)^{n+p}}{C_{n+p}^p(n+p+q)!(b-a)^n}\Big[(b-a)^{n+p}(x-a)^{n+q}-C_{n+p}^1(b-a)^{n+p-1}(x-a)^{n+q+1}+\dots+(-1)^{n+p}C_{n+p}^{n+p}(x-a)^{2n+p+q}\Big]$$

sau sub forma

$$\varphi(x)=\frac{(-1)^{n+p}}{C_{n+p}^p(n+p+q)!(b-a)^n}\Big[(b-a)^{n+q}(b-x)^{n+p}-C_{n+q}^1(b-a)^{n+q-1}(b-x)^{n+p+1}+\dots+(-1)^{n+q}C_{n+q}^{n+q}(b-x)^{2n+p+q}\Big].$$

Din aceste expresii se deduce că

$$\varphi^{(n+p+q-r)}(a)=(-1)^{n-r}\frac{C_{n+p}^{p-r}(b-a)^{n+r}(n+p+q-r)!}{C_{n+p}^p(n+p+q)!(b-a)^n}$$

pentru $r=1,2,\dots,p$, și

$$\varphi^{(n+p+q-s)}(b)=\frac{C_{n+q}^{q-s}(b-a)^{n+s}(n+p+q-s)!}{C_{n+p}^p(n+p+q)!(b-a)^n}$$

pentru $s=1,2,\dots,q$.

Aceste formule se mai scriu

$$\varphi^{(n+p+q-r)}(a)=(-1)^{n-r}\frac{C_{n+p}^{n+r}}{C_{n+p}^p C_{n+p+q}^r}\,\frac{(b-a)^r}{r!}$$

pentru $r=1,2,\dots,p$, și

$$\varphi^{(n+p+q-s)}(b)=\frac{C_{n+q}^{n+s}}{C_{n+p}^p C_{n+p+q}^s}\,\frac{(b-a)^s}{s!}$$

pentru $s=1,2,\dots,q$.

Revenind la formulele (34) şi (35) vom avea deci:

$$\text{(34')}\qquad A_{r-1}=\frac{(-1)^n}{C^p_{n+p}}\,\frac{C^{n+r}_{n+p}}{C^r_{n+p+q}}\,\frac{(b-a)^r}{r!}\qquad (r=1,2,\ldots p)$$

$$\text{(35')}\qquad B_{s-1}=\frac{(-1)^{s-1}}{C^p_{n+p}}\,\frac{C^{n+s}_{n+q}}{C^s_{n+p+q}}\,\frac{(b-a)^s}{s!}\qquad (s=1,2,\ldots q)$$

Purtând aceşti coeficienţi în formula (28) şi înlocuind pe $\varphi(x)$ cu formula (33), obţinem formula de cuadratură pe care o avem în vedere.

$$\text{(36)}\qquad \int_a^b J_n(x)f(x)\,dx=\frac{1}{C^p_{n+p}}\sum_{s=1}^{q}(-1)^{s-1}\frac{C^{n+s}_{n+q}}{C^s_{n+p+q}}\,\frac{(b-a)^s}{s!}f^{(s-1)}(b)$$

$$+\frac{(-1)^n}{C^p_{n+p}}\sum_{r=1}^{p}\frac{C^{n+r}_{n+p}}{C^r_{n+p+q}}\,\frac{(b-a)^r}{r!}f^{(r-1)}(a)$$

$$+\frac{(-1)^q}{C^p_{n+p}\,(n+p+q)!\,(b-a)^n}\int_a^b (x-a)^{n+q}(b-x)^{n+p}f^{(n+p+q)}(x)\,dx$$

Această formulă generalizează formula (1) a lui N. Obreschkoff. Ea se obţine din formula (36) făcând $n=0$.

Dacă în formula (36) luăm $p=q$, obţinem formula:

$$\text{(37)}\int_a^b J_n(x)f(x)dx=\frac{1}{C^q_{n+q}}\sum_{s=1}^{q}(-1)^{s-1}\frac{C^{n+s}_{n+q}}{C^s_{n+2q}}\,\frac{(b-a)^s}{s!}\left[f^{(s-1)}(b)+(-1)^{n+s-1}f^{(s-1)}(a)\right]$$

$$+\frac{(-1)^q}{C^q_{n+q}\,(n+2q)!\,(b-a)^n}\int_a^b (x-a)^{n+q}(b-x)^{n+q}f^{(n+2q)}(x)\,dx\,.$$

care generalizează formula (2) a lui K. Petr. Când în formula (37) se face $n=0$ se obţine formula (2).

Formulele (36) şi (37) pot fi utile pentru calculul integralelor de forma (3) unde $\pi(x)$ este un polinom, deoarece orice polinom poate fi exprimat printr'o combinaţie lineară de polinoamele $J_n(x)$ date de formula (27).

Secţia de Matematică
a Filialei Cluj a Academiei R.P.R.

BIBLIOGRAFIE

1. Ionescu V. D., *Despre o formulă de cuadratură mecanică.* Academia R.P.R. Lucrările sesiunii generale ştiinţifice din 2—12 Iunie 1950, p. 238—243.
2. Mikeladze E. S., *Integrarea numerică.* Uspehi Matematicesky Nauk. III, 6 (28), 1948, p. 3—88.
3. Obreschkoff N., *Neue Quadraturformeln.* Abhandlungen der Preussischen Akademie der Wissenschaften, 1940, Nr. 4, p. 6—26.
4. Petr K., *Über eine Formel für numerische Berechnung der bestimmten Integrale.* Casopis propestovani Matematiky a Fysiky. 1915, 44, p. 454—455.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Обобщение формулы квадратуры Н. Обрезкова

Д. В. ИОНЕСКУ

В этой работе дана формула квадратуры (16) для интеграла (3), где $\pi(x)$ интегрирующаяся функция в интервале $[a, b]$, а $f(x)$ — функция, имеющая последовательные производные в $[a, b]$ до степени $n+p+q$. В формуле (16), в которой коэффициенты A_{r-1}, B_{s-1} даны формулами (17) и (18), фигурирует функция $\varphi(x)$, интеграл простого дифференциального уравнения (4), соответствующего условиям (5) и (6).

Предположим далее, что $\pi(x)$ — полином степени n, который определяется, таким образом, чтобы в формуле (16) были бы соотношения (19). Доказывают, что в этом случае полином $\pi(x)=\pi_n(x)$ удовлетворяет соотношения ортогональности, показывающей, что $\pi_n(x)$ является полиномом Якоби (27).

Итак, формула квадратуры, которая обобщает формулу (1) Обрезкова [3], ведет нас и к формуле (37), обобщающей формулу (2) К. Петра [4].

RÉSUMÉ

La généralisation de la formule de quadrature de N. Obreschkoff.

par

D. V. IONESCU

Dans ce travail on a donné la formule de quadrature (16) pour l'intégrale (3), où $\pi(x)$ est une fonction intégrable dans l'intervalle $[a, b]$ et $f(x)$ est une fonction ayant des dérivées successives dans $[a, b]$ jusqu'à l'ordre $n+p+q$. Dans la formule (16) où les coefficients A_{r-1}, B_{s-1} sont donnés par les formules (17) et (18) figure la fonction $\varphi(x)$ qui est l'intégrale de l'équation différentielle simple (4) qui satisfait aux conditions (5) et (6).

On suppose ensuite que $\pi(x)$ est un polynôme de degré n qu'on cherche à déterminer, de façon que dans la formule (16) on ait les relations (19). On démontre que dans ce cas, le polynôme $\pi(x)=\pi_n(x)$, satisfait aux relations d'orthogonalité (26) qui montrent que $\pi_n(x)$ est le polynôme de Jacobi (27).

On est ainsi conduit à la formule de quadrature (36) qui généralise la formule (1) de N. Obreschkoff [3], et à la formule (37) qui généralise la formule (2) de K. Petr [4].