ASUPRA UNEI PROBLEME DE PROPAGAREA CĂLDURII

DE

GEORGE CĂLUGĂREANU

Comunicare prezentată de Prof. TIBERIU POPOVICIU, m. coresp. al Academiei R.P.R., în ședința de comunicări din 24 Sept. 1952 a Filialei Cluj a Academiei R.P.R.

Studiul tehnic al uzurii țevilor la cazanele tubulare cu aburi a condus pe tov. Ing. L. Némethi la următoarea problemă de propagare a căldurii:

Se cere distribuția temperaturii $t\,(x,\, y,\, z)$, în regim permanent, în pereții unui tub cilindric indefinit, încălzit uniform dela exterior, în interiorul căruia se află 2 fluide (apă și vapori de apă) separate de o suprafață plană perpendiculară pe axa tubului.[1])

Se știe că în regim permanent temperatura t este o funcție armonică de x, y, z, regulată în tot interiorul peretelui tubului. Ea va mai satisface condiții la limită, pe care tov. L. Némethi le-a formulat astfel:

$$r=r_i\,,\ \lambda\frac{\partial t}{\partial r}=\alpha\ ;\quad \alpha=\alpha_+\,,\ z>0\ ;\quad \alpha=\alpha_-\,,\ z<0$$

$$r=r_e\,,\ \lambda\frac{\partial t}{\partial r}=Q$$

unde s'au notat cu r și z coordonatele cilindrice, iar $\alpha+$, α_-, λ, Q, fiind niște constante termice ale problemei, r_i și r_e fiind razele interioară și exterioară ale tubului. Ținând seamă de simetria de rotație în jurul axei Oz, suntem conduși la o problemă în plan; se cere funcția $t(r,\, z)$, continuă în interiorul benzii $(r_i,\, r_e)$, care verifică ecuația cu derivate parțiale:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial t}{\partial\,\cdot}=0$$

cu condițiile la limită de mai sus. Făcând schimbarea $r=(1+y)\,\dfrac{r_i+r_e}{2}$ și notând $\varepsilon=\dfrac{r_e-r_i}{r_e+r_i}$, $u=\dfrac{2\lambda t}{Q(r_i+r_e)}$, obținem

[1]) Problema a fost luată în studiu de un colectiv al Secției din Cluj a Inst. de Matematică al Acad. R.P.R.

(1)
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{1}{1+y}\,\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

unde s'a schimbat și z în $\dfrac{2z}{r_i+r_e}$. Condițiile la limită iau forma

(2)
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\gamma u\,,\ y=-\varepsilon\ ;\quad \gamma=\gamma^+\,,\ z>0\ ;\quad \gamma=\gamma^-\,,\ z<0$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=1\,,\ y=\varepsilon$$

Despre constantele γ se precizează că avem $\gamma^+>\gamma^->0$, și se urmărește determinarea unei soluții $u\,(y,\, z)$ care să rămână mărginită în toată banda $-\varepsilon<y<\varepsilon$.

Pentru a obține o astfel de soluție, s'a căutat mai întâi o funcție de y și z care să verifice condițiile date în semi-banda $-\varepsilon<y<\varepsilon$, $z>0$, apoi alta care să verifice condițiile în cealaltă semi-bandă $-\varepsilon<y<\varepsilon$, $z<0$, rămânând ca aceste funcții să se racordeze prin continuitate, împreună cu toate derivatele lor parțiale, dealungul segmentului $-\varepsilon<y<\varepsilon$, $z=0$.

Fie $u\,(y,\, z)$ soluția problemei (presupusă existentă). Notând $\sigma=$ semn (z), adică $\sigma=1$ pentru $z>0$ și $\sigma=-1$ pentru $z<0$, să punem

(3)
$$2v=u\,(y,z)+u(y,-z)\,,\ 2w=\sigma\,[u\,(y\,,z)-u(y\,,-z)]\ ;$$
$$\gamma^+=\mu+\delta\,,\ \gamma^-=\mu-\delta.$$

Se vede că avem $u=v+\sigma w$. Aceasta revine la descompunerea funcției u într'o parte pară în raport cu z, $v(y,\, z)$, și o parte impară în z, $\sigma\, w\,(y,\, z)$. In adevăr, avem $v\,(y,\, z)=v\,(y,-z))$, $\sigma\, w\,(y,\, z)=-\sigma w\,(y,-z)$. Se vede că v și w sunt funcții pare de z.

Relația $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\gamma u$ devine

$$\frac{\partial u}{\partial y}=(\mu+\sigma\delta)(v+\sigma w)=\mu v+\delta w+\sigma(\mu w+\delta v)=\frac{\partial v}{\partial y}+\sigma\frac{\partial w}{\partial y}\,,\ \text{pentru } y=-\varepsilon.$$

Condițiile la limită (2) se vor scrie deci

(4)
$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial y}&=\mu v+\delta w\\ \frac{\partial w}{\partial y}&=\mu w+\delta v\end{aligned}\right\}y=-\varepsilon\,,\quad \left.\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial y}&=1\\ \frac{\partial w}{\partial y}&=0\end{aligned}\right\}y=\varepsilon.$$

In adevăr, dacă avem identic în z, $f(z)+\sigma g(z)=0$, unde f și g sunt funcții pare de z, rezultă $f(z)=0$ și $g(z)=0$.

Ecuația cu derivate parțiale (1) se scindează în

(5)
$$(1+y)\,\Delta v+\frac{\partial v}{\partial y}=0\,,\ (1+y)\,\Delta w+\frac{\partial w}{\partial y}=0\,.$$

Din definiția lui w se mai vede că avem

(6)
$$w\,(y\,,0)=0\,.$$

Această transformare nu particularizează de loc problema.

Acum, aplicând metoda lui Fourier, vom căuta să satisfacem aceste condiții cu desvoltările

$$(7)\qquad v=\sum_{n=0}^{\infty} A_n(y)e^{-k_n z}\,, \quad w=\sum_{n=0}^{\infty} B_n(y)e^{-k_n z}$$

unde k_n sunt niște constante pozitive pentru $n>0, k_0=0$, iar A_n și B_n niște funcții încă necunoscute.. Ecuațiile (5) vor fi verificate identic dacă avem

$$A_n''+\frac{1}{1+y}A_n'+k_n^2A_n=0\,, \quad B_n''+\frac{1}{1+y}B_n'+k_n^2B_n=0\,.$$

Rezultă, pentru $n>0$,

$$A_n=C_nJ_0[k_n(1+y)]+D_nY_0[k_n(1+y)]\,, \quad B_n=E_nJ_0[k_n(1+y)]+F_nY_0[k_n(1+y)]$$

C_n, D_n, E_n, F_n, fiind constante arbitrare, iar $J_0(x)$ și $Y_0(x)$ funcțiile lui Bessel de prima și a doua speță, adică soluțiile fundamentale ale ecuației $y''+\frac{1}{x}y'+y=0$. Pentru $n=0$ avem:

$$A_0=C_0\log(1+y)+D_0\,, \quad B_0=E_0\log(1+y)+F_0$$

Substituind desvoltările (7) în condițiile la limită (4), obținem

$$\begin{aligned} A_n'(-\varepsilon)&=\mu A_n(-\varepsilon)+\delta B_n'(-\varepsilon) \\ B_n'(-\varepsilon)&=\mu B_n(-\varepsilon)+\delta A_n(-\varepsilon) \\ A_0'(\varepsilon)&=1 \\ A_n'(\varepsilon)&=0\,, \quad n>0 \\ B_n'(\varepsilon)&=0\,, \quad n\geqslant 0\,. \end{aligned} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}B_n(y)=0$$

Din ultimele condiții rezultă

$$A_0=(1+\varepsilon)\log(1+y)+D_0\,, \quad B_0=\text{const.}\,, \text{ apoi}$$

$$\begin{aligned} &C_nJ_0'[k_n(1+\varepsilon)]+D_nY_0'[k_n(1+\varepsilon)]=0\,, \quad A_n=C_n\{Y_0'[k_n(1+\varepsilon)]J_0[k_n(1+y)]- \\ &\qquad -J_0'[k_n(1+\varepsilon)]Y_0[k_n(1+y)]\}=C_n\Phi_n(y) \\ &E_nJ_0'[k_n(1+\varepsilon)]+F_nY_0'[k_n(1+\varepsilon)]=0\,, \quad B_n=E_n\{Y_0'[k_n(1+\varepsilon)]J_0[k_n(1+y)]- \\ &\qquad -J_0'[k_n(1+\varepsilon)]Y_0[k_n(1+y)]\}=E_n\Phi(y)\,. \end{aligned}$$

Mai avem apoi condițiile la $y=-\varepsilon$, care pentru $n=0$ ne dau

$$D_0=\frac{\mu}{\mu^2-\delta^2}\,\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}-(1+\varepsilon)\log(1-\varepsilon)$$

$$B_0=-\frac{\delta}{\mu^2-\delta^2}\,\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\,.$$

Pentru $n>0$ găsim

$$\begin{aligned} C_n\Phi_n'(-\varepsilon)&=\mu C_n\Phi_n(-\varepsilon)+\delta E_n\Phi_n(-\varepsilon)=(\mu C_n+\delta E_n)\Phi_n(-\varepsilon) \\ E_n\Phi_n'(-\varepsilon)&=(\mu E_n+\delta C_n)\Phi_n(-\varepsilon)\,, \end{aligned}$$

de unde

$$\frac{C_n}{E_n}=\frac{\mu C_n+\delta E_n}{\mu E_n+\delta C_n}\,, \quad E_n^2=C_n^2\,, \quad E_n=\pm C_n\,.$$

Luând $E_n=C_n$, rezultă de mai sus

$$(8)\qquad \frac{\Phi_n'(-\varepsilon)}{\Phi_n(-\varepsilon)}=\mu+\delta=\gamma^+\,.$$

Este o ecuație în k_n care are o infinitate de rădăcini pozitive și o infinitate negative, cum vom vedea. Vom nota aceste rădăcini cu k_n^+, $n=1,2,\dots$

Luând $E_n=-C_n$ rezultă în mod analog

$$(9)\qquad \frac{\Phi_n'(-\varepsilon)}{\Phi_n(-\varepsilon)}=\mu-\delta=\gamma^-$$

ecuație care are deasemeni o infinitate de rădăcini pozitive și o infinitate negative, pe care le vom nota cu k_n^-. Rămân arbitrare constantele C_n pe care le vom afecta deasemeni cu semnul $+$ sau $-$ după cum ele corespund unor valori k_n^+ sau k_n^-. Inlocuind A_n și B_n în (7), obținem în definitiv

$$(10)\qquad u=\frac{1}{\mu+\sigma\delta}\,\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}+(1+\varepsilon)\log(1+y)+(1+\sigma)\sum_{n=1}^{\infty}C_n^+\Phi_n^+(y)\,e^{-k_n^+z}+$$
$$+(1-\sigma)\sum_{n=1}^{\infty}C_n^-\Phi_n^-(y)\,e^{-k_n^-z}\,.$$

Se vede de aci că pentru $z>0$ avem $\sigma=1$, deci u coincide cu desvoltarea după metoda Fourier ce s'ar obține căutând soluția numai în semibanda $z>0$, iar pentru $z<0$ avem $\sigma=-1$ și u coincide cu desvoltarea analoagă ce corespunde semibandei $z<0$. Aci s'a notat

$$\Phi_n^+(y)=Y_0'[k_n^+(1+\varepsilon)]\,J_0[k_n^+(1+y)]-J_0'[k_n^+(1+\varepsilon)]\,Y_0[k_n^+(1+y)]$$

și în mod analog s'a notat $\Phi_n^-(y)$ funcția $\Phi_n(y)$ în care k_n ia valorile k_n^-. Se vede că desvoltarea (10) va fi mărginită atât pentru $z=+\infty$ cât și pentru $z=-\infty$ dacă luăm pentru k_n^+ rădăcinile pozitive ale ecuației (8), și pentru k_n^- rădăcinile negative ale ecuației (9).

Insă funcția u dată de (10) trebue să fie analitică în toată banda $-\varepsilon<y<\varepsilon$, deci atât u, cât și $\frac{\partial u}{\partial z},\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},\dots,\frac{\partial^n u}{\partial z^n},\dots$ trebue să fie continue pentru $z=0$. Putem scrie (10) sub forma

$$u=D_0+(1+\varepsilon)\log(1+y)+\sum_{n=1}^{\infty}C_n^+\Phi_n^+(y)e^{-k_n^+z}+\sum_{m=1}^{\infty}C_m^-\Phi_m^-(y)e^{-k_m^-z}+$$

$$+\sigma\left[B_0+\sum_{n=1}^{\infty}C_n^+\Phi_n^+(y)e^{-k_n^+z}-\sum_{m=1}^{\infty}C_m^-\Phi_m^-(y)e^{-k_m^-z}\right].$$

Punând condiţiile $u(y,0)=u(y,-0)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0}=\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=-0}$, etc. obţinem

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}C_n^+\Phi_n^+(y)-\sum_{m=1}^{\infty}C_m^-\Phi_m^-(y)=-B_0\\
&\sum k_n^+C_n^+\Phi_n^+(y)-\sum k_m^-C_m^-\Phi_m^-(y)=0\\
(11)\qquad&\sum (k_n^+)^2C_n^+\Phi_n^+(y)-\sum (k_m^-)^2C_m^-\Phi_m^-(y)=0\\
&\sum (k_n^+)^3C_n^+\Phi_n^+(y)-\sum (k_m^-)^3C_m^-\Phi_m^-(y)=0\\
&\qquad\cdots\qquad\qquad\cdots
\end{aligned}$$

Aci s'a anulat coeficientul lui σ în u, $\frac{\partial u}{\partial z}$, ... după ce s'a pus $z=0$. Avem aci un sistem linear infinit pentru constantele C_n^+ şi C_m^-. Dacă vom putea găsi valori C_n^+ şi C_m^- care să verifice acest sistem pentru orice y în intervalul $(-\varepsilon, \varepsilon)$, vom avea o soluţie a problemei. Notând $C_n^+\Phi_n^+(y)=-B_0\,\xi_n^+$, $C_m^-\Phi_m^-(y)=B_0\,\xi_m^-$, suntem conduşi la sistemul

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n^++\sum_{m=1}^{\infty}\xi_m^-=1\\
&\sum k_n^+\xi_n^++\sum k_m^-\xi_m^-=0\\
(12)\qquad&\sum (k_n^+)^2\xi_n^++\sum (k_m^-)^2\xi_m^-=0\\
&\sum (k_n^+)^3\xi_n^++\sum (k_m^-)^3\xi_m^-=0\\
&\qquad\cdots\qquad\qquad\cdots
\end{aligned}$$

care se scrie mai simplu

$$(13)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\eta_n=1\ ;\quad \sum_{n=1}^{\infty}k_n^p\eta_n=0,\ p=1,2,\ldots$$

Să arătăm acum că ecuaţiile (8) şi (9) au câte o infinitate de rădăcini reale. Ecuaţia

$$\frac{\Phi_n'(-\varepsilon)}{\Phi_n(-\varepsilon)}=\gamma$$

se mai scrie

$$k_n\frac{Y_0'[k_n(1+\varepsilon)]J_0'[k_n(1-\varepsilon)]-J_0'[k_n(1+\varepsilon)]Y_0'[k_n(1-\varepsilon)]}{Y_0'[k_n(1+\varepsilon)]J_n[k_n(1-\varepsilon)]-J_0'[k_n(1+\varepsilon)]Y_0[k_n(1-\varepsilon)]}=\gamma.$$

Vom ţine seama de expresiile asimptotice cunoscute [1].

$$J_0(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\varepsilon_1(x),\quad Y_0(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\varepsilon_2(x)$$

$$J_0'(x)=-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\varepsilon_3(x),\quad Y_0'(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\varepsilon_4(x)$$

în care $\varepsilon_i(x)=0\,(x^{-\frac{3}{2}})$, $i=1,2,3,4$. Găsim atunci

$$\frac{\sin 2k_n\varepsilon+\eta_1(k_n)}{\cos 2k_n\varepsilon+\eta_2(k_n)}=\frac{\gamma}{k_n}$$

unde $\eta_i(x)=0\,(x^{-\frac{1}{2}})$, $i=1,2$. Aceasta se mai scrie

$$\sin 2k_n\varepsilon=\frac{\gamma}{k_n}\cos 2k_n\varepsilon+\frac{\gamma}{k_n}\eta_2(k_n)-\eta_1(k_n).$$

In ecuaţia de mai sus, considerând pe k_n variabil dela $-\infty$ la $+\infty$ toţi termenii sunt funcţii continue de k_n, exceptând numai valoarea $k_n=0$. Când k creşte în valoare absolută termenul $\sin 2k_n\varepsilon$ oscilează între -1 şi $+1$, în timp ce termenii ceilalţi descresc indefinit în valoare absolută. De aci se vede că pentru k_n destul de mare rădăcinile acestei ecuaţii sunt foarte vecine cu acelea ale ecuaţiei

$$\sin 2k_n\varepsilon=0$$

deci putem scrie pentru n destul de mare

$$k_n\cong\frac{n\pi}{2\varepsilon}.$$

Se vede astfel că ecuaţiile (8) şi (9) au rădăcini reale atât pozitive cât şi negative, în număr infinit, deci în desvoltarea (10), *valorile proprii* k_n^+ şi k_m^- sunt în număr infinit. Apoi, k_n este de ordinul lui n pentru n foarte mare.

Problema, tratată pe această cale, pornind dela desvoltarea (7), revine deci la rezolvirea sistemului linear infinit (13).

Acest sistem a fost studiat ocazional de Poincaré, apoi de Borel [2], însă căutând să aplicăm metoda indicată de aceşti eminenţi matematicieni, ne-am putut da seama că ea nu permite rezolvirea efectivă a sistemului, şi se bazează pe unele confuzii[2]). Suntem deci în căutarea unei metode de rezolvire a sistemului (13) în care constantele k_n sunt date şi avem $k_n=0(n)$.

---

[2]) Asupra acestei metode va apare o notă a tov. Conf. F. Rado.

O primă observare pe care o putem face asupra sistemului este următoarea: Dacă sistemul (13) admite soluții η_n, aceste numere înlocuite în sistem fac toate seriile *absolut* convergente.

In adevăr, seria $\sum k_n^p \eta_n$ trebue să fie convergentă pentru toate valorile $p = 1,2,\ldots$ Deci trebue să avem, pentru p fix,

$$|k_n^p \eta_n| < 1, \quad n > \mathrm{N}.$$

Aşa dar

$$|k_n^{p-2} \eta_n| < \frac{1}{k_n^2}, \quad n > \mathrm{N}$$

şi cum seria $\sum \frac{1}{k_n^2}$ este convergentă, rezultă convergența absolută a seriei $\sum k_n^{p-2}\eta_n$. Aceasta însă este adevărat pentru fiecare valoare dată lui p, de unde rezultatul de mai sus. Operând asupra ecuațiilor sistemului (13), în scopul rezolvirii lui, se poate deci presupune că toate seriile din membrii I sunt absolut convergente, fără a particulariza soluțiile.

Secția de Matematică
a Filialei Cluj a Academiei R.P.R.

BIBLIOGRAFIE

1. Webster-Szegö, *Partielle Differentialgleich. d. math. Physik*, p. 383; Watson, *Teoria funcțiilor lui Bessel* (Trad. rusă, 1950) pp. 230, 232, 233.
2. F. Riesz, *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues*, pp. 15—20.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Относительно проблемы распространения теплоты

ГЕОРГИЙ КЭЛУГЭРЯНУ

Техническая проблема порчи труб в паровых котлах привела инженера Л. Немети к изучению проблемы разпространения теплоты. Требуется распределение температуры при постоянном режиме в стенках цилиндрической трубки неопределенной длины, нагреваемой снаружи и содержащей внутри количество воды и количество пара, обе среды будучи разделены плоской поверхностью, перпендикулярной оси трубки. Для решения этой задачи требуется найти функцию и (y,z), удовлетворяя (1) в интервале $-e < y < e$ и краевые условия. Применяя метод Fourrier, мы приходим к развитию (10), k_n^+ и k_m^-, являющимся собственными значениями в бесконечном числе, корнями уравнений (8) и (9). Функции $\Phi_n(y)$—выражения, образованные функциями Bessel J_0 и Y_0. Это значит, что надо решить задачу для значений $z > 0$, затем для значений $z < 0$, написав условие непрерывности обоих решений по сегменту $-e < y < e$, $z=0$ для функции и (y,z), и для всех ее парциальных производных по отношению к z. Это ведет к линейной бесконечной системе (11), которая становится (13). Изучение этой системы было начато Poincare и Borel, но методы, указанные этими математиками оказались для нас недостаточными для действительного решения системы. Показано, что если имеются решения, они составляют все серии членов I абсолютно конвергентных.

RÉSUMÉ

Sur un problème de propagation de la chaleur

par

GEORGES CĂLUGĂREANU

Le problème technique de l'usure des tuyaux dans les chaudières à vapeur a conduit l'ing. L. Némethi à l'étude d'un problème de propagation de la chaleur; Trouver la distribution des températures, en régime permanent, dans la paroi d'un tuyau cylindrique indéfini, chauffé à l'extérieur, et contenant à son intérieur une masse d'eau surmontée de vapeur, les deux milieux étant séparés par une surface plane perpendiculaire à l'axe du tuyau. Ce problème revient à trouver une fonction $u(y, z)$ satisfaisant à (1) dans la bande $-\varepsilon < y < \varepsilon$, et aux conditions aux limites (2). En appliquant la méthode de Fourier, on est conduit au développement (10), les k_n^+ et k_n^- étant des valeurs propres en nombre infini, racines des équations (8) et (9). Les $\Phi_n(y)$ sont des expressions formées avec les fonctions de Bessel J_0 et Y_0. Cela revient à résoudre le problème dans la demi-bande $z > 0$, ensuite dans la demi-bande $z < 0$, et à raccorder les deux solutions le long du segment $-\varepsilon < y < \varepsilon$, $z = 0$, par continuité, pour la fonction $u(y, z)$ et pour toutes ses dérivées partielles par rapport à z. Ceci conduit à un système linéaire infini (11) qui se ramène à (13). L'étude de ce système a été amorcée par H. Poincaré et E. Borel, mais les méthodes indiquées par ces grands géomètres ne nous ont pas permis de résoudre effectivement ce système. On établit que si les solutions existent, elles sont telles qu'elles rendent toutes les séries des premiers membres absolument convergentes.