ASUPRA UNEI MODIFICĂRI A PROCEDEULUI DE INTERPOLARE AL LUI S. N. BERNSTEIN

DE

ELENA MOLDOVAN

*Comunicare prezentată de Prof. **TIBERIU POPOVICIU**, m. coresp. al Academiei R.P.R., în ședința de comunicări din 24 Sept. 1952 a Filialei Cluj a Academiei R.P.R.*

1. Intr'o lucrare a sa, S. N. Bernstein [1], urmărind transformarea procedeului de interpolare al lui Lagrange, într'un procedeu convergent, înlocuiește procedeul

$$L_n(x;f)=\sum_{k=1}^{n} f(x_{n,k})\, l_{n,k}(x) \tag{1}$$

al lui Lagrange, cu procedeul modificat

$$L_n^*(x;f)=\sum_{k=1}^{n} A_{n,k}(f)\, l_{n,k}(x) \tag{2}$$

unde numerele $A_{n,k}(f)$, $k=1, 2, \ldots n$; $n=1, 2, \ldots$, sunt date de formulele:

$$\begin{aligned} A_{n,k}(f) &= f(x_{n,k}), \qquad k \not\equiv 0 \ (\text{mod. } 2l) \\ A_{n,2ls}(f) &= \sum_{j=1}^{l} f(x_{n,2l(s-1)+2j-1}) - \sum_{j=2}^{l} f(x_{n,2l(s-1)+2j-2}) \end{aligned} \tag{3}$$

$l \geqq 2$ fiind un număr natural, iar nodurile $x_{n,k}$, $k=1, 2, \ldots n$; $n=1, 2, \ldots$, cuprinse în intervalul $[-1,+1]$. Pentru $l=1$ și n, par numerele $A_{n,k}(f)$, $k=1, 2, \ldots, n$; $n=1, 2, \ldots$, sunt date de formulele:

$$\begin{aligned} A_{n,k}(f) &= f(x_{n,k}), \quad k \text{ impar} \\ A_{n,k}(f) &= f(x_{n,k-1}), \quad k \text{ par} \end{aligned} \tag{4}$$

In lucrarea sa, S. N. Bernstein [1] arată că procedeul modificat (2), construit pe nodurile $x_{n,k} = \cos(2k-1)\dfrac{\pi}{2n}$, $k=1, 2, \ldots, n$; $n=1, 2, \ldots$, converge uniform către funcția $f(x)$, în orice interval $[a, b]$

$\subseteqq [-1, +1]$, unde funcția $f(x)$ este presupusă continuă, iar în afara intervalului $[a, b]$ mărginită.

Studiind același procedeu (2), D. L. Berman [2] reușește să arate că proprietatea de convergență mai sus amintită se menține chiar dacă matricea de noduri $x_{n,k} = \cos(2k-1)\dfrac{\pi}{2n}$, $k=1, 2, \ldots, n$; $n=1, 2, \ldots$, este înlocuită cu o matrice mai generală. D. L. Berman găsește totodată rezultatul remarcabil [3], în baza căruia, pentru $l=1$, pe noduri echidistante, procedeul (2) construit chiar pentru funcția $f(x) \equiv x$, diverge în orice punct al intervalului $(-1, +1)$ cu excepția punctului $x=o$.

2. Inlocuirea procedeului (1) cu procedeul modificat (2), în cazul $l=1$, revine la înlocuirea matricei

$$l_{n,1}(x), l_{n,2}(x), \ldots, l_{n,n}(x)\ ; \quad n=1,2,\ldots, \tag{5}$$

a polinoamelor fundamentale ale lui Lagrange, cu matricea

$$l_{n,1}^*(x), l_{n,2}^*(x), \ldots, l_{n,n}^*(x)\ ; \quad n=1,2,\ldots, \tag{6}$$

unde

$$\begin{aligned} l_{n,k}^*(x) &= l_{n,k}(x) + l_{n,k+1}(x), \quad \text{pentru } k \text{ impar} \\ l_{n,k}^*(x) &= 0 \qquad\qquad\qquad\quad \text{„} \quad k \text{ par} \end{aligned} \tag{7}$$

lăsând neschimbate nodurile de interpolare.

Problema poate fi privită sub un aspect mult mai general și anume: se dă matricea de noduri

$$x_{n,1}, x_{n,2}, \ldots, x_{n,n}\ ; \quad n=1,2,\ldots, \tag{8}$$

situate în intervalul $[a, b]$ și matricea de funcții

$$\varphi_{n,1}(x), \varphi_{n,2}(x), \ldots, \varphi_{n,n}(x)\ ; \quad n=1,2,\ldots, \tag{9}$$

definite în $[a, b]$. Matricilor (8) și (9) li se atașează procedeul de interpolare generalizat

$$P_n(x;f)=\sum_{i=1}^{n} f(x_{n,i})\, \varphi_{n,i}(x) \tag{10}$$

Se pune problema de a cerceta dacă trecerea dela procedeul (10) la procedeul modificat

$$P_n^*(x;f)=\sum_{i=1}^{n} f(x_{n,i})\, \varphi_{n,i}^*(x) \tag{11}$$

unde

$$\begin{aligned} \varphi_{n,i}^*(x) &= \varphi_{n,i}(x) + \varphi_{n,i+1}(x), \quad i \text{ impar} \\ \varphi_{n,i}^*(x) &= 0, \quad i \text{ par} \end{aligned} \tag{12}$$

păstrează proprietățile de convergență ale procedeului inițial (10).

3. In prezenta notă ne ocupăm de cazul particular al procedeului lui S. N. Bernstein, cu un număr par de noduri

$$B_{2n+1}(x;f)=\sum_{i=0}^{2n+1} f\left(\frac{i}{2n+1}\right)\binom{2n+1}{i} x^i(1-x)^{2n+1-i} \qquad 13)$$

urmând ca într'o altă notă să dăm rezultate mai generale.

Inlocuim funcțiile

$$\varphi_{2n+1,i}(x)=\binom{2n+1}{i} x^i(1-x)^{2n+1-i}, \quad i=0,1,\ldots,2n+1\,;\ n=0,1,\ldots,$$

cu funcțiile

$$\varphi^*_{2n+1,i}(x)\ , \quad i=0,1,\ldots,2n+1\,;\ n=0,1,\ldots$$

date de formulele

$$\varphi^*_{2n+1,i}(x)=\varphi_{2n+1,i}(x)+\varphi_{2n+1,i+1}(x)\ , \quad i\geqq 0 \text{ par}$$

$$\varphi^*_{2n+1,i}(x)=0\ , \quad i \text{ impar}$$

procedeul (13) devine

$$B^*_{2n+1}(x;f)=\sum_{i=0}^{2n+1} f\left(\frac{i}{2n+1}\right)\varphi^*_{2n+1,i}(x) \qquad (14$$

sau se mai poate pune sub forma:

$$B^*_{2n+1}(x;f)=\sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{2i}{2n+1}\right)\varphi_{2n+1,i}(x)+\sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{2i}{2n+1}\right)\varphi_{2n+1,2i+1}(x)$$

Ținând seama de faptul că funcțiile $\varphi^*_{2n+1,i}(x)$ îndeplinesc condițiile

a) $\varphi^*_{2n+1,i}(x)\geqq 0, \quad i=0,1,\ldots,2n+1\,; \quad n=0,1,\ldots\,; x\in[0,1]$

b) $\sum_{i=0}^{2n+1}\varphi^*_{2n+1,i}(x)\equiv 1$

pentru a demonstra că procedeul (14) converge uniform, în întreg intervalul [0,1] către funcția $f(x)$, continuă în [0,1], este suficient [4] să arătăm că expresia

$$B_{2n+1}=\sqrt{\sup_{[0,1]}\sum_{i=0}^{n}(x-x_{2n+1,2i})\ [\varphi_{2n+1,2i}(x)+\varphi_{2n+1,2i+1}(x)]}$$

tinde către zero când $n\to\infty$. Pentru a arăta aceasta, avem de efectuat calculul următoarelor sume

$$\sum_{i=0}^{2n+1}\varphi^*_{2n+1,i}(x)=1$$

$$\sum_{i=0}^{n} 2i\,\varphi^*_{2n+1,i}(x)=\sum_{i=1}^{n} 2i\,[\varphi_{2n+1,2i}(x)+\varphi_{2n+1,2i+1}(x)]=$$

$$=(2n+1)x-\frac{1}{2}[1+(2x-1)^{2n+1}]$$

$$\sum_{i=0}^{n}(2i)^2\varphi^*_{2n+1,i}(x)=\sum_{i=0}^{n}(2i)^2[\varphi_{2n+1,2i}(x)+\varphi_{2n+1,2i+1}(x)]=$$

$$=\frac{1}{2}[-(2x-1)^{2n}(4nx+1)+4(2n+1)nx^2+1]$$

Efectuând calcule elementare, obținem

$$\sum_{i=0}^{n}(x-x_{2n+1,2i})^2[\varphi_{2n+1,2i}(x)+\varphi_{2n+1,2i+1}(x)]=$$

$$=\frac{1}{(2n+1)^2}\left\{(2x-1)^{2n}\left[2(2n+1)x^2-(4n+1)-\frac{1}{2}\right]+(2n+1)x(1-x)+\frac{1}{2}\right\}$$

Polinomul din membrul al doilea își atinge maximul în intervalul [0,1] în punctul $x=\frac{1}{2}$ și acest maximum este egal cu $\frac{1}{4}\,\frac{2n+3}{(2n+1)^2}$

Rezultă [4]

$$|f(x)-B^*_{2n+1}(x;f)|\leqq\frac{1}{2}\,\omega\left(\sqrt{\frac{2n+3}{(2n+1)^2}}\right)$$

unde $\omega(\delta)$ este modulul de oscilație al funcției $f(x)$. In baza acestui rezultat putem afirma că ordinul aproximației furnizate de procedeul $B^*_{2n+1}(x;f)$ este cel puțin acela al aproximației date de procedeul inițial $B_{2n+1}(x;f)$. După cum se știe [5] aproximația dată de procedeul $B_{2n+1}(x;f)$, este de ordinul lui $\omega\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)$.

Secția de Matematică
a Filialei Cluj a Academiei R.P.R.

BIBLIOGRAFIE

1. Bernstein S. N., *Sur une modification de la formule d'interpolation de Langrange.* Com. Soc. Math. Kharkow (4) 5, 49—57 1932.
2. Berman D. L., *Despre un procedeu de interpolare al Acad. S. N. Bernstein.* D.A.N. 60, 3, 333—336, 1949.
3. Berman D. L., *Divergența procedeului de interpolare al lui S. N. Bernstein.* D.A.N. 70, 2, 181—184, 1950.
4. Popoviciu T., *Asupra demonstrației teoremei lui Weierstrauss cu ajutorul polinoamelor de interpolare.* Lucrările sesiunii generale științifice a Academiei R.P.R. din 2—12 Iunie 1950.
5. Popoviciu T., *Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur.* Mathematica, 10, 44—54, 1935.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

О некотором изменении способа интерполяции С. Н. Бернштейна

ЕЛЕНА МОЛДОВАН

Автор применяет к обобщенному способу интерполяции (10) изменение (2) — для $l=1$, формулы (4) — сделанные С. Н. Бернштейном над способами интерполяции Lagrange. В простом случае способа $B_{2n+1}(x;f)$ С. Н. Бернштейна (13) показывают, что произведенное изменение сохраняет конвергенцию начального способа (13), и точность, во всяком случае, не менее порядка точности начального способа.

RÉSUMÉ

Sur une modification du procédé d'interpolation de S. N. Bernstein

par

ELENA MOLDOVAN

On applique au cas général d'un procédé d'interpolation généralisé (10), la modification (2) — pour $l = 1$, formule (4) — faite par S. N. Bernstein, sur le procédé d'interpolation de Lagrange. Dans le cas simple du procédé $B_{2n+1}(x; f)$ de S. N. Bernstein (13), on démontre que la modification faite (14) conserve la convergence du procédé initial (13) et l'approximation est au moins de l'ordre de l'approximation fournie par le procédé initial (13)