DESPRE UNELE MODIFICĂRI FĂCUTE ASUPRA PROCEDEELOR DE INTERPOLARE GENERALIZATE

DE

ELENA MOLDOVAN

Comunicare prezentată de Prof. TIBERIU POPOVICIU, m. coresp. al Academiei R.P.R., în şedinţa de comunicări din 24 Sept. 1952 a Filialei Cluj a Academiei R.P.R.

1. In cele ce urmează se studiază câteva proprietăţi ale anumitor modificări aplicate unor procedee de interpolare generalizate.

Să notăm cu C $[a, b]$ clasa funcţiilor continue în intervalul închis $[a, b]$.

Dându-se schema de noduri

$$x_{n,1}\,,\ x_{n,2}\,,\ldots,\ x_{n,n}\ ;\quad n=1,2,\ldots \tag{1}$$

situate în intervalul $[a, b]$, precum şi schema de funcţii definite în $[a, b]$:

$$\varphi_{n,1}(x)\,,\ \varphi_{n,2}(x)\,,\ldots,\ \varphi_{n,n}(x)\ ;\quad n=1,2,\ldots \tag{2}$$

unei funcţii $f(x) \in \mathrm{C}[a, b]$, i se ataşează procedeul de interpolare generalizat

$$\mathrm{P}_n(x\,;f)=\sum_{i=1}^{n} f(x_{n,i})\,\varphi_{n,i}(x) \tag{3}$$

Introducem notaţia $\Delta_n=\max|x_{n,i}-x_{n,i-1}|$, $i=2,3,4,\ldots,n$; $n=1,2,\ldots$ In raţionamentele pe care le facem, presupunem mulţimea (1) de noduri în aşa fel aleasă, încât să fie îndeplinită condiţia:

$$\lim_{n\to\infty} \Delta_n=0 \tag{4}$$

condiţie din care rezultă că mulţimea nodurilor (1) este densă în $[a, b]$.

Spunem despre procedeul (3) că este convergent dacă, oricare ar fi $f(x) \in \mathrm{C}[a, b]$, are loc relaţia

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}_n(x\,;f)=f(x),\ \text{uniform pentru } x\in[a,b] \tag{5}$$

Este cunoscută teorema [2] în baza căreia condiţia necesară şi suficientă pentru ca (5) să aibă loc este ca

a) dacă $f(x)$ este un polinom să avem

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x;f)=f(x), \text{ uniform pentru } x\in[a,b] \tag{6}$$

b) să existe o constantă A, independentă de n, astfel ca pentru $x\in[a,b]$ să avem

$$\lambda_n \leqq A$$

unde

$$\lambda_n=\sup\{\lambda_n(x)\}, \quad x\in[a,b]$$

iar

$$\lambda_n(x)=\sum_{i=0}^{n}|\varphi_{n,i}(x)|$$

S. N. Bernstein [1] a studiat posibilitatea transformării procedeului de interpolare al lui Lagrange

$$L_n(x,f)=\sum_{i=0}^{n} f(x_{n,i})l_{n,i}(x)$$

într'un procedeu convergent, aplicând câteva tipuri speciale de modificări schemei polinoamelor fundamentale

$$l_{n,1}(x),\ l_{n,2}(x),\ldots,l_{n,n}(x)\ ;\quad n=1,2,\ldots,$$

Studiem câteva proprietăți ale acestor modificări, aplicate schemei mai generale de funcții fundamentale (2).

Construim procedeul modificat

$$P_n^*(x;f)=\sum_{i=1}^{n} f(x_{n,i})\psi_{n,i}(x) \tag{7}$$

unde

$$\psi_{n,i}(x)=\begin{cases}0, & \text{pentru } i \text{ par}\\ \varphi_{n,i}(x)+\varphi_{n,i+1}(x), & \text{pentru } i \text{ impar}\end{cases}$$
$$(\varphi_{n,n+1}(x)\equiv 0)$$

Deasemenea construim procedeul modificat

$$P_n^{**}(x;f)=\sum_{i=1}^{n} f(x_{n,i})\varphi_{n,i}(x) \tag{8}$$

unde
$$\varphi_{n,i}(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}[3\varphi_{n,1}(x)+\varphi_{n,2}(x)] & \text{pentru } i=1\\ \frac{1}{4}[\varphi_{n,i-1}(x)+2\varphi_{n,i}(x)+\varphi_{n,i+1}(x)], & \text{pentru } i=2,3,\ldots,n-1\\ \frac{1}{4}[\varphi_{n,n-1}(x)+3\varphi_{n,n}(x)] & \text{pentru } i=n.\end{cases}$$

Vom numi procedeul (3) convergent (B_1^*) dacă este satisfăcută relația

$$\lim_{n\to\infty} P_n^*(x;f)=f(x), \text{ uniform pentru } x\in[a,b] \tag{9}$$

oricare ar fi $f(x)\in C[a,b]$

Deasemenea vom numi procedeul (3) convergent (B_1^{**}) dacă are loc relația

$$\lim_{n\to\infty} P_n^{**}(x;f)=f(x) \text{ uniform pentru } x\in[a,b] \tag{10}$$

oricare ar fi $f(x)\in C[a,b]$

Teorema 1. *Condiția necesară și suficientă ca un procedeu convergent,* $P_n(x;f)=\sum_{i=1}^{n} f(x_{n,i})\varphi_{n,i}(x)$ *să fie convergent* (B_1^*) *este ca*

$$\lim_{n\to\infty} P_n^*(x;f)=f(x) \text{ uniform pentru } x\in[a,b] \tag{11}$$

dacă $f(x)$ este un polinom.

Necesitatea condiției rezultă imediat, deoarece polinoamele fac parte din clasa $C[a,b]$.

Condiția este și suficientă. Intr'adevăr, procedeul $P_n(x;f)$ satisface condițiile *a)* și *b)* din (6). Notând

$$\lambda_n^*(x)=\sum_{i=1}^{n}|\psi_{n,i}(x)|$$

și

$$\lambda_n^*=\sup\{\lambda_n^*(x)\}, \quad x\in[a,b]$$

avem

$$\lambda_n^*\leqq\lambda_n\leqq A, \quad x\in[a,b]$$

adică

$$\lambda_n^*\leqq A, \quad x\in[a,b] \tag{12}$$

A fiind constanta din (6), (11) și (12) exprimă tocmai condiția necesară și suficientă pentru ca (9) să aibă loc.

Acest rezultat se extinde la convergența (B_1^{**}) și putem enunța

Teorema 2. *Condiția necesară și suficientă ca procedeul convergent* $P_n(x;f)$ *să fie convergent* (B_1^{**}) *este ca dacă $f(x)$ este un polinom să avem*

$$\lim P_n^{**}(x;f)=f(x), \textit{ uniform pentru } x\in[a,b] \tag{11*}$$

Demonstrația este analoagă cu cea a teoremei 1.

Teorema 3. *Un procedeu* $P_n(x;f)$ *convergent, este convergent* (B_1^*).

Prin ipoteză avem:

$$\lim_{n\to\infty}\{f(x)-P_n(x;f)\}=0, \text{ uniform pentru } x\in[a,b] \tag{13}$$

Să arătăm că din această ipoteză rezultă

$$\lim_{n\to\infty}\{f(x)-P_n^*(x;f)\}=0, \text{ uniform pentru } x\in[a,b] \tag{14}$$

Fie deci $f(x)$ o funcție continuă în intervalul $[a, b]$. Pentru a deduce (14) vom scrie

$$|f(x)-\mathrm{P}_n^*(x;f)| \leqq |f(x)-\mathrm{P}_n(x;f)| + |\mathrm{P}_n(x;f)-\mathrm{P}_n^*(x;f)| \tag{15}$$

Din (13) rezultă că dându-se un număr $\varepsilon > 0$ oricât de mic, pentru n suficient de mare

$$|f(x)-\mathrm{P}_n(x;f)| < \varepsilon, \quad \text{oricare ar fi } x \in [a, b]$$

Pe de altă parte

$$\mathrm{P}_n(x;f)-\mathrm{P}_n^*(x;f) = \sum_{i=1}^{\leqq \frac{n}{2}} \varphi_{n,2i}(x)\,[f(x_{n,2i})-f(x_{n,2i-1})]$$

Cum $f(x)$ este o funcție continuă în $[a, b]$, ținând seamă de (4), pentru n suficient de mare

$$|f(x_{n,2i})-f(x_{n,2i-1})| < \varepsilon, \quad i=1,2,\ldots$$

Putem deci scrie, ținând seamă de (6)

$$|\mathrm{P}_n(x;f)-\mathrm{P}_n^*(x;f)| \leqq \sum_{i=1}^{\leqq \frac{n}{2}} |\varphi_{n,2i}(x)|\,|f(x_{n,2i})-f(x_{n,2i-1})| \leqq \mathrm{A}\,\varepsilon$$

și pentru n suficient de mare

$$|f(x)-\mathrm{P}_n^*(x;f)| \leqq (\mathrm{A}+1)\,\varepsilon, \quad \text{oricare ar fi } x \in [a, b], \text{ de unde rezultă (14).}$$

Ca o aplicație a teoremei 3 se poate arăta printr'un calcul elementar că $f(x)$ fiind o funcție continuă în $[0, 1]$

$$|f(x)-\mathrm{B}_{2n+1}^*(x;f)| \leqq \frac{3}{2}\,\omega\left(\sqrt{\frac{2n+3}{(2n+1)^2}}\right)$$

$$\text{unde } \mathrm{B}_{2n+1}(x;f) = \sum_{i=0}^{2n+1} f\left(\frac{i}{2n+1}\right)\binom{2n+1}{i} x^i (1-x)^{2n+1-i}$$

sunt polinoamele lui Bernstein, iar $\omega(\delta)$ este modulul de oscilație al funcției $f(x)$.

Procedeul modificat $\mathrm{B}_{2n+1}^*(x;f)$ este convergent și ordinul aproximației furnizate de el este cel puțin acela al aproximației date de procedeul inițial $\mathrm{B}_{2n+1}(x;f)$. Aproximația dată de procedeul $\mathrm{B}_{2n+1}(x;f)$ este, după cum se știe, de ordinul lui $\omega\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)$ [3].

Problema tratată în această notă, va fi expusă sub o formă mai generală, mai cuprinzătoare, într'o altă lucrare.

Secția de Matematică
a Filialei Cluj a Academiei R.P.R.

BIBLIOGRAFIE

1. Bernstein S. N., *Sur une modification de la formule d'interpolation de Lagrange*. Com. Soc. Math. Kharkov (4) 5, 49—57, 1932.
2. Natanson I. P., *Konstructivnaia teoria funcții*. 1949, p. 584.
3. Popoviciu T., *Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur*. Mathematica, 10, 49—54, 1935.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

О некоторых изменениях, произведенных над обобщенными способами интерполяции

ЕЛЕНА МОЛДОВАН

Автор установил несколько результатов относительно изменений (7) и (8), произведенных над обобщенным способом интерполяции (3). Способ называется конвергентным (B_1*), а также и (B_1**), если отношение (9), а также и (10) происходит равномерно в $[a, b]$, для любой непрерывной функции $f(x)$ в $[a, b]$. Доказывает:

1. чтобы конвергентный способ (3) был бы конвергентным (B_1*), а также и (B_1**), необходимо и достаточно иметь (11), а также и (11*) равномерно для $x \in [a, b]$, если $f(x)$ — полином.

2. конвергентный способ интерполяции (3) конвергентен (B_1*).

Даётся, как пример, измененный способ $\mathrm{B}_{2n+1}(x;f)$, обеспечивающий точность, по крайней мере, порядка точности, найденной при изучении начального способа $\mathrm{B}_{2n+1}(x;f)$.

RÉSUMÉ

Sur quelques modifications dans les procédés d'interpolation généralisés.

par

ELENA MOLDOVAN

On établit quelques résultats sur les modifications (7) et (8) faites sur un procédé d'interpolation généralisé (3). On dit qu'un procédé (3) est convergent (B_1^*) resp. (B_1^{**}), si la relation (9) resp. (10) a lieu uniformément dans $[a, b]$, pour toute fonction (x) continue en $[a, b]$. On démontre:

1) pour qu'un procédé convergent (3) soit convergent (B^*) resp. (B_1^{**}) il faut et il suffit qu'on a (11) resp. (11*) uniformément pour $x \in [a, b]$ si $f(x)$ est un polynôme,

2) un procédé d'interpolation (3) convergent est convergent (B_1^*).

On donne l'exemple du procédé modifié $\mathrm{B}_{2n+1}^*(x;f)$ qui fournit une approximation au moins de l'ordre de l'approximation trouvée dans l'étude du procédé initial $\mathrm{B}_{2n+1}(x;f)$.