ASUPRA POLINOAMELOR CU TOATE RĂDĂCINILE REALE

DE

TIBERIU POPOVICIU

Membru corespondent al Academiei R. P. R.

Comunicare prezentată în şedinţa din 12 Octombrie 1951 a Filialei Cluj a Academiei R. P. R.

1. — Fie $P(x)$ un polinom de gradul (efectiv) n. Acest polinom are n rădăcini distincte sau nu. Derivatele succesive $P'(x)$, $P''(x), \ldots, P^{(n-1)}(x)$ au respectiv $n-1$, $n-2, \ldots, 1$ rădăcini distincte sau nu. Considerând deci toate rădăcinile polinomului şi ale derivatelor sale succesive avem

$$1+2+\ldots+n = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

astfel de rădăcini distincte sau nu.

Se poate pune problema de a determina numărul N al numerelor distincte dintre aceste $\frac{n(n+1)}{2}$ numere astfel obţinute şi care reprezintă rădăcinile considerate. Numărul N este numărul rădăcinilor distincte ale polinomului $P(x)P'(x) \ldots P^{(n-1)}(x)$ obţinut făcând produsul polinomului dat şi al derivatelor sale succesive.

Putem evident presupune $n > 1$.

Este clar că dacă $P(x)$ are toate rădăcinile confundate avem $N = 1$. In cazul contrar avem $N > 1$ şi se pune întrebarea cum se poate preciza această inegalitate în acest caz?

In ipoteza că *rădăcinile lui* $P(x)$ *sunt toate reale*, vom demonstra că:

I. *Dacă* $P(x)$ *are cel puţin două rădăcini distincte avem* $N \geqq n + 1$.

Proprietatea aceasta este foarte probabil adevărată şi în cazul când se ridică restricţia realităţii rădăcinilor, deci pentru un polinom oarecare de o variabilă complexă.

Proprietatea I nu depinde de o transformare liniară a variabilei x, deci va fi adevărată dacă rădăcinile polinomului sunt situate pe o dreaptă din planul complex. Deasemenea proprietatea nu depinde, evident, de un factor constant ($\neq 0$) al lui $P(x)$. Rezultă că în demonstraţiile care urmează se poate totdeauna presupune că primul coeficient al polinomului (al lui x^n) este egal cu 1 şi că dacă $P(x)$ are cel puţin două rădăcini distincte, una oarecare dintre aceste rădăcini este egală, de ex., cu 0, şi una oarecare cu 1.

2. Demonstrația proprietății I în cazul rădăcinilor reale se bazează pe câteva proprietăți care sunt consecințe ale teoremei lui Rolle.

Dacă un polinom are toate rădăcinile sale reale, derivata sa are deasemenea toate rădăcinile reale. Fie a_0, b_0 rădăcinile extreme, adică cea mai mică și cea mai mare rădăcină, a lui $P(x)$ și a_1, b_1 rădăcinile extreme analoage ale derivatei $P'(x)$. Dacă a_0 resp. b_0 este o rădăcină cel puțin dublă a lui $P(x)$, avem $a_1 = a_0$ resp. $b_1 = b_0$. Dacă a_0 resp. b_0 este rădăcină simplă, avem $a_0 < a_1$ resp. $b_1 < b_0$. In fine a_1 resp. b_1 este rădăcină simplă a derivatei dacă și numai dacă a_0 resp. b_0 este rădăcină simplă sau dublă a polinomului.

Să presupunem că $P(x)$ nu are toate rădăcinile confundate și fie, în general, a_i cea mai mică iar b_i cea mai mare rădăcină a derivatei $P^{(i)}(x)$ de ordinul i, $i = 0, 1, \dots, n-1$. Avem evident $a_{n-1} = b_{n-1}$, însă $a_{n-2} < b_{n-2}$. Această din urmă inegalitate rezultă din faptul că dacă derivata unui polinom cu toate rădăcinile reale are o rădăcină de ordinul $i > 1$ de multiplicitate, polinomul are neapărat această rădăcină de un ordin $i+1$ de multiplicitate. In ipoteza realității tuturor rădăcinilor egalitatea $a_{n-2} = b_{n-2}$ nu este deci compatibilă cu ipoteza că rădăcinile polinomului nu sunt toate egale.

3. Să notăm acum cu E numărul numerelor distincte dintre numerele

$$a_i,\ b_i,\ i = 0, 1, \dots, n-1. \tag{1}$$

Din cele de mai sus rezultă că, dacă a_0 este o rădăcină de ordinul l de multiplicitate iar b_0 o rădăcină de ordinul k de multiplicitate a polinomului $P(x)$, avem

$$a_0 = a_1 = \dots = a_{l-1} < a_l < a_{l+1} < \dots < a_{n-2} < a_{n-1} =$$
$$= b_{n-1} < b_{n-2} < \dots < b_k < b_{k-1} = b_{k-2} = \dots = b_0.$$

De aici rezultă că

$$E = 2n - l - k + 1. \tag{2}$$

Insă

$$l + k \leqq n \tag{3}$$

și

$$N \geqq E. \tag{4}$$

Dar din (3) rezultă că $E \geqq n + 1$, deci $N \geqq n + 1$ și proprietatea I este demonstrată.

4. Ne propunem acum să determinăm toate polinoamele $P(x)$ (cu toate rădăcinile reale) de gradul n pentru care avem $N = n + 1$.

Din (2), (3), (4) rezultă că acest lucru nu poate avea loc decât dacă $l + k = n$, deci numai dacă polinomul are exact două rădăcini distincte, prin urmare, afară de un factor constant ($\neq 0$) și afară de o transformare liniară a variabilei, numai pentru polinoamele de forma

$$P(x) = x^{n-k}(x-1)^k,\quad 2k \leqq n.$$

In acest caz avem $E = n + 1$ și pentru ca să avem $N = n + 1$ este necesar și suficient ca toate rădăcinile unei derivate oarecare $P^{(i)}(x)$ să nu fie diferite de rădăcinile (1) și aceasta pentru $i = 1, 2, \dots, n-3$.

Dacă $n \geqq 2$, $k = 1$ nu există astfel de rădăcini și deci avem atunci $N = n + 1$. In felul acesta cazurile $n = 2, 3$ sunt epuizate.

Dacă $n \geqq 4$, $2 \leqq k \leqq \frac{n}{2}$, $P^{(n-3)}(x)$ are rădăcinile distincte și rădăcina diferită de a_{n-3} și b_{n-3} a acestui polinom nu poate să coincidă decât cu a_{n-1}. Pentru ca să avem $N = n + 1$ este deci necesar ca polinoamele $P^{(n-3)}(x)$, $P^{(n-1)}(x)$ să aibă o rădăcină comună. Dar $a_{n-1} = b_{n-1} = \frac{k}{n}$, adică este necesar să avem

$$P^{(n-3)}\left(\frac{k}{n}\right) = 0.$$

Dar

$$P^{(n-3)}(x) = \frac{(n-3)!}{3!}\,[n(n-1)(n-2)x^3 - 3k(n-1)(n-2)x^2 +$$
$$+ 3k(k-1)(n-2)x - k(k-1)(k-2)]$$

și deducem

$$P^{(n-3)}\left(\frac{k}{n}\right) = -\frac{k(n-k)(n-2k)}{3}\cdot\frac{(n-3)!}{n^2}$$

Rezultă de aci că dacă $n \geqq 4$, $2 \leqq k < \frac{n}{2}$ avem cu siguranță $N > n + 1$.

Rămâne să examinăm cazul $n = 2k$. Dacă $k = 2$, pe baza celor de mai sus se vede că avem $N = n+1$. Dacă $k > 2$, rădăcinile lui $P^{(n-4)}(x)$ sunt toate distincte și simetric așezate față de a_{n-1}. De aici rezultă imediat că niciuna dintre rădăcinile distincte de rădăcinile extreme ale lui $P^{(n-4)}(x)$ nu coincide cu a_{n-1} și că pentru a avea $N = n+1$ este necesar ca aceste rădăcini să coincidă cu a_{n-2}, b_{n-2} respectiv, deci ca $P^{(n-4)}(x)$ să fie divizibil cu $P^{(n-2)}(x)$. Pentru simplificare putem lua acum

$$P(x) = (x^2 - 1)^k$$

Avem atunci

$$P^{(n-4)}(x) = \frac{(2k-4)!\,k(k-1)}{3!}\,[(2k-1)(2k-3)x^4 - 6(2k-3)x^2 + 3]$$

$$P^{(n-2)}(x) = (2k-2)!\,k\,[(2k-1)x^2 - 1].$$

De unde, făcând calculele, se vede că $P^{(n-4)}(x)$ se va divide cu $P^{(n-2)}(x)$ numai dacă $k = 3$.

Dacă deci $n = 2k$, $k > 3$, avem cu siguranță $N > n + 1$.

Pentru $n = 6$, $k = 3$, se verifică direct că $N = n+1$.

In definitiv deci avem următoarea proprietate

II. — *Dacă polinomul* $P(x)$ *de gradul* n (cu toate rădăcinile reale) *are cel puțin două rădăcini distincte, egalitatea* $N = n + 1$ *are loc dacă și numai dacă acest polinom are o rădăcină multiplă de ordinul* $n-1$ *de multiplicitate, precum și încă numai în următoarele două cazuri:*

1°. *Dacă* $n = 4$ *și polinomul are două rădăcini duble.*

2°. *Dacă* $n = 6$ *și polinomul are două rădăcini triple.*

5. — In ce privește exactitatea proprietății I în cazul când nu se face restricția realității rădăcinilor, ea se poate stabili ușor pentru câteva dintre primele valori ale lui n.

1°. Pentru $n = 2$, proprietatea este deja demonstrată.

2°. Dacă $n = 3$ şi dacă rădăcinile lui $P(x)$ sunt distincte, derivata $P'(x)$ va avea rădăcinile distincte sau nu, dar ambele diferite de ale lui $P(x)$. Avem deci, în acest caz $N \geqq 4$. Dacă $P(x)$ nu are toate rădăcinile distincte, prin o transformare liniară revenim le cazul rădăcinilor reale.

3°. Dacă $n = 4$ şi dacă rădăcinile lui $P(x)$ sunt distincte, se vede, ca mai sus, că avem $N \geqq 5$. Dacă $P(x)$ are trei rădăcini distincte, rămâne să examinăm cazul când nu putem prin o transformare liniară reveni la cazul rădăcinilor toate reale. Dacă atunci rădăcinile lui $P'(x)$ sunt distincte, două dintre ele sunt diferite de rădăcinile lui $P(x)$, avem deci $N \geqq 5$. Dacă în fine $P'(x)$ nu are rădăcinile distincte, atunci una (simplă) coincide cu rădăcina dublă a lui $P(x)$, iar cealaltă distinctă de aceasta este o rădăcină dublă diferită de rădăcinile lui $P(x)$. Prin o transformare liniară se poate face ca $P'(x)$ să aibă toate rădăcinile reale şi atunci $P'(x)P''(x)P'''(x)$ are cel puţin 4 rădăcini reale distincte, iar $P(x)$ cel puţin o rădăcină nereală. Avem deci tot $N \geqq 5$. Dacă în fine $P(x)$ are numai două rădăcini distincte, prin o transformare liniară putem face ca toate rădăcinile să devină reale.

Pentru $n = 2, 3, 4$ proprietatea I este deci adevărată în general.

Secţia de Matematică
a Filialei Cluj a Academiei R. P. R.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

О полиномах со всеми реальными корнями

ТИБЕРИЯ ПОПОВИЧА

В этой работе доказывается, что если полином $P(x)$ степени n имеет все реальные корни, результат $P(x)\ P'(x)\ P''(x) \ldots P^{(n-1)}$ имеет 1 или самое меньшее $n+1$ различные корни. Определяются и все полиномы $P(x)$ для которых предел $n+1$ достигнут.

RÉSUMÉ

Sur les polynômes ayant toutes les racines réelles

par

TIBERIU POPOVICIU

Dans ce travail l'auteur montre que si le polynôme $P(x)$ de degré n a toutes les racines réelles, le produit $P(x)\ P'(x)\ P''(x) \ldots P^{(n-1)}$ a 1 ou au moins $n+1$ racines distinctes. On détermine également tous les polynômes $P(x)$ pour lesquels la limite $n+1$ n'est pas atteinte.