ASUPRA POLINOAMELOR DEFINITE

DE

THEODOR ANGHELUȚĂ

Comunicare prezentată de Prof. T. POPOVICIU, m. coresp. Acad. R. P. R., în ședința din 18 Februarie 1951 a Filialei Cluj a Academiei R. P. R.

I. Hurwitz enunță, la începutul memoriului său din Mathematische Annalen [2, 3], teorema următoare. *Dacă polinomul*

$$f(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_{2n}x^{2n}, \tag{1}$$

neidentic nul și cu coeficienți reali, este pozitiv sau nul pentru valori reale ale lui x, *atunci polinomul*

$$F(x)=f(x)+f'(x)+\cdots+f^{(2n)}(x) \tag{2}$$

este pozitiv, pentru x *real.*

Apoi Hurwitz adaugă că Hausdorf, Stridsberg și Remak au întâlnit o teoremă analoagă celei precedente, cu singura diferență că polinomul $F(x)$ este înlocuit cu următorul

$$F_1(x)=f(x)+\frac{f''(x)}{1!}+\frac{f^{(4)}(x)}{2!}+\cdots+\frac{f^{(2n)}(x)}{n!} \tag{3}$$

Cele două teoreme rezultă din egalitățile

$$F(x)=\int_0^{\infty} e^{-u} f(x+u)\,du, \quad F_1(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{4}} f(x+u)\,du,$$

desvoltând $f(x+u)$ după puterile lui u și integrând termen cu termen. Pentru integrala a doua, se ține socoteală de formulele

$$I_{2k}=\int_0^{\infty} e^{-x^2}x^{2k}\,dx=\frac{1.3\ldots(2k-1)}{2^k}I_0, \quad I_0=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Remarcăm, în trecere, că polinomul

$$F_2(x)=\sqrt{\pi}\,f(x)+\frac{2f'(x)}{1}+\sqrt{\pi}\frac{f''(x)}{1!}+\cdots+\frac{2^n f^{(2n-1)}(x)}{1.3\ldots(2n-1)}+\frac{\sqrt{\pi}\,f^{(2n)}(x)}{n!},$$

este deasemenea definit, căci avem

$$F_2(x)=\int_0^{\infty} e^{-\frac{u^2}{4}} f(x+u)\,du\,.$$

Aci, pe lângă formulele precedente, se utilizează și formula

$$I^2{}_{k+1}=\int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{2k+1}\,dx=\frac{k!}{2}$$

Scopul liniilor, care urmează, este de a da o metodă generală pentru formarea polinoamelor definite. Polinoamele $F(x)$, $F_1(x)$ și $F_2(x)$ vor apare ca exemple particulare. Apoi vom reveni asupra demonstrației lui Hurwitz.

Vom demonstra mai întâi, în mod elementar, prima teoremă. In acest scop presupunem că polinomul $F(x)$ se anulează în intervalul $(-\infty, +\infty)$. Va rezulta, contrar ipotezei, că $f(x)$ schimbă semnul. In adevăr, din (2) se deduce egalitatea

$$f(x) = F(x) - F'(x)$$

și invers. Sunt două cazuri de deosebit. 1°. $F(x)$ are *două zerori* α *și* β *consecutive*, $\alpha < \beta$. Atunci pentru un ε pozitiv și destul de mic, numerele $F'(\alpha+\varepsilon)$ și $F'(\beta-\varepsilon)$ sunt de semne contrare. Mai mult, aceste numere dau semnele diferențelor

$$F(\alpha+\varepsilon)-F'(\alpha+\varepsilon)\quad,\quad F(\beta-\varepsilon)-F'(\beta-\varepsilon)\,.$$

Prin urmare $f(\alpha+\varepsilon)$ și $f(\beta-\varepsilon)$ sunt de semne contrare. 2°. $F(x)$ are un zero α de ordin par de multiplicitate. Insă atunci α este un zero al polinomului $f(x)$ de ordin impar de multiplicitate.

II. Considerăm un interval (a, b) și o funcție $K(x)$ pozitivă sau nulă în acest interval, fără a fi identic nulă. Presupunem mai mult că momentele

$$c_h=\int_a^b K(x)\,x^h dx\quad,\quad h=0,1,\dots,2n$$

există. Pentru ușurința scrierii punem

$$a_h=\frac{c_h}{h}$$

In acest condiții polinomul

$$G(x)=a_0 f(x)+a_1 f'(x)+\cdots+a_{2n} f^{(2n)}(x)$$

unde f(x) *înseamnă polinomul* (1), *este pozitiv pentru valorile reale ale lui* x. Aceasta rezultă din egalitatea

$$G(x)=\int_a^b K(u)\,f(x+u)\,du$$

Ne propunem a pune momentele c_h sub o formă, care ne va fi utilă în ceea ce va urma. Fie numerele $r_0, r_1, \dots, r_{2n}$ distincte și situate în intervalul (a, b). Din identitățile

$$\frac{(x-r_1)\dots(x-r_{2n})}{(r_0-r_1)\dots(r_0-r_{2n})}\,r_0^h+\cdots+\frac{(x-r_0)\dots(x-r_{2n-1})}{(r_{2n}-r_0)\dots(r_{2n}-r_{2n-1})}\,r_{2n}^h=x^h$$

pentru $h=0, 1, \dots, 2n$, se deduc expresiile următoare ale momentelor

$$p_0 r_0^h+\cdots+p_{2n} r_{2n}^h=c_h \tag{4}$$

cu notațiile

$$p_0=\int_a^b K(x)\frac{(x-r_1)\dots(x-r_{2n})}{(r_0-r_1)\dots(r_0-r_{2n})}\,dx,\ \dots,\ p_{2n}=\int_a^b K(x)\frac{(x-r_0)\dots(x-r_{2n-1})}{(r_{2n}-r_0)\dots(r_{2n}-r_{2n-1})}\,dx$$

Ne rămâne să arătăm că se pot alege numerele $r_0, r_1, \dots, r_{2n}$ așa încât coeficienții $p_0, p_1, \dots, p_{2n}$ să fie pozitivi. In adevăr, se poate determina [7, 8] un polinom $P_m(x)$ de gradul m, afară de un factor constant, prin condițiile

$$\int_a^b K(x)\,x^k\,P_m(x)\,dx=0\quad,\quad k=0,\dots,m-1$$

Făcând $m=0, 1, \dots$, se obține un șir de polinoame

$$P_0(x)\ ,\ P_1(x),\dots,\ P_m(x),\dots$$

numite ortogonale din cauza relațiilor

$$\int_a^b K(x)\,P_k(x)\,P_h(x)\,dx=0\quad,\quad h \neq k$$

consecințe a condițiilor precedente. Zerorile acestor polinoame sunt reale, distincte și situate în intervalul (a, b).

Așa fiind, să luăm pentru $r_0, r_1, \dots r_{2n}$ zerorile polinomului $P_{2n+1}(x)$. Atunci urmează egalitatea

$$p_0\,P'_{2n+1}(r_0)=\int_a^b K(x)\frac{P_{2n+1}(x)}{x-r_0}\,dx$$

De altă parte avem, succesiv [7, 8]

$$\int_a^b K(x)\left[\frac{P_{2n+1}(x)}{x-r_0}\right]^2 dx=\int_a^b K(x)\frac{P_{2n+1}(x)}{x-r_0}\left[\frac{P'_{2n+1}(r_0)}{1!}+\dots+\frac{(x-r_0)^{2n}}{(2n+1)!}P^{(2n+1)}_{2n+1}(r_0)\right]dx$$

$$=\int_a^b K(x)\frac{P_{2n+1}(x)}{x-r_0}\,P'_{2n+1}(r_0)\,dx=p_0\left[P'_{2n+1}(r_0)\right]^2.$$

Am dovedit astfel egalitățile

$$a_h = \frac{1}{h!}\left(p_0 r_0^h + \cdots + p_{2n} r_{2n}^h\right), \quad h = 0, 1, \ldots, 2n \tag{5}$$

unde $p_0, p_1, \ldots, p_{2n}$ sunt numere pozitive. Hurwitz a găsit egalități analoage prin considerațiuni deduse din teoria reziduurilor.

Considerăm acuma câteva cazuri particulare pentru intervalul (a, b) și funcția K (x) [6].

1. $a=0$, $b=+\infty$, $K(x)=x^{\lambda-1}e^{-x}$, cu $\lambda>0$. Momentele au expresiile următoare [1]

$$c_h = \int_0^\infty x^{h+\lambda-1} e^{-x} dx = \Gamma(h+\lambda), \quad h=0, 1, \ldots, 2n$$

Se obțin polinoamele definite

$$\Gamma(\lambda) f(x) + \frac{\Gamma(\lambda+1)}{1!} f'(x) + \cdots + \frac{\Gamma(\lambda+2n)}{(2n)!} f^{(2n)}(x).$$

In acest caz, șirul polinoamelor ortogonale este format de polinoamele lui Laguerre. Pentru $\lambda=1$, se găsește polimonul (2).

2. $a=-\infty$, $b=+\infty$, $K(x)=e^{-x^2}$. Se găsește polinomul definit $F_1(x)$, cu excepția factorului $\sqrt{\pi}$. Aici avem polinoamele ortogonale ale lui Hermite.

3. $a=o$, $b=1$, $K(x)=x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$, $\alpha>0$, $\beta>0$. Momentele sunt [1]

$$c_h = \int_0^1 x^{h+\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx = B(h+\alpha, \beta), \quad h=0, \ldots, 2n.$$

Avem polinomul definit

$$B(\alpha, \beta) f(x) + \frac{B(1+\alpha, \beta)}{1!} f'(x) + \cdots + \frac{B(2n+\alpha, \beta)}{(2n)!} f^{(2n)}(x).$$

Acestui caz îi corespund polinoamele ortogonale ale lui Jacobi.

4. $a=-1$, $b=1$, $K(x)=(1-x^2)^{\alpha-1}$, cu $\alpha>0$. Se găsește

$$c_{2k+1}=0, \quad c_{2k} = 2\int_0^1 (1-x^2)^{\alpha-1} x^{2k} dx = \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{k-\frac{1}{2}} du = B\left(k+\frac{1}{2}, \alpha\right).$$

Prin urmare se obține polinomul definit

$$B\left(\frac{1}{2}, \alpha\right) f(x) + \frac{B\left(2+\frac{1}{2}, \alpha\right)}{2!} f''(x) + \cdots + \frac{B\left(2n+\frac{1}{2}, \alpha\right)}{(2n)!} f^{(2n)}(x).$$

Polinoamele ortogonale corespunzătoare aparțin lui Gegenbauer. Pentru

$\alpha=1$, se obțin polinoamele lui Legendre și polinomul definit

$$\frac{f(x)}{1!} + \frac{f''(x)}{3!} + \cdots + \frac{f^{(2n)}(x)}{(2n+1)!}$$

Funcția K(x) rămânând aceiași, se poate lua intervalul (0,1).

III. *Polinomul G(x) este definit dacă coeficienții* $a_0, a_1, \ldots, a_{2n}$ *pot fi puși sub forma* (5), *unde* $p_0, p_1, \ldots, p_{2n}$ *sunt numere pozitive oarecare și* $r_0, r_1, \ldots, r_{2n}$ *numere reale arbitrare, distincte și reciproc.* In adevăr, înlocuind acești coeficienți prin expresiile lor, se găsește

$$G(x) = p_0 f(x+r_0) + p_1 f(x+r_1) + \ldots + p_{2n} f(x+r_{2n}) \tag{6}$$

Al doilea membru este pozitiv, pentru x real, căci f(x) are aceiași proprietate, cu excepția a cel mult $2n$ valori reale și distincte de x, pentru care poate fi nul.

Pentru a demonstra reciproca, observăm întâi că $a_0, a_1, \ldots, a_{2n}$ pot fi întotdeauna puși sub forma (5). Se iau numerele $r_0, r_1, \ldots, r_{2n}$ distincte și sistemul (4) determină numerele $p_0, p_1, \ldots, p_{2n}$. Așa fiind avem egalitatea (6). Facem în această egalitate $f(x)=(x-r_1)^2\ldots(x-r_n)^2$ și $x=o$. Apoi luăm $r_{n+1}, \ldots, r_{2n}$ așa de aproape de $r_1, r_2, \ldots, r_n$ pentru ca suma $p_{n+1} f(r_n) + \cdots + p_{2n} f(r_{2n})$ să fie mai mică decât $p_0 f(r_0)$. Rezultă $p_0>0$ căci $f(r_0)$ și $G(o)$ sunt pozitivi.

Un raționament analog arată că $p_1, \ldots, p_{2n}$ sunt deasemenea pozitivi.

IV. Rezultatul precedent poate fi enunțat altfel. Dar trebue să utilizăm noțiunea de integrală în sensul lui Stieltjes [8]. Fie $g(x)$ o funcție continuă în intervalul (a, b) și $j(x)$ o funcție mărginită, nedescrescătoare în același interval. Impărțim intervalul dat, prin punctele de diviziune

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < b$$

și luăm în fiecare interval parțial (x_{h-1}, x_h) punctul ξ_h pentru $h=1, 2, \ldots, n$ unde $x_0=a$ și $x_n=b$. Suma următoare

$$g(\xi_1)[j(x_1)-j(a)] + \cdots + g(\xi_n)[j(b)-j(x_{n-1})]$$

are o limită, când n crește nemărginit, fiecare interval parțial tinzând către zero. Se înseamnă această limită prin simbolul

$$\int_a^b g(x)\, dj(x).$$

Demonstrația este la fel cu aceia ce se dă pentru integrala obișnuită.

Considerăm integrala lui Stieltjes

$$G(x) = \int_a^b f(x+u)\, dj(u)$$

unde $f(x)$ este polinomul (1) și $j(x)$ funcția precizată mai sus. Polinomul $G(x)$ este definit și celelalte consecințe trase din (4) rămân valabile. Prin introducerea integralei lui Stieltjes, nu numai câmpul polinoamelor definite este lărgit, dar în acest fel se obțin toate. Pentru a arăta aceasta, presupunem că $a_0, a_1, \ldots, a_{2n}$ sunt reprezentate de relațiile (5) unde $p_0, p_1, \ldots, p_{2n}$ sunt pozitivi și $r_0 < r_1 < \ldots < r_{2n}$. In intervalul (a, b) cu $a < r_0$ și $b > r_{2n}$ definim funcția nedescrescătoare $j(x)$ în chipul următor:

$$a \leqq x < r_0,\ j(x) = j(a);\quad r_0 \leqq x < r_1,\ j(x) = j(a) + p_0;\quad r_1 \leqq x < r_2,$$
$$j(x) = j(a) + p_0 + p_1, \ldots, r_{2n} \leqq x < b,\ j(x) = j(a) + p_0 + \cdots + p_{2n}.$$

Așa fiind, relațile (5) devin

$$a_h = \frac{1}{h!}\int_a^b u^h\, dj(u)$$

Prin urmare, avem

$$G(x) = a_0 f(x) + a_1 f'(x) + \cdots + a_{2n} f^{(2n)}(x) = \int_a^b f(x+u)\, dj(u) \tag{7}$$

și propoziția este demonstrată.

V. Hurwitz ia ca punct de plecare observația [5] că polinomul $f(x)$ poate fi pus sub forma unei sume de patrate de polinoame cu coeficienții reali[4]. Este deci suficient de a presupune $f(x) = \varphi^2(x)$, unde $\varphi(x)$ este un polinom de gradul n. Calculând derivata de ordinul k a lui $\varphi(x)$ după regula lui Leibniz, pentru $k = 1, \ldots, 2n$ și înlocuind rezultatele astfel obținute în (7), se găsește

$$G(x) = \sum_{k,l=0}^{n} a_{k+l}\, c_{k+l}^{k}\, \varphi^{(k)}(x)\, \varphi^{(l)}(x) \quad , \quad \varphi^{(0)}(x) = \varphi(x)$$

In suma din membrul al doilea se pune

$$x_k = \varphi^{(k)}(x) \quad , \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

și se obține o formă patratică. Scriind că această formă este pozitivă, se obțin condițiile necesare și suficiente pentruca polinomul $G(x)$ să fie definit. Hurwitz descompune direct formele patratice corespunzătoare polinoamelor (2) și (3) în sume de patrate de forme liniare.

Pentru a termina, vom arăta că dacă coeficienții $a_0, \ldots, a_{2n}$ au expresiile (5), atunci forma patratică se descompune într'o sumă de patrate având toate semnul plus. In adevăr, această formă patratică poate fi scrisă

$$p_0(x_0 + r_0 x_1 + \cdots + r_0^n x_n)^2 + \cdots + p_{2n}(x_0 + r_{2n} x_1 + \cdots + r_{2n}^n x_n)^2 .$$

Formele liniare, puse în evidență, se anulează deodată numai pentru $x_0 = x_1 = \ldots = x_n = 0$. Concluzie imposibilă căci polinomul $\varphi(x)$ nu este identic nul.

Secția de Matematică
a Filialei Cluj a Academiei R. P. R.

BIBLIOGRAFIE

1. Angheluță Th., *Funcții analitice*. 1940, Edit. Univ. Cluj, p. 242, p. 246.
2. Hurwitz A., *Math. Ann.*, Bd. 73, 1912.
3. Hurwitz A., *Mathematische Werke*, Bd. 2. Basel, Birkhauser, 1933.
4. Polya G. und Szegö G., *Aufgaben und Lehrsätze der Analysis—2.* J. Springer, Berlin, p. 107, 38.
5. Remak R., *Math. Ann.*, Bd. 72, 1912.
6. Shohat T., *Mémorial des sciences mathématiques, 1934.* Gauthier—Villars, Paris. Fasc. 66, p. 15.
7. Stielstjes T.-J., *Oeuvres complètes*, t. 1, Groningen, P. Noordhoff, 1914, p. 337, p. 384.
8. Stieltjes, T.-j., *Ann. Sci. Éc. norm. sup. Paris*, (3), 1, 1884.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Об определённых многочленах

Ф. АНГЕЛУЦЭ

I. В начале своего мемуара Гурвиц изложил теорему: если многочлен (1) нетождественно равен нулю и с действительными коэфициентами-положителен или равен нулю для действительных значений x, то многочлен (2) положителен для действительного x. Затем он добавляет, что Гаусдорф, Штридсберг и Ремак встретили подобную теорему, причём многочлен (2) заменяется (3).

Преследуемая цель — дать общий способ для составления определённых многочленов. Таким образом многочлены $F(x)$ и $F_2(x)$ являются частными примерами. В заключение, возвращаемся к доказательству Гурвица.

Сперва доказываем, элементарно, первую теорему. Предположим, что $F(x)$ аннулируется в промежутке $(-\infty, +\infty)$ и из $f(x) = F(x) - F'(x)$ вытекает, вопреки гипотезе, что $f(x)$ меняет знак.

II. Рассматривается промежуток (a, b) и функция $K(x)$ положительная или равная нулю в этом промежутке, но не тождественно равная нулю. Предположим также, что моменты C_2 существуют. В этих условиях многочлен $G(x)$ положителен для действительных значений x.

Чтобы следовать дальше, даём моментам более подходящий вид. Взяв числа $r_0, r_1, \ldots r_{2n}$ отдельными и расположенными в промежутке (a, b) выводятся равенства (4).

Эти числа, будучи корнями ортогонального полинома $p_{2n+1}(x)$ указывается, что $p_0, p_i, \ldots, p_{2n}$ — положительны. Находятся также равенства (5). Затем указываются частные случаи для промежутка (a, b) и функции $K(x)$, соответствующие классическим ортогональным многочленам.

III. Имеется общий результат. Многочлен $G(x)$ являетя определённым, если коэфициенты $a_0, a_1, \ldots, a_{2n}$ могут быть приведены к виду (5), где $p_0, p_1, \ldots, p_{2n}$ — какие либо положительные числа и $r_0, r_1, \ldots, r_{2n}$ — любые отличные действительные числа и наоборот. Наконец имеется равенство (6). Для взаимоотношения замечается, что $a_0, a_1, \ldots, a_{2n}$ всегда могут быть приведены к виду (5), Берутся числа $r_0, r_1, \ldots, r_{2n}$ отдельными и система (4) определяет равенство (6). Взяв целесообразно $f(x)$ и $r_0, r_1, \ldots, r_{2n}$ указывается, что $p_0, p_1, \ldots, p_{2n}$ — положительны.

IV. Пользуясь интегралом Stieltjes-а, оказывается, что $G(x)$ — определённый и другие следствия (4) остаются в силе. С помощью интеграла Stieltjes-а не только расширяется поле определённых многозначных, но таким

образом получить их полностью. С этой целью предполагаем, что $a_0, a_1, \ldots, a_{2n}$
даны (5), где $p_0, p_1, \ldots, p_{2n}$ — положительны и $r_0 < r_1 < \ldots < r_{2n}$ В про-
межутке (a, b), с $a < r_0$ и $b > r_{2n}$ строится функция $j(x)$. Тогда равенства (5)
выражены интегралами. Затем равенство (7) доказывает сделанное утверждение.

Гурвиц утилизирует замечание, что $f(x)$ можно привести к виду суммы
квадратов многочленов с действительными коефициентами. Поэтому достаточно
предположить $f(x) = \varphi\ (x)$, где $\varphi(x)$ — многочлен степени n. Исчисляется
производная порядка к $f(x)$ для $к = 1, 2, \ldots, 2n$ и замещается (7). Полагая
$x_h = \varphi^{(h)}(x)$ $h = 0, 1, \ldots, 2x$ — получается квадратная форма. Написав, что
эта форма положительна, найдены необходимые и достаточные условия для
того, чтобы $G(x)$ была определённой.

Проверив, если $a_0, a_1, \ldots, a_{2n}$ имеют выражения (5), где $p_0, p_1, \ldots, p_{2n}$
— положительны, тогда квадратная форма распадается в сумму квадратов
имеющих целиком знак + перед собой.

RÉSUMÉ

Sur les polynômes définis

par

TH. ANGHELUȚĂ

I. Hurwitz énonce au commencement de son mémoire le théorème: *Si le polynôme (1), non identiquement nul et avec les coefficients réels est positif ou nul pour les valeurs réelles de* x, *alors le polynôme (2) est positif pour* x *réel*. Puis il ajoute que Hausdorf, Stridsberg et Remak ont rencontré un théorème analogue, le polynôme (2) étant remplacé par (3).

Le but poursuivi est de donner une méthode générale pour la formation des polynômes définis. Les polynômes $F(x)$, $F_1(x)$ et $F_2(x)$ apparaîtront ainsi comme des exemples particuliers. Nous terminons en revenant sur la démonstration de Hurwitz.

Auparavant nous montrons, d'une façon élémentaire, le premier théorème. Nous supposons que $F(x)$ s'annule dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ et il en résulte de $f(x) = F(x) - F'(x)$, contrairement à l'hypothèse, que $f(x)$ change de signe.

II. *On considère un intervalle* (a, b) *et une fonction* K(x), *positive ou nulle dans cet intervalle, sans être identiquement nulle. Nous supposons aussi que les moments c_h existent. Dans ces conditions le polynôme* G(x) *est positif pour les valeurs réels de* x.

Pour aller plus loin nous mettrons les moments sous une forme plus adéquate. En prenant les nombres $r_0, r_1, \ldots, r_{2n}$ distincts et situés dans l'intervalle (a, b), on déduit les égalités (4).

Ces nombres étant les racines du polynôme orthogonal $P_{2n+1}(x)$, on montre que $p_0, \ldots, p_{2n}$ sont positifs. On trouve aussi les égalités (5). On donne ensuite des cas particuliers pour l'intervalle (a, b) et la fonction $K(x)$, qui correspondent aux polynômes orthogonaux classiques.

III. Nous avons le résultat général. *Le polynôme* G(x) *est défini si les coefficients* $a_0, \ldots, a_{2n}$ *peuvent être mis sous la forme* (5) *où* $p_0, \ldots, p_{2n}$ *sont des nombres positifs quelconques et* $r_0, \ldots, r_{2n}$ *des nombres réels*

arbitraires distincts et réciproquement. En effet on a l'égalité (6). Pour la réciproque on observe que $a_0, \ldots, a_{2n}$ peuvent être toujours mis sous la forme (5). On prend les nombres $r_0, \ldots, r_{2n}$ distincts et le système(4) détermine $p_0, \ldots, p_{2n}$. On a donc l'égalité (6). En prenant convenablement $f(x)$ et $r_0, \ldots, r_{2n}$ on montre que $p_0, \ldots, p_{2n}$ sont positifs.

IV. En utilisant l'intégrale de Stieltjes, on voit que $G(x)$ est défini et les autres conséquences tirées de (4) restent valables. Par l'intégrale de Stieltjes, non seulement le champ des polynômes définis est élargi, mais de cette manière on les obtient tous. Pour cela supposons que $a_0, a_1, \ldots, a_{2n}$ sont donnés par (5) où $p_0, p_1, \ldots, p_{2n}$ sont positifs et $r_0 < r_1 < \ldots < r_{2n}$. Dans l'intervalle (a, b), avec $a < r_0$ et $b > r_{2n}$ on construit la fonction $j(x)$. Alors les égalités (5) sont exprimées par des intégrales. Puis l'égalité (7) démontre l'affirmation.

V. Hurwitz utilise l'observation que $f(x)$ peut être mis sous la forme d'une somme de carrés de polynômes à coefficients réels. Il est donc suffisant de supposer $f(x) = \varphi^2(x)$ où $\varphi(x)$ est un polynôme de degré n. On calcule la dérivée d'ordre k de $f(x)$, pour $k = 1, 2, \ldots, 2n$ et on substitue dans (7). En posant $x_h = \varphi^{(h)}(x)$ $h = 0, 1, \ldots, n$, on obtient une forme quadratique. En écrivant que cette forme est positive on trouve les conditions nécessaires et suffisantes que $G(x)$ soit défini.

Nous vérifions que si $a_0, \ldots, a_{2n}$ ont les expressions (5), où $p_0, \ldots, p_{2n}$ sont positifs, alors la forme quadratique se décompose dans une somme de carrés ayant tous le signe plus en avant.