# DESPRE UNELE SPAŢII BANACH ŞI FUNCŢIONALELE LOR LINEARE

DE

G. CĂLUGĂREANU

*Comunicare prezentată de Prof. T. POPOVICIU, m. coresp, Acad. R. P. R., în şedinţa din 19 Mai 1951 a Filialei Cluj a Academiei R. P. R.*

1. Fie $\varphi(n)$ o funcţie crescătoare de $n$, astfel ca $\varphi(n) \to \infty, n \to \infty$. Considerând toate şirurile numerice

$$x = \{a_n\}, \quad n = 1, 2, \ldots \quad | a_n | = o\,[\varphi(n)]$$

ca puncte ale unui spaţiu X, putem organiza pe X ca spaţiu vectorial definind

$$x + y = \{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}, \quad tx = t\,\{a_n\} = \{ta_n\}.$$

Aci numerele $a_n$ cât şi $t$, pot fi reale sau complexe. Se vede că, singura restricţie la care sunt supuse şirurile din X fiind

$$| a_n | = o\,[\varphi(n)], \quad \text{adică} \quad \frac{|a_n|}{\varphi(n)} \to 0, \quad n \to \infty$$

atât $x + y$ cât şi $tx$ aparţin spaţiului X odată cu $x$ şi $y$. Axiomele spaţiului vectorial se verifică uşor. Obţinem un spaţiu X vectorial normat, definind

$$\| x \| = \operatorname*{Sup}_n \frac{|a_n|}{\varphi(n)}$$

şi axiomele normei se verifică şi ele imediat.

Spaţiul X astfel normat este şi complet. Să presupunem

$$x_\nu = \{a_{n\nu}\}, \ x_\nu \in X, \ \nu = 1, 2, \ldots; \ \| x_\nu - x_\mu \| < \varepsilon, \ \mu, \nu > N(\varepsilon).$$

Aceasta se mai scrie

$$\operatorname*{Sup}_n \frac{|a_{n\mu} - a_{n\nu}|}{\varphi(n)} < \varepsilon; \qquad | a_{n\mu} - a_{n\nu} | < \varepsilon\,\varphi(n); \ \mu, \nu > N(\varepsilon\ ; n = 1, 2, \ldots$$

de unde

$$a_{n\nu} \to a_{no}, \quad n = 1, 2, \ldots$$



De mai sus rezultă, făcând $\mu \to \infty$,

$$| a_{no} - a_{n\nu} | < \varepsilon\,\varphi(n), \quad \nu > N(\varepsilon), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Aşadar

$$| a_{no} | \leq | a_{n\nu} | + | a_{no} - a_{n\nu} |, \quad \frac{|a_{no}|}{\varphi(n)} \leq \frac{|a_{n\nu}|}{\varphi(n)} + \varepsilon, \quad \nu > N(\varepsilon), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Alegând pe $\nu$ fix şi $> N(\varepsilon)$ apoi făcând $n \to \infty$, găsim

$$\lim_n \operatorname{Sup} \frac{|a_{no}|}{\varphi(n)} \leq \varepsilon$$

şi cum $\varepsilon$ e arbitrar, rezultă $| a_{no} | = o\,[\varphi(n)]$, deci $x_o \in X$. In fine,

$$\| x_o - x_\nu \| = \operatorname*{Sup}_n \frac{|a_{no} - a_{n\nu}|}{\varphi(n)} < \varepsilon, \quad \nu > N(\varepsilon)$$

deci $x_\nu \to x_o, \nu \to \infty$, şi X e complet, deci e un spaţiu Banach.

2. Să determinăm forma generală a funcţionalei lineare într'un astfel de spaţiu X. Fie $e_n = \{0, 0, \ldots, 0, \varphi(n), 0, \ldots\}$, $n = 1, 2, \ldots$ şirul vectorilor unitari din X. In $e_n$ singurul termen diferit de zero este cel de rang $n$, egal cu $\varphi(n)$, astfel ca $\| e_n \| = 1$. Avem atunci

$$x = \sum_{n=1}^{k} \frac{a_n e_n}{\varphi(n)} + y_k, \quad y_k = \{0, 0, \ldots, 0, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots\}.$$

In $y_k$ primii $k$ termeni sunt nuli, iar după ei urmează termenii şirului $x = \{a_n\}$ dela rangul $k+1$ înainte. Avem

$$\| y_k \| = \operatorname*{Sup}_{n > k} \frac{|a_n|}{\varphi(n)}, \quad \text{deci} \quad \| y_k \| \to 0, \ k \to \infty.$$

Aşadar, $f(x)$ fiind o funcţională lineară din spaţiul X,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{k} \frac{a_n}{\varphi(n)} f(e_n) + f(y_k) = \sum_{n=1}^{k} \frac{\gamma_n a_n}{\varphi(n)} + f(y_k)$$

notând $f(e_n) = \gamma_n$. Pentru $k \to \infty$ avem $\| y_k \| \to 0$, deci $f(y^k) \to 0$, şi

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n a_n}{\varphi(n)}.$$

Pentru a determina norma funcţionalei $\| f \|_X$, să considerăm şirul particular $x_k = \{a_{nk}\}$ unde $a_{nk} = \varphi(n)$ semn $\overline{\gamma}_n$ pentru $n \leq k$, $a_{nk} = 0$ pentru $n > k$. Am notat aci semn $\alpha = \frac{\alpha}{|\alpha|}$ pentru $\alpha$ real sau complex. Avem

$$\| x_k \| = \operatorname*{Sup}_n | \text{semn}\ \overline{\gamma}_n | = 1, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Inlocuind mai sus avem

$$f(x_k) = \sum_{n=1}^{k} \gamma_n \operatorname{semn} \bar{\gamma}_n = \sum_{n=1}^{k} |\gamma_n| \leq \| f \|_X \| x_k \| = \| f \|_X .$$

Această inegalitate având loc pentru orice $k > 0$, seria $\sum |\gamma_n|$ e convergentă şi

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n| \leq \| f \|_X .$$

Să scriem acum

$$|f(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\gamma_n| \cdot |a_n|}{\varphi(n)} \leq \operatorname{Sup}_n \frac{|a_n|}{\varphi(n)} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n| = \| x \| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n| .$$

Avem aşadar

$$\| f \|_X \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n| , \quad \text{deci} \quad \| f \|_X = \sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n| .$$

3. Un caz particular remarcabil, care dealtfel ne-a condus la observările de mai sus, este acel al şirurilor formate de coeficienţii taylorieni ai seriilor întregi cu raza de convergenţă nenulă. Acest spaţiu T poate fi numit spaţiul taylorian. Dacă

$$a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

este o serie întreagă cu raza de convergenţă pozitivă, avem

$$\lim_n \operatorname{Sup} \sqrt[n]{|a_n|} < \infty , \quad |a_n| \leq \frac{M}{\rho^n}$$

unde M şi $\rho$ sunt numere pozitive. Aşadar

$$\frac{|a_n|}{n!} \leq \frac{M}{n!\,\rho^n} \to 0 , \; n \to \infty ; \quad |a_n| = o(n!) .$$

Rezultă deci că T este un spaţiu Banach, dacă adoptăm norma

$$\| x \| = \operatorname{Sup}_n \frac{|a_n|}{n!}$$

iar funcţionalele lineare sunt date de

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma_n a_n}{n!} , \quad \| f \|_X = \sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n| .$$

Funcţionalele bilineare vor fi

$$f(x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\gamma_{m,n} a_m b_n}{m!\,n!} , \quad \sum_{m,n=0}^{\infty} |\gamma_{m,n}| < \infty$$



iar cele pătratice, rezultând din precedentele prin înlocuirea $y = x$,

$$g(x) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\gamma_{m,n} a_m a_n}{m!\,n!} , \quad \sum_{m,n=0}^{\infty} |\gamma_{m,n}| < \infty .$$

Am cercetat astfel de funcţionale pătratice în scopul de a obţine o exprimare directă a invarianţilor de prelungire corespunzători funcţiei analitice definită de elementul $\sum a_n z^n$, ca formă pătratică în raport cu coeficienţii taylorieni.

Putem observa că spaţiile definite mai sus conţin ca nişte cazuri particulare toate clasele cuasi-analitice de funcţii reale indefinit derivabile într'un interval. Avem deci mai sus şi forma generală a funcţionalei lineare pentru fiecare clasă cuasi-analitică, corespunzătoare definiţiei normei $\| x \| = \operatorname{Sup}_n \frac{|a_n|}{\varphi(n)}$.

*Secţia de Matematică*
*a Filialei Cluj a Academiei R. P. R.*

## КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

### О некоторых пространствах Банаха и их линейных функционалах

Г. КЭЛУГЭРЯНУ

Показывается что пространство X, которого элементы $x = \{a_n\}$ являются численные последовательности подверженные условию $|a_n| = O[\varphi(n)]$, где $\varphi(n) \to \infty, n \to \infty$ можно организовать как линейное нормированное пространство, полагая $\| X \| = \operatorname{Sup}_n \frac{|a_n|}{\varphi(n)}$, и таким образом X становится пространством Банаха. Определяется общий вид линейного функционала пространства X, причём получается

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n a_n}{\varphi(n)}, \quad \| f \|_X = \sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n| .$$

Замечательный частный случай — Тайлора T, которого элементами являются последовательности образованные коэффициентами ряда $\sum^{\infty} a_n z^n$, имеющего отличный от нуля радиус сходимости. Каждый квази-аналитический класс реальных неопределённых дифференцируемых функций в промежутке тоже образует пространство X к которому применяются вышуказанные выводы.

## RÉSUMÉ

### Sur certains espaces de Banach et leurs fonctionnelles linéaires

par

G. CĂLUGAREANU

L'espace X dont les éléments $x = \{a\}$ sont les suites numériques telles que $|a_n| = o[\varphi(n)]$, $\varphi(n) \to \infty$, $n \to \infty$, peut être organisé comme espace vectoriel normé en posant $\| x \| = \operatorname{Sup}_n \frac{|a_n|}{\varphi(n)}$, et X devient ainsi un espace de Banach. On donne la forme générale des fonctionnelles linéaires de l'espace X, qui est

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n a_n}{\varphi(n)}, \quad \| f \|_X = \sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n| .$$

Un cas particulier remarquable est celui de l'espace taylorien T, dont les éléments sont les suites des coefficients d'une série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ayant un rayon de convergence non-nul. Chaque classe quasi-analytique de fonctions réelles indéfiniment dérivables dans un intervalle est encore un espace X auquel on peut appliquer les résultats indiqués.