DESPRE GRUPURILE QUASI-HAMILTONIENE INFINITE

DE

GHEORGHE PIC

Comunicare prezentată de Prof. T. POPOVICIU, m. coresp. Acad. R. P. R., în şedinţa din 22 Martie 1950 a Filialei Cluj a Academiei R. P. R.

Intr'o notă precedentă [1] am determinat structura grupurilor finite neabeliene, ale căror subgrupuri se bucură de proprietatea că ele sunt divizori quasi-normali.[1]) Rezultatul obţinut atunci ne arată că ele constitue o categorie destul de largă de grupuri, care cuprinde ca un caz particular grupurile hamiltoniene. Din aceste motive am dat acestor grupuri numele de „grupuri quasi-hamiltoniene".

In prezenta notă ne propunem să extindem rezultatele obţinute şi la grupuri infinite.

Un grup infinit poate avea această natură datorită fie prezenţei unei infinităţi de elemente, fie datorită unor elemente aperiodice. Se impune deci ca un prim obiectiv de o parte cercetarea relaţiilor ce există între elementele periodice şi cele aperiodice, pe de altă parte cercetarea legăturii ce există între elementele aperiodice. In prezenta notă se arată mai întâi că, dacă un grup quasi-hamiltonian conţine elemente aperiodice, atunci nu numai că ele sunt comutative cu cele de ordin finit, dar sunt comutative şi între ele. Mai mult, un grup quasi-hamiltonian propriu zis, deci un grup care conţine o componentă quasiquaternionică, nu poate conţine elemente aperiodice. Plecând dela această constatare se arată că grupurile quasi-hamiltoniene infinite se deosebesc de cele finite numai prin aceia, că unele componente ale produsului direct, din care se compune grupul, pot conţine o infinitate de elemente.

Vom cerceta întâi legătura ce există între elementele aperiodice şi cele de ordin finit. In această privinţă ne dă indicaţii

Teorema I. *Orice element aperiodic al unui grup quasi-hamiltonian este comutativ cu orice element de ordin finit al grupului.*

---

[1]) Vom numi după O. Ore [2] divizor quasi-normal al unui grup G orice subgrup a care este permutabil cu orice subgrup al lui G, adică un subgrup astfel că oricare ar fi $a \in A$ şi $b \in G$ se poate determina un număr k şi un element $a' \in A$ astfel ca $a\,b = b^k a'$.

Demonstrație. Fie g un element aperiodic al grupului, iar a un element de ordin finit p^l (p număr prim). Vom arăta întâi că există totdeauna o putere $\bar{g} = g^h$ astfel ca a și $\bar{g}$ să fie comutativi.

Intr'adevăr avem șirul infinit

$$a^{-1} g\, a = g^{k_1} a^{h_1}$$
$$a^{-1} g^2 a = g^{k_2} a^{h_2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a^{-1} g^i\, a = g^{k_i} a^{h_i}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Deoarece a este de ordin finit, urmează că există în acest șir puteri ale lui a astfel ca $h_{i_1} = h_{i_2}$. De aici deducem că

$$a^{-1} g^{i_1} a \,.\, a^{-1} g^{-i_2} a = g^{k_{i_1}} a^{h_{i_1}} \,.\, a^{-h_{i_1}} g^{-k_{i_2}}$$

de unde

$$a^{-1} g^{i_1 - i_2} a = g^{k_{i_1} - k_{i_2}}$$

notând $g^{i_1 - i_2} = \bar{g}$ și ținând seamă că $\bar{g}$ este aperiodic, urmează că

$$a^{-1} \bar{g}\, a = \bar{g}^{\pm 1}$$

Deci prima parte a propoziției va fi demonstrată, dacă vom reuși să arătăm că nu este posibil ca

$$a^{-1} \bar{g}\, a = \bar{g}^{-1}$$

Intr'adevăr, dacă ar subsista o relație de forma de mai sus, atunci a și $\bar{g}$ ar da naștere unui grup quasi-hamiltonian $\bar{G}$ pentru care

$$a^{-2} \bar{g}\, a^2 = \bar{g} \qquad \text{și} \qquad a^{-1} \bar{g}\, a = \bar{g}^{-1}$$

de unde

(1) $$(\bar{g}\, a)^2 = a^2 \qquad\qquad (\bar{g}^2 a)^2 = a^2$$

Grupul $\bar{G}$ fiind quasi-hamiltonian, urmează că două elemente oarecari ale lui sunt permutabile, deci și $\bar{g}\, a$ și $\bar{g}^2 a$. Prin urmare va trebui să fie posibil să determinăm două numere întregi h și k astfel ca

$$\bar{g}\, a \,.\, \bar{g}^2 a = (\bar{g}^2 a)^h (\bar{g}\, a)^k$$

sau ținând seamă de (1) pe l astfel ca

$$\bar{g}\, a \,.\, \bar{g}^2 a = \bar{g}^2 a \,.\, \bar{g}\, a \,.\, a^{2l}$$

Cum $\bar{g}\, a \,.\, \bar{g}^2 a = \bar{g}^{-1} a^2$ și $\bar{g}^2 a \,.\, \bar{g}\, a = \bar{g}\, a^2$, urmează că va trebui să determinăm pe l astfel, ca $\bar{g}^{-1} a^2 = \bar{g} \,.\, a^2 \,.\, a^{2l}$, adică $\bar{g}^{-2} = a^{2l}$, ceeace este absurd, $\bar{g}$ fiind aperiodic, iar a de ordin finit.

Fiind astfel demonstrat că a și $\bar{g} = g^s$ sunt comutativi, să revenim la relația $a^{-1} g\, a = a^h g^g$ și s'o înmulțim cu $\bar{g} = g^s$. Avem astfel

$$a^{-1} g^{s+1} a = a^h g^{s+k}$$

Fie $k = k_1 s + k_2$ ($|k_2| < s$). Atunci, grupul fiind quasi-hamiltonian, urmează că există un număr întreg l astfel, ca $g^{(k_1+1)s+k_2} = g^{l(s+1)}$. Deducem de aici că $l = k_2$ și $k_1 + 1 = k_2$.

Inmulțind aceeași relație cu $\bar{g}^2 = g^{2s}$ deducem

$$a^{-1} g^{2s+1} a = a^h g^{s(k_1+2)+k_2}$$

de unde urmează că va trebui să existe un număr l' astfel ca $g^{(k_1+2)s+k_2} = g^{l'(2s+1)}$. Rezultă că $l' = k_2$ și $2k_2 = k_1 + 2$. Insă $k_2 = k_1 + 1$, așa încât ne rămâne $k_2 = 1$ și deci $k_1 = 0$ și deci relația ce subsistă între a și g are forma $a^{-1} g a = a^h g$ sau $g^{-1} a g = a^{-h-1}$. De aici deducem prin procedee întrebuințate în [1] că, dacă g și a nu sunt comutativi, relația poate fi considerată ca fiind de forma

$$g^{-1} a\, g = a^{1+p^k}$$

Din această relație deducem că

$$(g\, a)^\beta = g^\beta a^\beta \,.\, a^{\binom{\beta}{2} p^k + \binom{\beta}{3} p^{2k} + \cdots}$$

Deoarece elementele g^{-1} și $g\, a$ aparțin unui grup quasi-hamiltonian, urmează că trebue să fie totdeauna posibil să determinăm pe α și β astfel ca

$$g^{-1} \,.\, g\, a = a = (g\, a)^\beta \,.\, g^{-\alpha} = g^\beta\, a^{\beta + \binom{\beta}{2} p^k + \binom{\beta}{3} p^{2k} + \cdots} \,.\, g^{-\alpha}$$

De aici se vede că $\alpha = \beta$. Dar atunci

$$a = a^{\left[\beta + \binom{\beta}{2} p^k + \binom{\beta}{3} p^{2k} + \cdots\right]^\beta}$$

ceeace implică $\beta = 1$. Prin urmare g^{-1} și $g\, a$ nu fac parte dintr'un grup quasi-hamiltonian decât atunci când aceste elemente sunt comutative.

In ceeace privește elementele aperiodice mai avem următoarea proprietate:

Teorema II. *Elementele aperiodice ale unui grup quasi-hamiltonian sunt comutative.*

Demonstrație. Fie U și V grupurile ciclice generate de două elemente u respectiv v ale unui grup quasi-hamilitonian. Vom deosebi două cazuri, după cum a). $U \cap V = 1$ sau b). $U \cap V \neq 1$.

a). $U \cap V = 1$. Atunci urmează, u și v aparținând unui grup quasi-hamiltonian, că

(2) $$u\, v = v^\alpha u^\beta$$

și de aici

(3) $$v\, u^{-\beta} = u^{-1} v^\alpha$$

Insă v și $u^{-\beta}$ sunt elemente ale unui grup quasi-hamiltonian, deci trebue să existe două numere întregi λ și μ astfel ca

$$v\, u^{-\beta} = (u^{-\beta})^\lambda v^\mu$$

Comparând această relație cu (3) și ținând seamă că $U \cap V = 1$ și u aperiodic, urmează că $\beta = \pm 1$.

Prin considerații analoage se deduce că $\alpha = \pm 1$.

Deci după diferitele moduri în cari combinăm valorile lui α și β vom avea 4 cazuri de cercetat.

1. Dacă $\alpha = 1$, $\beta = -1$, atunci relația (2) se scrie

$$v^{-1} u v = u^{-1} \tag{2'}$$

De aici rezultă că $v^{-2} u v^2 = u$ deci v^2 și u sunt comutativi. Tot din relația (2′) rezultă că

$$(v u^h)^2 = v u^h v u^h = v^2 \tag{4}$$

Să cercetăm produsul $v u . v u^2$. El va fi egal, după cum se verifică cu ajutorul relației (2′) cu $v^2 u$. Pe de altă parte, vu și $v^2 u$ făcând parte dintr'un grup quasi-hamiltonian, urmează că se pot determina două numere h și k astfel ca

$$(v u^2)^k (v u)^h = v^2 u$$

Insă din (4) rezultă că aceasta înseamnă că trebue să determinăm un număr l astfel ca $vu^2 . vu . v^{l2} = v^2 u$ adică $v^{2l} = u^2$, ceeace este în contradicție cu ipoteza $U \cap V = 1$.

2. $\alpha = -1$, $\beta = 1$. Acest caz se tratează ca cel precedent.

3. $\alpha = -1$, $\beta = 1$. In acest caz relația (2) se scrie

$$u v = v^{-1} u^{-1} \tag{2''}$$

adică

$$(u v)^2 = 1$$

Procedând ca în cazul 1. se arată că nu putem avea $u^{-2} v u^2 = v^{-1}$. Urmează deci că sau $u^2 v$ este un element de ordin doi, sau u^2 și v sunt comutativi.

Dacă însă $u^2 v$ este un element de ordin doi, atunci urmează din cele demonstrate pentru grupurile quasi-hamiltoniene finite că uv și $u^2 v$ sunt comutativi, deci și $uv . u^2 v$ este un element de ordin doi. Aceasta este însă absurd, pentrucă $uv . u v = uv . (u^2 v)^{-1} = u^{-1}$ în contradicție cu faptul că u este aperiodic.

A rămas deci ca singură posibilitate că u^2 și v sunt comutativi. Analog se arată că u^3 și v sunt comutativi. De aici urmează însă că de o parte $u . u^2 v = u . vu^2$, pe de altă parte $u . u v = u^3 v = v u^3$ și deci $uvu^2 = vu^3$, adică $uv = vu$ ceeace este în contradicție cu (2″) $U \cap V$ fiind egal cu 1.

Rămâne deci ca singură posibilitate

4. $\alpha = \beta = 1$, deci u și v sunt comutativi.

Rămâne să cercetăm cazul când $U \cap V \neq 1$.

In acest caz $U \cap V$ este un grup ciclic aperiodic, divizor normal al grupului $U \cap V$, iar grupurile ciclice U/W și V/W sunt finite. Fie w elementul generator al lui W; atunci orice element al lui U poate fi scris sub forma

$$u_1^{l_1} u_2^{l_2} \ldots u_h^{k_h} w^{l\rho}$$

iar orice element al lui V

$$v_1^{l_1} v_2^{l_2} \ldots v_j^{h_j} w^{l\sigma}$$

unde u^i este un element de ordin p_i^k, iar v_s unul de ordin q_s^h, p_i și q_s fiind numere prime.

Fie $\bar{u}$ și $\bar{v}$ două elemente ale grupurilor U/W și V/W. Ele vor fi sau a). comutative sau b). vor genera un grup quasi-hamiltonian.

a). $\bar{u}$ și $\bar{v}$ sunt comutative. Vom arăta că și în acest caz u și v sunt comutative. Intr'adevăr $\bar{u}$ și $\bar{v}$ fiind comutative, urmează că avem relația

$$u^{-1} v u = v . w^r \tag{5}$$

Fie α acea putere a lui u care ne dă un element al grupului W. Din (5) urmează însă că

$$u^{-\alpha} v u^{\alpha} = v . w^{r\alpha}$$

Insă u^{α} fiind o putere a lui w, este comutativ cu v, deci $w^{r\alpha} = 1$, ceiace este numai atunci posibil, dacă $r = 0$.

b). $\bar{u}$ și $\bar{v}$ generează un grup quasi-hamiltonian. Atunci, după cum am arătat în [1], grupul va conține o componentă quasi-quaternionică. Fie $\bar{u}^*$ și $\bar{v}^*$ elementele generatoare ale acestui grup quasi-quaternionic, p numărul prim căruia îi corespunde această componentă, iar u^* și v^* elementele corespunzătoare din grupul întreg. Vom arăta că u^* și v^* sunt comutativi. Intr'adevăr în baza ipotezei avem

$$(u^*)^{-1} v^* u^* = (v^*)^{1 + \alpha p^k} w^h$$

De aici deducem că

$$(u^*)^{-1} (v^*)^l u^* = (v^*)^{l(1 + \alpha p^k)} w^{hl}$$

oricare ar fi l. Fie q un număr, care să nu fie o putere a lui p, astfel ales încât $(v^*)^q \in W$. Atunci însă $(v^*)^q$ este comutativ cu u^*, deci punând în relația de mai sus $l = q$, deducem că $h = o$ și $\alpha = 0$, adică u^* și v^* sunt comutativi.

In baza acestor rezultate se poate enunța

Teorema III. *Dacă un grup quasi-hamiltonian are o componentă quasi-quaternionică, atunci el nu poate conține elemente aperiodice.*

Am văzut în [1] că o componentă quasi-quaternionică este generată de două elemente s și t legate prin relația

$$s^{-1} t s = t^{1 + p^{\tau - k}} \tag{6}$$

unde p^{τ} este ordinul elementului t. Fie a un element aperiodic al grupului G. El va fi în baza teoremei II-a comutativ cu s și t. Prin urmare vom putea scrie

$$s^{-1} t a s = t a . t^{p^{\tau - k}}$$

Insă grupul nostru fiind quasi-hamiltonian, s un element periodic, iar ta un element aperiodic, urmează că relația de mai sus este în contradicție cu relația $s^{-1} . t a . s = (t a)^{1 + p^{\tau - k}} s^h$, care ar trebui să subsiste, grupul generat de s și ta fiind și el quasi-hamiltonian.

Rezultatele expuse până acum ne permit să enunțăm următoarea

Teoremă fundamentală: *Orice grup quasi-hamiltonian este produsul direct de subgrupuri* Q^i, *elementele subgrupului* Q_i *fiind puteri ale aceluiaş număr prim* p_i.

Fiecare subgrup Q_i *este sau abelian sau produsul direct al unui grup quasi-quaternionic generat de două elemente* s *şi* t, *care satisfac o relaţie de forma (6), unde* $k \leqq \sigma$, p^τ *fiind ordinul lui* t, p^σ *ordinul lui* s, *exceptându-se cazul când* $p = 2$, $k = \tau - 1$.

Intr'adevăr grupul G fiind quasi-hamiltonian, urmează că el conţine o componentă quasi-quaternionică, deci în baza teoremei III-a nu poate conţine elemente aperiodice.

Fie acum a şi b două elemente ale grupului G. Dacă ordinele acestor elemente sunt puteri a două numere prime distincte, atunci, ele generând un grup quasi-hamiltonian, urmează din cele demonstrate în [1] că a şi b sunt comutative.

Dacă însă ordinul elementelor a şi b este o putere a aceluiaş număr prim p, atunci a şi b sau generează un grup quasi-quaternionic Q sau unul abelian. In primul caz urmează din cele arătate în [1], că putem presupune că Q este generat de elemente care satisfac o relaţie de forma (6) sau este subgrupul unui grup de această natură. Să presupunem deci că Q este generat de elementele s şi t. Dacă acum c este un element care nu face parte din Q şi a cărui ordin este tot o putere a lui p, urmează că putem considera grupul generat de Q şi c ca fiind generat de elementele s, t şi r, unde r este comutativ atât cu s cât şi cu t şi cel mult de ordin $p^{\tau-1}$. Dacă R este un subgrup generat de 4 elemente, a căror ordin ar fi o putere a numărului prim p, atunci aceleaşi raţionamente ne arată că acest grup poate fi considerat ca fiind generat de elementele s şi t caracterizate mai înainte şi de elementele v_1 şi v_2 de ordin cel mult egal cu $p^{\tau-1}$. In afară de aceasta v_1 şi v_2 sunt comutative. Din aceste consideraţii urmează acum teorema enunţată.

Secţia de Matematică
a Filialei Cluj a Academiei R. P. R.

BIBLIOGRAFIE

1. Pic Gh., *Despre structura grupurilor quasihamiltoniene*, Bul. Ac. R.P.R., t. I, 1949, pp. 973—979.
2. Ore O., *Structures and group theory I.* Duke Mathematical Journal, t. 3, 1937, pp. 162—163.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

О бесконечных квази-гамильтонных группах

Г. ПИК

В настоящей заметке распространяются результаты полученные в одной из предыдущих заметок, о конечных квази-гамильтонных группах, на бесконечные группы. Эти группы являются обобщением гамильтонных групп, изученных Дедекиндом, Вендтом, Баером и др., так как они обладают свойством, что каждая их подгруппа является квази-нормальной подгруппой в

смысле установленном Орем. В случае бесконечных групп устанавливаются следующие свойства:

1. Каждый апериодичный элемент квази-гамильтонной группы заменяем всяким элементом конечного порядка группы.

2. Апериодичные элементы квази-гамильтонной группы заменяемы (коммутативны).

3. Если квази-гамильтонная группа имеет квази-гамильтонную составную, то она не может содержать апериодчных элементов.

Отсюда вытекает, учитывая и результаты и способы упомянутой заметки, что:

Теорема: Каждая квази-гамильтонная группа есть прямой результат подгрупп Q_i, элементы подгруппы Q_i являясь степенями того же простого чила p_i.

Каждая погруппа Q_i, или авелевская, или же прямой результат авелевской группы и квази-кватернионной группы образованной двумя элементами s и t, которые удовлетворяют отношение вида

$$s^{-1}\, t\, s = t^{1+p^{\tau-k}}$$

где $k \leqq \sigma$, p^t-порядок t, p^σ -порядок s, за исключением случая $p=2$, $k=\tau-1$.

RÉSUMÉ

Sur les groupes quasi-hamiltoniens infinis

par

GHEORGHE PIC

Dans la présente note nous donnons une extension aux groupes infinis des résultats établis dans une note précédente pour les groupes quasi-hamiltoniens finis. Les groupes quasi-hamiltoniens sont une généralisation des groupes hamiltoniens étudiés par Dedekind, Wendt, Baer etc., car ils ont la propriété suivante: tout sous-groupe est un sous-groupe quasi-normal au sens de O. Ore.

Nous démontrons les propriétés suivantes:

1. Tout élément apériodique d'un groupe quasi-hamiltonien est commutatif avec chaque élément d'ordre fini du groupe.

2. Les éléments apériodiques d'un groupe quasi-hamiltonien sont commutatifs entre eux.

3. Si un groupe quasi-hamiltonien a une composante quasi-quaternionique, alors il ne peut contenir des éléments apériodiques.

Il en résulte, en utilisant les résultats et les méthodes de la note précédente:

Théorème: *Chaque groupe quasi-hamiltonien est le produit direct des sous-groupes* Q_i, *les éléments de ces sous-groupes étant tous d'ordre* p_i, *nombre premier.*

Chaque sous-groupe Q_i *est ou abélien, ou le produit direct d'un groupe abélien et d'un groupe quasi-quaternionique généré par deux éléments* s *et* t, *qui satisfont à une relation de la forme*

$$s^{-1}\, t\, s = t^{1+p^{\tau-k}}$$

où $k \leqq \sigma$, p^τ *est l'ordre de* t, p^σ *l'ordre de* s, *à l'exception du cas* $p = 2$, $k = \tau - 1$.