SISTEM DE VECTORI ASOCIAT UNEI ECUAŢII RICCATI GENERALIZATE

DE

TIBERIU MIHĂILESCU

Comunicare prezentată de Prof. TIBERIU POPOVICIU, m. coresp. Acad. R. P. R., în şedinţa din 6 Ianuarie 1951 a Filialei Cluj a Academiei R. P. R.

1. Numeroase probleme de geometrie diferenţială a suprafeţelor şi a congruenţelor de drepte din spaţiul obişnuit conduc la determinarea unei funcţiuni

$$z = \varphi(u, v)$$

de două variabile independente u, v, care să verifice un sistem de ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul I de forma

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial z}{\partial u} + a_1 \frac{z^2}{2} + b_1 z + c_1 = 0 \\ &\frac{\partial z}{\partial v} + a_2 \frac{z^2}{2} + b_2 z + c_2 = 0 \end{aligned}$$

$a_1, \ldots, c_2$ fiind funcţiuni de u, v.

Intr'un mod mai general putem pune problema determinării unei funcţiuni de n variabile independente

$$(2)\qquad z = \varphi(x^1, x^2, \ldots, x^n),$$

care să verifice un sistem de ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul I de forma

$$(3)\qquad \frac{\partial z}{\partial x^i} + a_i \frac{z^2}{2} + b_i z + c_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

a_i, b_i, c_i fiind funcţiuni de $x^1, x^2, \ldots, x^n$ astfel ca pentru

$$x^1 = x_0^1,\ x^2 = x_0^2, \ldots, x^n = x_0^n$$

funcţiunea z să se reducă la o valoare unică $z = z_0$, dată arbitrar de altfel.

Inmulţind ecuaţiile sistemului (3) respectiv cu $dx^1, dx^2, \dots, dx^n$ şi adunându-le, deducem că acest sistem este echivalent cu ecuaţia Pfaff în $n+1$ variabile

(4) $$\Omega = dz + \frac{z^2}{2}\,\omega_1 + z\omega_2 + \omega_3 = 0$$

unde

(5) $$\omega_1 = a_i\,dx^i, \quad \omega_2 = b_i\,dx^i, \quad \omega_3 = c_i\,dx^i.$$

O astfel de ecuaţie Pfaff în $n+1$ variabile o vom numi *ecuaţie Riccati generalizată.*

Prin însăşi natura problemei puse, această ecuaţie este *complet integrabilă,* deoarece trebue să determine una din cele $n+1$ variabile în funcţiune de celelalte n, considerate ca independente, şi de o constantă arbitrară.

Se ştie că, folosind substituţia

(6) $$x^i = x_0^i + t_i\,(x^1 - x_0^1)\,, \qquad (i = 2, 3, \dots, n)$$

$M_0\,(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n)$ fiind un punct în domeniul căruia funcţiunile a_i, b_i, c_i, sunt analitice, integrarea efectivă a ecuaţiei (4) se efectuiază prin mijlocirea unei ecuaţii Riccati într'o singură variabilă independentă

(7) $$\frac{dz}{dx^1} + A_1\,\frac{z^2}{2} + A_2 z + A_3 = 0$$

A_1, A_2, A_3, fiind funcţiuni de x^1 şi de parametrii t_i.

Trecând deci peste problema determinării integralei generale a ecuaţiei (4), asupra căreia vom reveni într'o altă lucrare, ne propunem să arătăm că unei ecuaţii Riccati generalizate i se asociază un sistem particular de trei vectori covarianţi şi că, folosind o schimbare de variabilă bine determinată, acest sistem vectorial admite o formă canonică remarcabil de simplă.

2. In spaţiul punctual cu n dimensiuni $(x^1, x^2, \dots, x^n)$, faţă de grupul infinit al transformărilor punctuale

(8) $$x^i = x^i\,(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)\,, \qquad \Delta = \frac{D\,(x^1, \dots, x^n)}{D\,(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)} \neq 0$$

funcţiunea (2) se comportă ca un scalar (funcţiune de punct), adică se transformă prin invarianţă

(9) $$z\,(x^1, \dots, x^n) = z\,[x^1\,(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n), \dots, x^n\,(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)] = \bar{z}\,(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)]\,.$$

O transformare oarecare a grupului (8), efectuată asupra ecuaţiei (4), ne dă

(10) $$d\bar{z} + \frac{\bar{z}^2}{2}\,\bar{\omega}_1 + \bar{z}\,\bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3 = 0$$

unde

(11) $$\bar{\omega}_1 = \bar{a}_i\,d\bar{x}^i, \quad \bar{\omega}_2 = \bar{b}_i\,d\bar{x}^i, \quad \bar{\omega}_3 = \bar{c}_i\,d\bar{x}^i.$$

Ţinând seamă de (9), rezultă

(12) $$\bar{\omega}_1 = \omega_1\,, \quad \bar{\omega}_2 = \omega_2\,, \quad \bar{\omega}_3 = \omega_3\,.$$

Sistemele de diferenţiale $(dx^1, \dots, dx^n)$ constituesc vectori contravarianţi, iar formele Pfaff ω_1, ω_2, ω_3 se transformă şi ele prin invarianţă potrivit relaţiilor (12).

In virtutea unei proprietăţi cunoscute rezultă că sistemele de funcţiuni

$$a\,(a_1, \dots, a_n)\,, \quad b\,(b_1, \dots, b_n)\,, \quad c\,(c_1, \dots, c_n)$$

sunt *sisteme vectoriale covariante.*

După cum am arătat mai sus, ecuaţia (4) este complet integrabilă. Obţinem condiţiile de integrabilitate aplicând teorema lui Frobenius.

Covariantul bilinear al formei Ω este identic nul dacă ţinem seama de ecuaţia (4) însăşi.

Notând cu dx^i, δx^i doi vectori infinitesimali contravarianţi, avem

(14) $$\Omega' = \delta\Omega\,(d) - d\Omega\,(\delta) = [z\omega_1 + \omega_2\,,\, dz] + \frac{z^2}{2}\,\omega'_1 + z\omega'_2 + \omega'_3$$

unde ω'_i este covariantul bilinear al formei ω_i

$$\omega'_i = \delta\omega_i\,(d) - d\omega_i\,(\delta)$$

Inlocuind în (14) valoarea lui dz determinată de ecuaţia (4), găsim

$$\Omega' = \frac{z^2}{2}\,(\omega'_1 - [\omega_1\omega_2]) + z\,(\omega'_2 - [\omega_1\omega_3]) + \omega'_3 - [\omega_2\omega_3])\,.$$

Această formă patratică exterioară trebuind să fie identic nulă, deducem condiţiile de integrabilitate sub forma

(15) $$\omega'_1 = [\omega_1\omega_2]\,, \quad \omega'_2 = [\omega_1\omega_3]\,, \quad \omega'_3 = [\omega_2\omega_3]\,.$$

In general, o formă Pfaff

$$\omega = \alpha_i\,dx^i$$

este o formă lineară invariantă asociată unui vector covariant $\alpha\,(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, obţinută prin înmulţirea tensorială contractată a acestui vector cu un vector contravariant infinitesimal $(dx^1, \dots, dx^n)$.

Covariantul ei bilinear

$$\omega'_i = \delta\,(\alpha_i\,dx^i) - d\,(\alpha_i\delta x^i) = \left(\frac{\partial\alpha_i}{\partial x^k} - \frac{\partial\alpha^k}{\partial x^i}\right) dx^i\,\delta x^k,$$

este o formă bilineară asociată tensorului antisimetric covariant de ordinul II

$$\alpha_{ik} = \frac{\partial\alpha_i}{\partial x^k} - \frac{\partial\alpha_k}{\partial x^i}\,,$$

numit *rotorul* vectorului α (Rot α).
Iar produsul exterior a două forme Pfaff

$$\omega = \alpha_i\, dx^i, \quad \tilde{\omega} = \beta_i\, dx^i$$

definit de relația

$$[\omega\tilde{\omega}] = \begin{vmatrix} \alpha_i\, dx^i & \beta_i\, dx^i \\ \alpha_i\, \delta x^i & \beta_i\, \delta x^i \end{vmatrix} = (\alpha_i \beta_k - \alpha_k \beta_i)\, dx^i \delta x^k$$

este forma bilineară invariantă asociată bivectorului

$$\gamma_{ik} = \alpha_i \beta_k - \alpha_k \beta_i$$

format cu cei doi vectori covarianți α_i, β_i. Notând cu

$$[\alpha\, \beta]$$

bivectorul construit pe doi vectori covarianți dați α, β, condițiile de integrabilitate (15) se scriu sub formă invariantivă

$$\begin{aligned} Rot\ a &= [a\ b] \\ Rot\ b &= [a\ c] \\ Rot\ c &= [b\ c] \end{aligned} \tag{16}$$

Așadar, *unei ecuații Riccati generalizate i se asociază în mod invariant un sistem format din trei vectori covarianți care verifică relațiile (16).*

3. Egalând cu zero cele trei forme Pfaff asociate vectorilor a, b, c, obținem un sistem Pfaff

$$\omega_1 = 0, \qquad \omega_2 = 0, \qquad \omega_3 = 0. \tag{17}$$

Acest sistem Pfaff asociat unei ecuații Riccati generalizate este complet integrabil. (Pentru $n = 2,3$ proprietatea este evidentă).

In adevăr, conform teoremei lui Frobenius, condiția de completă integrabilitate a unui sistem Pfaff se exprimă prin anularea identică a covarianților bilineari ai formelor Pfaff din primii membrii ai ecuațiilor sistemului, anulare ce trebuie să se facă în virtutea ecuațiilor sistemului însuși.

Va fi deci necesar și suficient ca acești covarianți bilineari să se exprime prin expresii exterioare patratice de forma

$$\omega'_i = \sum_{k=1}^{3} \tilde{\omega}_{ik}\, \omega_k] \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{18}$$

$\tilde{\omega}_{ik}$ fiind forme Pfaff convenabil alese.

Relațiile stabilite (15) ne arată că această condiție este îndeplinită. Sistemul Pfaff (17) este complet integrabil.
Integrarea acestui sistem se reduce la integrarea unui sistem diferențial obișnuit în trei variabile dependente, prin metoda lui Mayer.

Dacă

$$y^i = y^i(x^1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, 3).$$

sunt trei integrale prime ale acestui sistem diferențial auxiliar, sistemul Pfaff (17) este algebric echivalent cu sistemul

$$dy^1 = 0,\ dy^2 = 0,\ dy^3 = 0; \tag{19}$$

vom avea adică relații de forma

$$\omega_i = \alpha_{i1}\, dy^1 + \alpha_{i2}\, dy^2 + \alpha_{i3}\, dy^3 \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{20}$$

Suntem conduși să considerăm trei cazuri, după cum vectorii a, b, c, sunt linear independenți sau nu.

4. Dacă sistemul de vectori asociat unei ecuații Riccati generalizate este format din vectori linear independenți, formele Pfaff ω_1, ω_2, ω_3 sunt linear independente.

Fie y^1, y^2, y^3 un sistem de trei integrale independente ale sistemului diferențial asociat. Formele ω_i se vor exprima prin relații de forma (20), determinantul coeficienților α_{ik} fiind diferit de zero în domeniul fiecărui punct regulat al spațiului.

Să observăm că forma ω_1 egalată cu zero

$$\omega_1 = 0 \tag{21}$$

dă o ecuație Pfaff, care — având în vedere prima din relațiile (15) — este complet integrabilă, covariantul bilinear al formei ω_1 anulându-se pentru elementele integrale ale ecuației (21). Deci vom avea

$$\omega_1 = \alpha_1\, dy^1 \tag{22}$$

α_1 fiind o funcțiune de $x^1, \ldots, x^n$.

Câmpul vectorial a este proporțional cu un câmp de gradienți.

Considerații asemănătoare ne arată că și câmpul vectorial c se bucură de aceiași proprietate

$$\omega_3 = \gamma_3\, dy^3. \tag{23}$$

Iar în virtutea relației (20) avem

$$\omega_2 = \beta_1\, dy^1 + \beta_2\, dy^2 + \beta_3\, dy^3 \tag{24}$$

cu condiția

$$\alpha_1 \beta_2 \gamma_3 \neq 0.$$

Să efectuăm schimbarea de variabilă

$$y^1(x^1, \ldots, x^n) = y^1, \quad y^2(x^2, \ldots, x^n) = y^2, \quad y^3(x^1, \ldots, x^n) = y^3$$
$$x^4 = y^4, \ldots, x^n = y^n.$$

Schimbarea este reversibilă, deoarece funcțiunile y^1, y^2, y^3 sunt independente.

După cum am amintit mai sus, atât operația de înmulțire exterioară, cât și operația de formare a covariantului bilinear al unei forme Pfaff, au un caracter invariant.

Relațiile (15) sunt valabile deci și în noul sistem de variabile independente $y^1, \dots, y^n$.

Din prima dintre ele

$$\omega'_1 = [\omega_1\, \omega_2],$$

ținând seamă de (22), avem

$$[dy^1\, d\alpha_1] = [\omega_1 \omega_2]$$

sau:

$$-\left[\frac{\partial \alpha_1}{\partial y^1} dy^1 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y^2} dy^2 + \cdots + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y^n} dy^n, dy^1\right] = [\alpha_1\, dy^1, \beta_1\, dy^1 + \beta_2\, dy^2 + \beta_3\, dy^3].$$

Prin identificare, găsim

$$\frac{\partial \alpha_1}{dy^2} = +\alpha_1 \beta_2, \quad \frac{\partial \alpha_1}{\partial y^3} = +\alpha_1 \beta_3, \quad \frac{\partial \alpha_1}{\partial y^4} = \cdots = \frac{\partial \alpha_1}{\partial y^n} = 0.$$

Aceste relații ne arată că α_1 este o funcțiune numai de y^1, y^2, y^3.

$$\alpha_1 = \alpha_1 (y^1, y^2, y^3)$$

ce satisface sistemul de ecuații cu derivate parțiale de ordinul I

(25) $$\frac{\partial \alpha_1}{\partial y^2} - \alpha_1 \beta_2 = 0, \quad \frac{\partial \alpha_1}{\partial y^3} - \alpha_1 \beta_3 = 0.$$

In același mod, din

$$\omega'_3 = [\omega_2\, \omega_3]$$

deducem relațiile

$$-\frac{\partial \gamma_3}{\partial y^1} = \beta_1 \gamma_3, \quad -\frac{\partial \gamma_3}{\partial y^2} = \beta_2 \gamma_3, \quad \frac{\partial \gamma_3}{\partial y^4} = \cdots = \frac{\partial \gamma_3}{\partial y^n} = 0;$$

deci γ_3 este o funcțiune de y^1, y^2, y^3, soluție a sistemului de ecuații cu derivate parțiale de primul ordin

(26) $$\frac{\partial \gamma_3}{\partial y_1} + \beta_1 \gamma_3 = 0, \quad \frac{\partial \gamma_3}{\partial y^2} + \beta_2 \gamma_3 = 0.$$

Ultima relație

$$\omega'_2 = [\omega_1\, \omega_3]$$

ne dă

$$-\left[\frac{\partial \beta_1}{\partial y^1} dy^1 + \cdots + \frac{\partial \beta_1}{\partial y^n} dy^n, dy^1\right] - \left[\frac{\partial \beta_2}{\partial y^1} dy^1 + \cdots + \frac{\partial \beta_2}{\partial y^n} dy^n, dy^2\right] -$$

$$-\left[\frac{\partial \beta_1}{\partial y^1} dy^1 + \cdots + \frac{\partial \beta_3}{\partial y^n} dy^n, dy^3\right] = \alpha_1 \gamma_3 [dy^1\, dy^3].$$

de unde

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial y^4} = \cdots = \frac{\partial \beta_1}{\partial y^n} = 0, \quad \frac{\partial \beta_2}{\partial y^4} = \cdots = \frac{\partial \beta_2}{\partial y^n} = 0, \quad \frac{\partial \beta_3}{\partial y^4} = \cdots = \frac{\partial \beta_3}{\partial y^n} = 0,$$

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial y^2} = \frac{\partial \beta_2}{\partial y^1} = 0, \quad -\frac{\partial \beta_3}{\partial y^1} + \frac{\partial \beta_1}{\partial y^3} = \alpha_1 \gamma_3 \quad \frac{\partial \beta_2}{\partial y^3} = \frac{\partial \beta_3}{\partial y^2}.$$

Așadar și β_1, β_2, β_3 sunt funcțiuni numai de y^1, y^2, y^3, ce satisfac sistemul

(27) $$\frac{\partial \beta_2}{\partial y^1} - \frac{\partial \beta_1}{\partial y^2} = 0, \quad -\frac{\partial \beta_3}{\partial \beta^1} + \frac{\partial \beta_1}{\partial y^3} = \alpha_1 \gamma_3 \quad \frac{\partial \beta_2}{\partial y^3} - \frac{\partial \beta_3}{\partial y^2} = 0.$$

Din expresiile (22)—(24), pe care le iau formele ω_1, ω_2, ω_3, rezultă că *dacă sistemul de vectori asociat unei ecuații Riccati generalizate este format din vectori linear independenți, există schimbări de variabilă care aduc sistemul la forma canonică*

(28) $$(\alpha_1, 0, 0, \dots, 0), \quad (\beta_1, \beta_2, \beta_3, 0, \dots, 0), \quad (0, 0, \gamma_3, 0, \dots, 0).$$

5. Sistemul format de ecuațiile (22)—(24) poate fi considerat ca un sistem Pfaff cu 5 funcțiuni necunoscute α_1, β_1, β_2, β_3, γ_3, de trei variabile independente y^1, y^2, y^3.

Punându-l sub forma

(29) $$\alpha_1\, dy^1 - \omega_1 = 0, \quad \beta_1\, dy^1 + \beta_2 dy^2 + \beta_3\, dy^3 - \omega_2 = 0, \quad \gamma_3\, dy^3 - \omega_3 = 0$$

și calculând covarianții bilineari ai formelor din primii membrii, ținând seamă de ecuațiile sistemului (29), găsim sistemul exterior asociat

(30) $$\begin{cases} [\Delta\alpha_1, \omega_1] & = 0 \\ [\Delta\beta_1, \omega_1] + [\Delta\beta_2, \omega_2] + [\Delta\beta_3, \omega_3] & = 0 \\ [\Delta\gamma_3, \omega_3] & = 0 \end{cases}$$

unde

$$\Delta\alpha_1 = d\alpha_1 - \alpha_1 \omega_2, \quad \Delta\beta_1 = \gamma_3 (\beta_2\, d\beta_1 - \beta_1 d\beta_2), \quad \Delta\beta_2 = \alpha_1 \gamma_3\, d\beta_2$$

(31) $$\Delta\beta_3 = \alpha_1 (\beta_2 d\beta_3 - \beta_3 d\beta_2 + \beta_2 \gamma_3 \omega_1), \quad \Delta\gamma_3 = d\gamma_3 + \gamma_3 \omega_2$$

sunt cinci forme Pfaff linear independente.

Structura acestui sistem patratic exterior ne arată că sistemul Pfaff (29), este în involuție cu $s_3 = 1$.

Soluția sa cea mai generală depinde de o funcțiune arbitrară de trei argumente.

Fără să insistăm asupra soluției generale, vom arăta că putem construi efectiv o soluție având acest grad de generalitate.

In adevăr să luăm arbitrar funcțiunea de trei variabile independente

$$\gamma_3 = \gamma_3 (y^1, y^2, y^3,).$$

Relațiile (26) ne dau sub formă finită funcțiunile β_1, β_2

(32) $$\beta_1 = -\frac{\partial}{\partial y^1} (\log \gamma_3), \quad \beta_2 = -\frac{\partial}{\partial y^2} (\log \gamma_3);$$

iar din a treia din relațiile (27) deducem

(33) $$\beta_3 = \int \frac{\partial \beta_2}{\partial y^3} dy^2 + \varphi (y^1, y^3) = -\frac{\partial}{\partial y^3} (\log \gamma_3) + \varphi (y^1, y^3)$$

φ fiind o funcțiune arbitrară de două argumente.

A doua din relațiile (27) ne permite aflarea funcțiunei α_1 tot sub formă finită

$$\alpha_1 = \frac{1}{\gamma_3}\left(\frac{\partial\beta_1}{\partial y^3} - \frac{\partial\beta_3}{\partial y^1}\right) = -\frac{1}{\gamma_3}\frac{\partial\varphi}{\partial y^1}. \tag{34}$$

Exprimând că funcțiunile $\alpha_1, \beta_2, \beta_3$ astfel determinate satisfac sistemul (25), găsim că funcțiunea arbitrară φ satisface ecuația

$$\text{(I)}\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^1\partial y^3} - \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y^1} = 0$$

a cărei integrală generală este

$$\text{(II)}\quad \varphi = \frac{F''(y^3)}{F'(y^3)} - \frac{f(y^1)+F(y^3)}{2F'(y^1)}$$

f și F fiind funcțiuni arbitrare de un argument.

6. Să considerăm cazul în care vectorii asociați sunt linear dependenți, unul dintre ei putându-se exprima linear în raport cu ceilalți doi. Formele $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, sunt și ele linear dependente — ceeace este totdeauna cazul când $n = 2$ — iar sistemul Pfaff complet integrabil

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$$

este algebric echivalent cu un sistem de forma

$$dy^1 = dy^2 = 0$$

y^1, y^2 fiind două integrale independente ale sistemului.

Ținând seamă de observațiile făcute mai sus asupra formelor ω_2, ω_3 și efectuând schimbarea de variabilă

$$y^1(x^1, \ldots, x^n) = y^1, \quad y^2(x^1, \ldots, x^n) = y^2, \quad x^3 = y^3, \ldots, x^n = y^n,$$

vom avea

$$\omega_1 = \alpha_1\, dy^1, \quad \omega_2 = \beta_1\, dy^1 + \beta_2 dy^2, \quad \omega_3 = \gamma_2\, dy^2, \quad \alpha_1\beta_2 \neq 0. \tag{35}$$

Ca și în cazul precedent se demonstrează că $\alpha_1, \beta_1, \beta_2, \gamma_2$ sunt funcțiuni numai de y^1 și y^2 ce satisfac ecuațiile cu derivate parțiale de ord. I

$$\frac{\partial\alpha_1}{\partial y^2} = +\alpha_1\beta_2, \quad \frac{\partial\gamma_2}{\partial y^1} = -\beta_1\gamma_2, \quad \frac{\partial\beta_2}{\partial y^1} - \frac{\partial\beta_1}{\partial y^2} + \alpha_1\gamma_2 = 0. \tag{36}$$

Așadar, *dacă numai doi dintre vectorii asociați unei ecuații Riccati generalizate sunt linear independenți, sistemul celor trei vectori asociați se reduce, printr'o schimbare de variabilă convenabil aleasă, la forma canonică*

$$(\alpha_1, 0, 0, \ldots, 0), \quad (\beta_1, \beta_2, 0 \ldots, 0), \quad (0, \gamma_2, 0 \ldots, 0). \tag{37}$$

7. Sistemul Pfaff

$$\alpha_1\, dy^1 - \omega_1 = 0, \quad \beta_1\, dy^1 + \beta_2\, dy^2 - \omega_2 = 0, \quad \gamma_2\, dy^2 - \omega_3 = 0 \tag{38}$$

în patru funcțiuni $\alpha_1, \beta_1, \beta_2, \gamma_2$ și două variabile independente y^1, y^2, admite sistemul patratic asociat

$$\left\{\begin{aligned} &[\Delta\alpha_1\omega_1] = 0\\ &[\Delta\beta_1\omega_1] + [\Delta\beta_2\omega_2] = 0\\ &[\Delta\gamma_2\omega_2] = 0\end{aligned}\right. \tag{39}$$

unde

$$\Delta\alpha_1 = d\alpha_1 + \alpha_1\omega_2, \quad \Delta\beta_1 = \gamma_2 d\beta_1, \quad \Delta\beta_2 = \alpha_1(d\beta_2 - \gamma_2\omega_1), \quad \Delta\gamma_2 = \alpha_1 d\gamma_2 - \beta_1\gamma_2\omega;$$

Sistemul (38) este în involuție cu $s_2 = 1$.

Soluția cea mai generală a sistemului Pfaff (38) depinde de o funcțiune arbitrară de două argumente.

Și în acest caz putem construi o soluție a sistemului (38) având gradul de generalitate al soluției generale.

Forma

$$\omega_2 = \beta_1\, dy^1 + \beta_2\, dy^2,$$

fiind o formă Pfaff în două variabile, admite un factor integrant, deci se poate scrie

$$\omega_2 = \beta\, du \tag{40}$$

β și u fiind funcțiuni de y^1, y^2. Adică

$$\beta_1 = \beta\frac{\partial u}{\partial y^1}, \qquad \beta_2 = \beta\frac{\partial u}{\partial y^2}. \tag{41}$$

Sistemul de relații (36) devine

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\alpha_1}{dy^2} = +\alpha_1\beta\frac{\partial u}{\partial y^2}, \qquad \frac{\partial\gamma_2}{\partial y^1} = -\gamma_2\beta\frac{\partial u}{\partial y^1},\\ &\frac{\partial\beta}{\partial y^1}\frac{\partial u}{\partial y^2} - \frac{\partial\beta}{\partial y^2}\frac{\partial u}{\partial y^1} + \alpha_1\gamma_2 = 0.\end{aligned}\right. \tag{42}$$

Din primele două deducem

$$\beta\frac{\partial u}{\partial y^2} = +\frac{\partial}{\partial y^2}(\log\alpha_1), \qquad \beta\frac{\partial u}{\partial y^1} = -\frac{\partial}{\partial y^1}(\log\gamma_2) \tag{43}$$

de unde

$$\frac{\partial\beta}{\partial y^1}\frac{\partial u}{\partial y^2} + \beta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2\partial y^1} = +\frac{\partial^2}{\partial y^1\partial y^2}(\log\alpha_1)$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial y^2}\frac{\partial u}{\partial y^1} + \beta\frac{\partial^2 u}{\partial y^1\partial y^2} = -\frac{\partial^2}{\partial y^1\partial y^2}(\log\gamma_2).$$

Scăzând și ținând seamă de a treia din relațiile (42), găsim

$$\frac{\partial^2 \log \alpha_1}{\partial y^1 \partial y^2} + \frac{\partial^2 \log \gamma_2}{\partial y^1 \partial y^2} + \alpha_1 \gamma_2 = 0 .$$

Iar prin substituţia

$$\alpha_1 \gamma_2 = e^{\omega}$$

ecuaţia găsită devine

(44) $$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^1 \partial y^2} + e^{\omega} = 0 .$$

Avem o ecuaţie de tip *Liouville* a cărei integrală generală este

(45) $$e^{\omega} = \alpha_1 \gamma_2 = - \frac{2 f'(y^1) \varphi'(y^2)}{[f(y^1) + \varphi(y^2)]^2}$$

$f(y^1)$, $\varphi(y^2)$ fiind două funcţiuni arbitrare de un argument. Luând arbitrar una din cele 2 funcţiuni de 2 variabile independente α_1, γ_2, deducem pe cealaltă din ecuaţia (45).

Din (43) avem

$$\frac{\partial u}{\partial y^2} = + \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial y^2} (\log \alpha_1) , \quad \frac{\partial u}{\partial y^1} = - \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial y^1} (\log \gamma_2)$$

de unde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2 \partial y^1} = + \frac{1}{\beta} \frac{\partial^2}{\partial y^2 \partial y^1} (\log \alpha_1) - \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial \beta}{\partial y^1} \frac{\partial}{\partial y^2} (\log \alpha_1)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^1 \partial y^2} = - \frac{1}{\beta} \frac{\partial^2}{\partial y^1 \partial y^2} (\log \gamma_2) + \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial \beta}{\partial y^2} \frac{\partial}{\partial y^1} (\log \gamma_2)$$

deci

$$\frac{1}{\beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial y^1} \frac{\partial}{\partial y^2} (\log \alpha_1) - \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2}{\partial y^1 \partial y^2} (\log \alpha_1) - \frac{1}{\beta} \frac{\partial^2}{\partial y^1 \partial y^2} (\log \gamma_2) + \\ + \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial \beta}{\partial y^2} \frac{\partial}{\partial y^1} (\log \gamma_2) = 0$$

adică

(46) $$\frac{\partial}{\partial y^2} (\log \alpha_1) \cdot \frac{\partial}{\partial y^1} (\log \beta) + \frac{\partial}{\partial y^1} (\log \gamma_2) \cdot \frac{\partial}{\partial y^2} (\log \beta) + \alpha_1 \gamma_2 = 0 .$$

Am obţinut o ecuaţie lineară cu derivate parţiale de ordinul I, care ne dă funcţiunea $\beta (y^1, y^2)$.

Din (42) avem

$$\frac{\partial u}{\partial y^1} = - \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial y^1} (\log \gamma_2) \qquad \frac{\partial u}{\partial y^2} = + \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial y^2} (\log \alpha_1) .$$

Integrând diferenţiala totală exactă

$$- \frac{1}{\beta} \left\{ \frac{\partial}{\partial y^1} (\log \gamma_2) \, dy^1 - \frac{\partial}{\partial y^2} (\log \alpha_1) \, dy^2 \right\}$$

obţinem funcţiunea $u (y^1, y^2)$, iar relaţiile (41) ne dau β_1 şi β_2.

8. Dacă dependenţa vectorilor asociaţi a, b, c, este de aşa natură, încât matricea componentelor lor are rangul egal cu 1 în punctele regulate ale spaţiului $(x^1, \ldots, x^n)$, vectorii sunt proporţionali. Rezultă că vom avea relaţii de forma

(46) $$\omega_2 = \alpha \omega_1 , \qquad \omega_3 = \beta \omega_1 .$$

Produsul a două forme Pfaff proporţionale fiind nul, din (15) deducem

$$\omega'_1 = 0 , \qquad \omega'_2 = 0 , \qquad \omega'_3 = 0$$

Cele trei forme Pfaff asociate $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, sunt diferenţiale exacte. Integrarea primei forme ne dă

(47) $$\omega_1 = dy^1$$

y^1 fiind o funcţiune de $x^1, \ldots, x^n$. Schimbarea de variabilă

$$y^1 (x^1, \ldots, x^n) = y^1 \quad , \quad x^2 = y^2, \ldots , x^n = y^n$$

ne arată că atât α cât şi β sunt funcţiuni numai de y^1, adică

$$\omega_2 = \alpha (y^1) \, dy^1 , \qquad \omega_3 = \beta (y^1) \, dy^1$$

şi ecuaţia (4) se reduce la o ecuaţie Riccati obişnuită într'o singură variabilă independentă

(48) $$\frac{dz}{dy^1} + \frac{z^2}{2} + \alpha (y^1) z + \beta (y^1) = 0$$

câmpul vectorial asociat reducându-se la forma canonică

(49) $$(1, 0, \ldots, 0) \quad , \quad (\alpha, 0, \ldots, 0) , \quad (\beta, 0, \ldots, 0)$$

Condiţiile de integrabilitate (15) fiind identic satisfăcute, funcţiunile α, β sunt funcţiuni arbitrare de un argument.

Institutul de Matematici,
Universitatea „V. Babeş", Cluj

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Векторная система ассоциированная обобщённому уравнению Риккати.
Тиберу Михаилеску.

Задача определения функции Z от n назависимых переменных x^i; проверяющей систему уравнения с частичными производными первого порядка формы (3), приводит к уравнению Pfaf-a в $n-i$ переменных формы (4), называемому обобщённым уравнением Риккати.

Такому уравнению ассоциируется инвариантно частная система трёх ковариантных векторов, проверяющих отношения (16).

Система Pfaf-a (17), инвариантно ассоциированная уравнению (4), обладает свойством полного интегрирования.

Каннонические формы этих векторов, определяются через выгодные изменения переменных с помощью интегралов системы (17).

Представляя задачу прямого определения компонентных ассоциированных векторов, в каннонической форме, устанавливается степень обобщения решения и, для первых двух случаев, эффективно устанавливаются частные решения, все же имеющие соответствующую степень обобщения.

RÉSUMÉ.

Système de vecteurs associé à une équation de Riccati généralisée

par

TIBERIU MIHĂILESCU

Le problème de la détermination d'une fonction z de n variables indépendantes x^i vérifiant un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre de la forme (3), conduit à une équation de Pfaff à $n+1$ variables de la forme (4) qu'on désigne sous le nom *d'équation de Riccati généralisée.*

On associe d'une manière invariante à une telle équation, un système particulier formé par trois vecteurs covariants, qui vérifient les relations (16).

Le système de Pfaff (17) qui, de même, est associé d' une manière invariante à l'équation (4), jouit de la propriété d'être complètement intégrable.

Si le rang de la matrice des composantes des trois vecteurs associés est égal respectivement à 3,2 ou 1, les intégrales du système de Pfaff (17) fournissent des changements de variables qui donnent les formes canoniques (28), (37) et (49) de ces vecteurs.

Le problème de la détermination directe des composantes canoniques est résolu en ce qui concerne le degré de généralité des solutions et — pour les deux premiers cas — on détermine effectivement des solutions particulières qui possèdent toutefois le degré de généralité respectif.