UN CRITERIU DE ACCESIBILITATE IN PLAN

DE

GEORGE CĂLUGĂREANU

Comunicare prezentată în ședința din 20 Septembrie 1950 a Filialei Cluj a Academiei R. P. R.

Se știe că accesibilitatea punctelor frontierei unui domeniu plan joacă un rol important în teoria reprezentării conforme. O teoremă datorită lui Schönflies stabilește că fiecare punct al frontierei unui domeniu jordanian (a cărui frontieră este o curbă simplă) este accesibil prin interior și prin exterior. Cred că este avantajos, când ne propunem să demonstrăm teoreme de acest gen utilizând un minimum de rezultate auxiliare, să întrebuințăm următorul criteriu:

Un punct $p \in F(D)$ (frontiera lui D) *este accesibil prin domeniul* D *dacă în* D *există un subdomeniu* $\Delta \subset D$ *astfel încât* $F(\Delta) \cdot F(D) = p$, *și numai în acest caz.*

Teorema următoare stabilește echivalența acestui criteriu cu definiția punctului accesibil:

1. Există echivalență între următoarele proprietăți:

a) *Punctul* $p \in F(D)$ *este accesibil prin continue în* D, *deci în* D *există continue* C *astfel încât* $C \cdot C(D) = p$. (Notând cu C(D) mulțimea complementară lui D).

b) *In* D *există subdomenii* Δ *astfel încât* $F(\Delta)\, F(D) = p$.

c) *Punctul* p *este accesibil prin arce simple în* D, *deci este accesibil în sensul lui Schönflies.*

Să arătăm că b) rezultă din a). Fie q un punct oarecare al continuului C, $q \neq p$. Putem presupune $C - p$ mulțime conexă, căci în caz contrar putem alege $K = \text{comp}\,(C - p) \ni q$, și înlocui C prin continuul $\overline{K}$. Avem $d(q,F) > 0$, notând $F = F(D)$. Să descriem cercul $V(q, r_q)$, cu centrul q și raza $r_q = \frac{1}{2} d(q, F)$. Toate punctele lui V fiind interioare lui D, acest cerc nu conține puncte din F(D), nici în interior și nici pe periferie. Deci

$$\Delta = \sum_{q \in C - p} V(q, r_q)$$

este un domeniu, căci se vede uşor că este un semicontinuu ale cărui puncte sunt toate interioare. Avem evident $\Delta \subset D$.

$F(\Delta)$ conţine p. In adevăr, în orice vecinătate a lui p există puncte din $C - p$, şi fiecare din aceste puncte este centrul unui $V(q, r_q)$ cu raza $r_q > 0$, deci p este punct de acumulare de puncte din Δ. Dar în fiecare cerc cu centrul p există puncte streine de D, căci $p \in (FD)$, deci există puncte streine lui Δ, şi $p \in F(\Delta)$. Să presupunem că afară de p ar mai exista alte puncte comune lui $F(\Delta)$ şi $F(D)$, şi fie $p_1 \neq p$, $p_1 \in F(\Delta).F(D)$. In fiecare $V(p_1, \varepsilon)$ am avea puncte din Δ, şi am putea alege $q \in C$ aşa ca $V(q, r_q)$ să aibă puncte în $V(p_1, \varepsilon)$. Fie q_1 un astfel de punct. Ar trebui să avem $d(p_1, q_1) < \varepsilon$, $d(q, F) = 2r_q$. Dar

$$q_1 \in V(q, r_q),\quad d(q, q_1) < r_q,\quad d(q, p_1) \leqslant d(q, q_1) + p(q_1, p_1)$$

deci, majorând

$$2r_q = d(q, F) \leqslant d(q, p_1) \leqslant r_q + \varepsilon, \quad \text{şi} \quad r_q \leqslant \varepsilon.$$

Această inegalitate are loc pentru orice ε, deci $2r_q = d(q, F) \leqslant \varepsilon$. Există deci puncte q oricât de aproape de p_1, şi, C fiind un continuu, $p_1 \in C$, şi ar rezulta $C . F(D) \supset p + p_1$, contrar ipotezei. Avem deci $F(\Delta) . F(D) = p$, şi am stabilit că a) atrage b).

Insă, din b) rezultă a), căci, Δ fiind un domeniu care se bucură de proprietatea b), $\bar{\Delta}$ este un continuu situat în D cu singura excepţie a punctului p, şi avem $\bar{\Delta} . F(D) = p$. Aşadar a) şi b) sunt proprietăţi echivalente.

Insă c) conţine a), căci un arc simplu este un continuu. Deci c) conţine b). Rămâne de arătat că din a) sau b) rezultă c).

Fie $p_1 \in C$, $p_1 \neq p$. Să construim $V_1 = V(p_1, r_1)$, $r_1 = \frac{1}{2} d(p_1, F)$. Avem $V_1 \subset \Delta$. Mulţimea $C - V_1$ are o componentă $C_1 \ni p$, căci $p \in F$, deci p este exterior lui $V_1 = V(p_1, r_1)$. Componenta C_1 are puncte comune cu circonferinţa V_1 (teorema frontierei). Fie p_2 unul din aceste puncte, $p_2 \in C_1 . F(V_1)$. Să construim $V_2 = V(p_2, r_2)$, $r_2 = \frac{1}{2} d(p_2, F)$, şi să considerăm $C - (V_1 + V_2) \supset C_1 - V_2$. Această mulţime are o componentă $C_2 \ni p$, şi, conform teoremei frontierei, $C_2 \cdot F(V_2) \ni p_3$. Avem $C \supset C_1 \supset C_2$, şi nici una din aceste incluziuni nu este o identitate, cercurile V_1 şi V_2 având raze pozitive. Continuând astfel, se obţine un şir descrescător de continue

$$C \supset C_1 \supset C_2 \supset \cdots \supset C_n \supset \cdots$$

Avem dealtfel

$$p_1 + p_2 \subset V_1 + V_2,\ p_2 + p_3 \subset V_2 + V_3, \ldots, p_{n-1} + p_n \subset V_{n-1} + V_n, \ldots$$

Fie $K = \prod C_n$. Atunci K este un continuu, şi $p \in K \subset C$. Să arătăm că $p_n \to p$ când $n \to \infty$. In caz contrar, s'ar putea alege un şir parţial

$p_{n_k} \to q \neq p$. Dar $q \in C$, căci $p_n \in C$. Deci $q \in \Delta \subset D$, căci $q \neq p$. Avem $p_{n_k} \in C_{n_k - 1} \subset C_m$. m fiind un întreg fix, pentru k destul de mare, $k < k_m$, deci $q \in C_m$ oricare ar fi m, şi $q \in K$.

Să construim $V_{n_k} = V(p_{n_k}, r_{n_k})$, $r_{n_k} = \frac{1}{2} d(p_{n_k}, F)$. Pentru k destul de mare avem, oricare ar fi $\varepsilon > 0$,

$$\left| r_{n_k} - \frac{1}{2} d(q, F) \right| < \varepsilon,$$

distanţa unui punct la o mulţime fiind o funcţie continuă de punct. Deoarece $d(q, F) > 0$, avem deci, pentru $k > k_0$, $r_{n_k} > \frac{1}{2} d(q, F)$. Dar $d(p_{n_k}, q)$ devine oricât vrem de mică pentru k destul de mare, deci, pentru $k > k_1$ cercul V_{n_k} conţine pe q în interior. Acelaş cerc lasă punctul p în exteriorul său, deci circonferinţa sa taie K într'un punct $\neq q$, deci $(K - V_{n_k}) . q = 0$. Dar avem, prin construcţie,

$$C_{n_k - 1} - V_{n_k} \supset C_{n_k} \supset K$$

şi, K fiind o submulţime a lui C_{n_k}, iar C_{n_k} neconţinând nici un punct din V_{n_k}, avem $K - V_{n_k} = K$, deci $K . q = 0$. Aceasta e o contradicţie, deoarece $q \in K$. Avem deci $q = p$, deci $p_n \to p$ pentru $n \to \infty$.

Să unim acum p_1 cu p_2 printr'un segment rectilin $p_1 p_2$, apoi p_2 cu p_3, etc. Deoarece $p_{n-1} + p_n \subset V_{n-1} + V_n$, conturul poligonal astfel obţinut, $\Sigma p_n p_{n+1}$, este situat în $\Sigma V_n \subset \Delta \subset D$, şi singurul punct de acumulare al vârfurilor sale p_n este p, deci, suprimând la nevoie un şir de contururi închise pe care le-ar putea conţine acest contur poligonal, se obţine un drum de acces din p_1 în p, situat în D, care contur este un arc simplu. Deci din a) rezultă c).

2. *Pentru ca* $p \in F(D)$ *să fie accesibil prin* D *este necesar şi suficient ca pentru orice* $r > 0$, *mulţimea* $D \cdot V(p, r)$ *să conţină un domeniu a cărui frontieră să treacă prin* p.

Punctul p fiind accesibil prin D, există un continuu C care uneşte p_0 cu p în D, şi $C \cdot F(D) = p$, $C \subset \bar{D}$. Cercul $V(p, r)$ conţine puncte de ale lui C în interior, oricare ar fi $r > 0$. Fie $r' < r$, şi fie $C_{r'} =$ comp $C . \overline{V(p, r')} \ni p$. Atunci $C_{r'}$ este un continuu, $C_{r'} \subset V(p, r)$, $C_{r'} - p \subset D$, deoarece $C - p \subset D$. Există deci o componentă δ a mulţimii deschise $D \cdot V(p, r)$, care conţine $C_{r'} - p$. Frontiera $F(\delta)$ a domeniului δ e formată din unele arce de cerc $V(p, r)$ şi din unele continue aparţinând lui $F(D)$. Dacă $F(\delta)$ nu conţine p, acest punct este exterior lui δ, deci $C_{r'}$, care are puncte în δ şi conţine p, care e exterior lui δ, trebue să taie $F(\delta)$, deci şi $F(D)$, în puncte diferite de p, căci $C_{r'}$ nu taie circumferinţa $V(p, r)$. Aceasta contrazice $C_{r'} \subset C$, $C . F(D) = p$. Deci $p \in F(\delta)$, şi condiţia enunţată este necesară.

Dar ea este şi suficientă. In adevăr, condiţia fiind satisfăcută, să luăm $p_1 \in \delta$, unde $\delta = \text{comp } D \cdot V(p, r)$ iar $F(\delta) \ni p$. Să alegem $r_1 < \frac{1}{2} d(p, p_1)$. Intersecţia $\delta \cdot V(p, r_1)$ conţine o componentă δ_1 astfel că $F(\delta_1) \ni p$. Să luăm $p_2 \in \delta_1$ şi să alegem $r_2 < \frac{1}{2} d(p, p_2)$. Intersecţia $\delta_1 \cdot V(p, r_2)$ conţine o componentă δ_2 astfel încât $F(\delta_2) \ni p$, etc. Se obţine astfel un şir $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ având p ca punct limită. Dacă unim p_1 cu p_2 printr'un contur coligonal situat în δ_1, apoi p_2 cu p_3 printr'un contur poligonal situat in δ_2, etc., şi eliminând la nevoe un şir de contururi închise situate pe conturul poligonal $p_1 p_2 \ldots p_\nu \ldots$, mulţimea vârfurilor va avea ca punct limită p; va fi deci un arc simplu $p_1 p$ situat în D, cu singura excepţie a punctului p, deci un drum de acces din p_1 în p prin D, şi condiţia e suficientă. Rezultă de aci:

Dacă $p \in F(D)$ *este inaccesibil prin* D, *atunci pentru* $r < r_0$ *mulţimea* $D \cdot V(p, r)$ *nu conţine nici un domeniu a cărui frontieră să treacă prin* p, *iar componentele acestei mulţimi sunt în număr infinit.*

In adevăr, dacă pentru un şir infinit de valori $r_\nu \to 0$, $\nu \to \infty$, am avea în $D \cdot V(p, r_\nu)$ câte un domeniu a cărui frontieră trece prin p, acest punct ar fi accesibil, conform enunţului precedent. Căci, pentru $r > r_\nu$ am avea $V(p, r) \supset V(p, r_\nu)$, $D \cdot V(p, r) \supset D \cdot V(p, r_\nu)$, deci fiecare componentă din $D \cdot V(p, r_\nu)$ ar fi conţinută într'o componentă din $D \cdot V(p, r)$. Fie δ_ν o componentă din $D \cdot V(p, r_\nu)$ astfel ca $F(\delta_\nu) \ni p$, şi fie $\delta = \text{comp } D \cdot V(p, r)$ astfel ca $\delta \supset \delta_\nu$. Am avea atunci $F(\delta) \ni p$. In adevăr, nu putem avea $p \cdot F(\delta) = 0$ decât dacă $p \in \delta$, căci $p \in \delta_\nu$, deci $p \in \delta$. Dar $\delta \subset D$, şi ar rezulta $p \in D$, ceeace e contradictoriu. Astfel, pentru $r > 0$ există în $D \cdot V(p, r)$ o componentă a cărei frontieră trece prin p. Dar atunci p ar fi accesibil, contrar ipotezei, deci enunţul este stabilit.

Să presupunem că mulţimea deschisă $D \cdot V(p, r)$ unde $r < r_0$, are un număr finit de m de componente. Ajungem iarăş la o contradicţie. Deoarece $p \in F(D)$, se poate construi un şir $p_\nu \in D$, $\nu = 1, 2, \ldots$ astfel ca $p_\nu \to p$, $\nu \to \infty$. Putem presupune $\sum p_\nu \subset V(p, r)$, deci

$$\sum p_\nu \subset D \cdot V(p, r) = \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_m$$

notând cu δ_k cele m componente din $D \cdot V(p, r)$. Ar rezulta că o infinitate de puncte p_ν ar aparţine unui acelaş δ_k, deci $F(\delta_k) \in p$, ceeace e imposibil deoarece $r < r_0$. Deci avem $m = \infty$.

3. D *fiind un domeniu simplu conex, iar* $p \in F(D)$ *fiind inaccesibil prin* D, *punctul* p *aparţine unui continuu de convergenţă din* F(D).

Punctul p fiind inaccesibil prin D, mulţimea $D \cdot V(p, r)$ conţine o infinitate de componente $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_\nu, \ldots$ pentru $r < r_0$. Domeniile D şi $V(p, r)$ fiind simplu conexe, teorema lui Janiszewski—Strassewicz ne asigură că $D + V$ este un domeniu al cărui ordin de conexiune este infinit, deci $C(D + V) = C(D) \cdot C(V)$ are o infinitate de componente $K_1, K_2, \ldots, K_\nu, \ldots$ care sunt continue disjuncte, proprii sau degenerate. Dar, C(D) şi

C(V) fiind două continue, teorema frontierei (Janiszewski[1]) permite să afirmăm că fiecare K_ν are puncte comune cu F(D) ş. F(V). Deci

$$K_\nu = \text{comp } C(D) \cdot C(V), \quad K_\nu \cdot F(D) \neq 0.$$

Să considerăm continuele

$$\varkappa_\nu = \text{comp } F(D) \cdot K_\nu = \text{comp } [F(D) \cdot \text{comp } C(D) \cdot C(V)] =$$
$$= \text{comp } F(D) \cdot C(D) \cdot C(V) = \text{comp } F(D) \cdot C(V)$$

Ultimele egalităţi rezultă[2]) din: $\text{comp } [A \cdot \text{comp } B] = \text{comp } A \cdot B$.

Avem deci $\varkappa_\nu = \text{comp } F(D) \cdot C(V)$, şi, F(D) şi C(V) fiind nişte continue, avem $\varkappa_\nu \cdot F(V) \neq 0$, conform teoremei frontierei. Continuele $\varkappa_\nu$ sunt disjuncte, deoarece $\varkappa_\nu \subset K_\nu$ şi continuele K_ν sunt disjuncte. Din şirul $\varkappa_\nu$, să extragem un şir convergent către un continuu $\varkappa$. Vom avea $\varkappa \cdot F(V) \neq 0$. Vom nota tot cu $\varkappa_\nu$ acest şir parţial, convergent. Aceasta e posibil pentru fiecare $r < r_0$.

Pentru a obţine un continuu de convergenţă al lui F(D), putem întrebuinţa procedeul diagonal. Să luăm $r_1 \leqslant \frac{1}{2} r_0$. Avem $V_1 = V(p, r_1) \subset V(p, r_0) = V$, deci $C(V_1) \supset C(V)$, $C(D + V_1) \supset C(D + V)$ Continuele K_ν fiind mulţimi conexe, $K_\nu \subset K_\nu^1 = \text{comp } C(D + V_1)$, apoi $\varkappa_\nu \subset \varkappa_\nu^1$. Din şirul $\varkappa_\nu^1$ să extragem un şir convergent către $\varkappa^1$, şir pe care'l vom nota tot cu $\varkappa_\nu^1$. In acest şir să păstrăm primul termen $\varkappa_1$ al şirului precedent. Avem $\varkappa \subset \varkappa^1$, $\varkappa^1 \cdot F(V_1) \neq 0$, deci $\varkappa_1 \cdot F(V) \neq 0$, şi $\varkappa^1$ este un continuu neredus la un punct. Luând $r_2 \leqslant \frac{1}{2} r_1 \leqslant \frac{1}{2^2} r_0$, vom avea deasemeni $\varkappa_\nu^1 \subset \varkappa_\nu^2 = \text{comp } C(D + V_2)$, şi vom putea extrage din şirul $\varkappa_\nu^2$ un şir convergent către $\varkappa^2$, păstrând în acest şir primii 2 termeni ai şirului precedent $\varkappa_\nu^1$. Vom avea $\varkappa \subset \varkappa^1 \subset \varkappa^2$, $\varkappa^2 \cdot F(V_2) \neq 0$, şi putem continua indefinit, obţinând astfel un şir infinit de şiruri, fiecare fiind extras din precedentul. Şirul diagonal $\varkappa_1^1, \varkappa_2^2, \ldots$ converge către un continuu $\varkappa^*$, şi avem $\varkappa^n \subset \varkappa^*$. In adevăr, pentru $\nu > n$ avem $\varkappa_\nu^n = \varkappa_\nu^\nu \cdot C(V_n)$, şi deoarece $\varkappa_\nu^n \to \varkappa^n$ pentru $\nu \to \infty$, rezultă

$$C(V_n) \cdot \overline{\lim_\nu}\, \varkappa_\nu^\nu = C(V_n) \cdot \underline{\lim_\nu}\, \varkappa_\nu^\nu$$

oricare ar fi n, deci

$$\overline{\lim_\nu}\, \varkappa_\nu^\nu = \underline{\lim_\nu}\, \varkappa_\nu^\nu = \varkappa^*.$$

---

[1]) Vezi F. Hausdorff, *Mengenlehre*, 1923, p. 161.

[2]) Pentru a demonstra această egalitate să observem că: 1. comp [comp A] = comp A; 2. Dacă $A \subset B$, avem comp $A \subset$ comp B. Putem scrie

$$A \cdot \text{comp } B \subset A \cdot B, \quad \text{deci} \quad \text{comp } [A \cdot \text{comp } B] \subset \text{comp } A \cdot B$$

şi fiecare componentă din A . comp B aparţine unei componente a lui A . B. Dar, fiecare comp $A \cdot B \subset A$, şi $A \cdot B \subset B$, deci comp $A \cdot B \subset$ comp B, de unde comp $A \cdot B \subset A \cdot$ comp B. Aplicând 1. şi 2. găsim comp [comp A . B] = comp A . B $\subset$ comp [A . comp B], de unde egalitatea anunţată.

Continuul $\varkappa^*$ întâlneşte $F(V_n)$ oricare ar fi n, deoarece $\varkappa^* \supset \varkappa_n$ deci $p \in \varkappa^*$ şi teorema e demonstrată.

Deducem de aci că: dacă F(D) are toate punctele sale accesibile prin D, F(D) este un continuu local conex.

4. C *fiind un continuu local conex, iar* p *fiind un punct al frontierei sale,* p *este accesibil prin toate domeniile complementare ale lui* C, *ale căror frontiere trec prin* p.

Să notăm D = comp C(C); D este un domeniu simplu conex, şi F(D) ⊂ C. Continuul C fiind local conex, el se bucură de proprietatea S (a lui Sierpinski), adică avem

$$C = C_1 + C_2 + \cdots + C_{n(\varepsilon)}, \quad d(C_k) \leqslant \varepsilon, \quad k = 1, 2, \ldots n(\varepsilon)$$

n finit, iar C_k un continuu, şi aceasta oricare ar fi $\varepsilon > 0$.

Dacă $p \in F(D)$ ar fi inaccesibil prin D, construind $V(p, r)$, $r < r_0$, mulţimea $F(D) \cdot C(V)$ ar avea o infinitate de componente $\varkappa_\nu$ care întâlnesc F(V). Dând lui r o altă valoare $r' < r$, obţinem la fel componentele $\varkappa'_\nu$ ale mulţimii $F(D) \cdot C(V')$, şi fiecare $\varkappa_\nu$ este conţinut într'un $\varkappa'_\mu$. Fiecare $\varkappa'_\mu$ întâlneşte $F(V')$. Există deci o infinitate de componente $\varkappa'_\mu$ astfel încât $d(\varkappa'_\nu) > \lambda$, pentru $\lambda > 0$ destul de mic anume pentru $\lambda > r - r'$. Dar

$$F(D) = C \,.\, F(D) = C_1 \,.\, F(D) + C_2 \,.\, F(D) + \cdots + C_n \,.\, F(D)$$
$$F(D) \,.\, C(V') = C_1 \,.\, F(D) \,.\, C(V') + \cdots + C_n \,.\, F(D) \,.\, C(V') = \sum \varkappa'_\nu \,.$$

Insă C_k, F(D) şi C(V′) fiind continue, fiecare componentă din $C_k \,.\, F(D) \cdot C(V')$ are puncte comune cu F(V′), şi deoarece avem

$$d\,[C_k \,.\, F(D) \,.\, C(V')] \leqq d(C_k) \leqq \varepsilon$$

nici una din aceste componente nu poate avea puncte în afara cercului $V(p, r' + \varepsilon)$, ceeace contrazice faptul că în $\sum \varkappa'_\nu$ există continue $\varkappa'_\nu$ care întâlnesc circumferinţa $V(p, r)$. Vom avea o contradicţie pentru $\varepsilon < \lambda$ deci p este accesibil prin D, şi teorema este demonstrată.

Teorema lui Schönflies: *Punctele unei curbe simple sunt accesibile prin interiorul şi prin exteriorul său,* rezultă imediat de mai sus, deoarece o curbă simplă este un continuu local conex.

Mai rezultă apoi că *dacă frontiera unui domeniu simplu conex are puncte inaccesibile prin acesta, această frontieră nu este local conexă.*

Institutul de Matematici,
Universitatea „V. Babeş", Cluj

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Критерий доступности точек границы области плоскости.

Георге Кэлугэряну

Применяя основные теоремы топологии плоскости, устанавливаем следующий критерий:

Точка pє F (D) (граница области D) доступна (по Шенфлису) через область D, и только в этом случае, если в D имеется подобласть ДCD так, что F (Д) F (D) = p. Отсюда выводим следующие резуматы: Точка pє F (D) доступна через D, и только в этом случае, если для произвольного r > 0, множество D. V (p, r) содержит область, граница которой проходит через p. Дальше: Если pє F(D) недоступна через D, для r < r_0 множество D. V (p, ·) не содержит никакой области, граница которой проходила бы через p, а составные этого множества бесконечны. Если D-простая односвязная область и pє F(D) недоступна через D, точка p принадлежит непрерывности схождения у границы F(D). Если C — непрерывная локал-односвязная область, а p — точка её границы, p доступна через каждую комплиментарную область C, граница которой проходит через p.

Теория Шенфлиса, по которой точки простой кривой доступны через внутреннюю и внешнюю часть её, вытекает немедленно.

RÉSUMÉ

Sur un critère d'accessibilité des points de la frontière d'un domaine plan

par

GEORGE CĂLUGĂREANU

En employant des théorèmes fondamentaux de la topologie du plan, nous établissons le critère suivant:

Un point $p \in F(D)$ (frontière du domaine D) *est accessible* (au sens de Schönflies) *par le domaine* D, *si dans* D *il existe un sous-domaine* $\Delta \subset D$, *tel que* $F(\Delta) \,.\, F(D) = p$, *et alors seulement.*

Nous en déduisons ces autres résultats:

Le point $p \in F(D)$ *est accessible par* D *si, quel que soit* $r > 0$, *l'ensemble* D.V(p, r) *contient un domaine dont la frontière passe par* p, *et alors seulement.* Ensuite:

Si $p \in F(D)$ est inaccessible par D, pour $r < r_0$ l'ensemble $D.V(p, r)$ ne contient aucun domaine dont la frontière passe par p, et les composantes de cet ensemble sont en nombre infini.

D étant simplement connexe, et $p \in F(D)$ étant inaccessible par D, le point p appartient à un continu de convergence de F(D).C étant un continu localement connexe, et p un point de sa frontière, p est accessible par chaque domaine complémentaire à C, dont la frontière passe par p. Le théorème de Schönflies, suivant lequel les points d'une courbe simple sont accessibles par son intérieur et son extérieur, en résulte immédiatement.