

NÉHÁNY MEGJEGYZÉS A MECHANIKA DIFFERENCIÁLIS ÉS INTEGRALELVEIVEL KAPCSOLATBAN

IRTA:

GÁBOS ZOLTÁN

*Comunicare prezentată în şedinţa din 23 Septembrie 1950
a Filialei Cluj a Academiei R. P. R.*

E dolgozatban a mechanikai elveknek egy új rendszerezését kívánom adni. Mi tette szükségessé ezen új rendszerezést? Az, hogy az eddigi tárgyalásmód különösen az egyes elvek és tételek közötti matematikai kapcsolatokra helyezi a fősúlyt s ezáltal az olvasóban azt a benyomást kelti, hogy az egyes mozgásegyenletek teljesen egyenértékűek egymással, hisz egyik a másikból következik matematikai úton. Nem derül ki ezen tárgyalásból az egyes elvek, mozgásegyenletek közötti fizikai kapcsolat s képtelenek vagyunk ezen tárgyalásmód alapján eldönteni pontosan az egyes mozgásegyenletek alkalmazhatósági területeit. Hogyan alakult ki ez a tárgyalási mód?

A mechanika fejlődése folyamán gyakran merültek fel olyan problémák, amelyeket a matematika akkori fejlettségi foka mellett nem tudtak megoldani. A későbbi fejlődés során ezen problémákat sikerült formálisan matematikailag megoldani receptszerűen végrehajtott számolási műveletekkel és e formális számítások útján a valósággal egyező eredményeket kaptak. A fejlődés ezen szakaszában tehát megelégszünk azzal, hogy kapunk bizonyos egyenleteket, melyeket igen jól tudunk alkalmazni, anélkül azonban, hogy azoknak mélyebb fizikai tartalmát ismernénk. A későbbiek folyamán a fizikának az a törekvése, hogy a formális eljárásnak, mely számunkra a valósággal egyező eredményeket szolgáltatott, fizikai tartalmát kielemezze, avagy az egész felépítést elvesse és azt egy szemléletesebb helyettesítesse. Nézzük csak meg, hogy mennyire valósult meg ezen törekvés a mechanika fent említett fejezetében és analízáljuk ki, hogy milyen további lehetőségek nyílnak a fizika számára ezen a téren.

A fizika által fölvetett és legtöbb esetben matematikusok által megoldott problémák nem maradtak hatástalanok a matematika fejlődésére. Legtöbb ilyen probléma megoldása nyomán a matematikának egy új ága született meg, vagy valamely már meglévő ága gyarapodott egy újabb

fejezettel. Így éppen a mechanika elveivel kapcsolatos problémák megoldása nyomán született meg a variációszámítás. E két diszciplína a további fejlődés során is szoros kapcsolatban van egymással, annál is inkább, mert azon matematikusok, akik a variációszámítás fejlesztésén dolgoztak, ugyanolyan mértékben törekedtek a mechanika ezen részének fejlesztésére. Allítsuk csak szembe a mechanika ezen részének és a variációszámításnak a fejlődését. Kezdjük talán a variációszámítással.

A variációszámítást, fejlődését tekintve, két nagy részre oszthatjuk: klasszikus, vagy formális és modern variációszámításra. A fejlődés első szakaszában még igen meglátszik a formális jelleg: az egyes problémák megoldására egy operátorkalkulust fejlesztenek ki. Hibája a variációszámítás e részének, hogy nem tudja eldönteni, hogy az általa szolgáltatott eredmény tényleg a kitűzött probléma megoldása-e, avagy nem. Ezen nehézség tette szükségessé a variációszámítás egy új, modern részének a megszületését. Belátva, hogy a régi klasszikus elmélet alapján ezen kérdés nem oldható meg, sikerült a formalizmus teljes mellőzésével egy olyan felépítést megadni a variációszámításnak, mely felépítésben a fent vázolt nehézség nem lép fel. Sikerült megtalálni azon elégséges feltételt, melynek teljesülése esetében a probléma megoldására szolgáló formális matematikai apparátus működésbe hozható és az problémáknak megoldását szolgáltatja. E mélyebb analízisnek fizikai szempontból azért van nagy jelentősége, mert megtalálja azon feltételt, amelynek teljesülését a matematika egyáltalán nem tudja biztosítani, megállapítja tehát azon feltételt, mely fizikai okok miatt kell teljesülnön.

A mechanika elveivel foglalkozó rész fejlődésében is két korszakot különböztethetünk meg. Az első tart kb. az 1920-as évekig. E korszakban teljesen átveszik a variációszámítás klasszikus részének eredményeit, megállapítanak rengeteg helyes tételt és egyenletet. Az 1900-as évek körül azonban a mechanika e részében is észlelhető az a válság, amelyik a klasszikus variációszámítás elégtelenségének felismerése folytán a matematikában jelentkezett. E válságot úgy tudnám jellemezni, hogy a mechanika belefutott a formalizmusba, nyilvánvalóvá lett, hogy a klasszikus variációszámítás segítségével újabb összefüggéseket nem tudnak megállapítani, sőt az is nyilvánvalóvá vált, hogy a klasszikus mechanika elveinek, mozgásegyenleteinek rendszerezésére a formális variációszámítás nyújtotta segítség nem elegendő. Szükségszerűen be kell tehát következzen az a fordulat, mely a mechanika eddigi formális, a hagyományos tárgyalásmódhoz ragaszkodó felépítését elveti és egy új, formalizmustól mentes felépítéssel helyettesíti. E fordulat még nem következett be, úgyhogy a mechanika fejlődésében lemaradt a variációszámítás fejlődése mögött. Nyilvánvaló tehát, hogy éppen a matematika nyújthat itt segítséget a fizikának, hisz a matematika e része már megszabadult a formalizmustól. Az utóbbi 30 évben már történtek lépések (1, 2, 3, 6), melyek e fordulatot igen nagy mértékben készítették elő. Itt főleg Carathéodorynak a geometriai optikában és a variációszámításban elért eredményeire hivatkozom. Ezen dolgozatban Carathéodory eredményeit felhasználva és a mechanikai probléma kívánalmainak megfelelően kiegészítve igyekezni fogok ezen a téren egy további lépést megtenni.

Tárgyalásaimat csak egyetlen tömegpont esetére fogom elvégezni, először derékszögű koordinátarendszerre vonatkozóan. Teszem ezt azért, mert számunkra a derékszögű koordinátarendszerre vonatkozó tárgyalás a legszemléletesebb. Csak ezután vezetem be az általános koordinátákat, ki-mutatva azt, hogy általános koordináták alkalmazása esetében legtöbb egyenletünk alakja ugyanaz marad. A hagyományos tárgyalási módnak nem szemléletes voltához szerintem igen nagyban hozzájárult az, hogy az általános koordinátákat, a problémák matematikai megoldását megkönnyítő fogalmat, túl korán vezeti be.

I. RÉSZ

Szabad tömegpont esetére vonatkozó megjegyzések

1. Mi az összefüggés a Hamilton—Jacobi differenciálegyenlet és a Newton-féle mozgásegyenlet között?

A mechanikában a Hamilton—Jacobi egyenletet a Newton egyenletből egy formális számolási lánc útján nyerjük. E formális számolási lánc egyes szemei: Newton-egyenlet, D'Alembert elv, Hamilton elv, Hamilton—Jacobi egyenlet. E formális számolások közben e két egyenlet közötti minden kapcsolat elvész és egyáltalán nem tudunk e formális számolások alapján választ adni arra, hogy mely esetekben lehet alkalmazni a Hamilton—Jacobi egyenletet. Hol vész el a két egyenlet közötti kapcsolat? Erre a kérdésre igen egyszerűen megadhatjuk a választ: a két egyenlet közötti kapcsolat akkor vész el, midőn a D'Alembert elvből levezetjük a Hamilton elvet. A D'Alembert elvből levezetett Hamilton elv a következőképpen mondható ki: a kinetikus potenciál idő szerinti integráljának valóságos pálya mentén vett első variációja zérus. Használatos azonban az elvnek egy másik megfogalmazása is, mely szerint: „A kinetikus potenciál idő szerinti integrálja a valóságos pálya mentén veszi fel legkisebb értékét“. Az elvnek e két megfogalmazása nem egyenértékű egymással, a második többet mond ki mint az első. Az első megfogalmazásban kimondottak fennállása szükséges a második megfogalmazásban kimondottak fennállásához, de nem elegendő. Ahoz, hogy az elvet második megfogalmazásában kimondhassuk, még bizonyos feltételek teljesülésére van szükség. Ezen feltételeket a matematikában megkeresték, a fizikusok azonban nem tudván ezen feltételekbe fizikai tartalmat belevinni, jobbnak látják azokat elhallgatni s az elvet hol az egyik, hol a másik megfogalmazásában mondják ki. A két differenciálegyenlet közötti kapcsolat éppen itt vész el. A Hamilton—Jacobi egyenlet ugyanis csak akkor vezethető le a Hamilton elvből, ha a minimum tényleg existál. Azon feltételek tehát, amelyek a minimum fennállásához szükségesek, szükségesek a Hamilton—Jacobi egyenlet fennállásához is. Tehát midőn a minimum biztosítására szolgáló feltételeket elhallgattuk, éppen azon feltételek egy részét hallgattuk el, amelyek a két differenciálegyenlet közötti kapcsolatot létesítik. Továbbiakban azon feltételeket fogom keresni, mely feltételek mellett a Hamilton—Jacobi egyenlet a Newton egyenletből közvetlenül levezethető. E feladat megoldásának kettős jelentősége van:

a) E feltételek birtokában közvetlenül látszik a számolási lánc első és utolsó szeme közötti kapcsolat.

b) Azon feltételek, amelyek mellett a Hamilton—Jacobi egyenlet a Newton egyenletből levezethető elégségesek kell legyenek a minimum biztosítására is, tehát lehetővé válik, hogy az egész tételáncolatot egy más, formalizmustól mentes módon rendszerezzük.

Hogy kitűzött problémánkat megoldhassuk, felelnünk kell először a következő kérdésre: *ennyiben általánosabb a Hamilton—Jacobi egyenlet a Newton-féle mozgásegyenletnél?*

A Newton egyenlet általunk ismert legáltalánosabb klasszikus mechanikai mozgásegyenlet, mely egyetlen szabad tömegpont mozgását le tudja írni, amennyiben a tömegpontra ható erőt $[K_i(x, y, z, t), i = 1, 2, 3]$ és a tömegpontnak egy t_0 -időpontbeli ú. n. kezdeti állapotátározóit ismerem:

$$\text{ha } t = t_0, \quad x_i = x_i^0, \quad p_i = p_i^0, \quad i = 1, 2, 3^*) \quad (1)$$

Problémánk megoldását (a pályae egyenleteket) ekkor az

$$m \frac{dx_i}{dt} = p_i, \quad \frac{dp_i}{dt} = K_i(x, y, z, t), \quad i = 1, 2, 3 \quad (2)$$

differenciálegyenletrendszernek előbbi kezdőfeltételeket kielégítő megoldása szolgáltatja.

A Hamilton—Jacobi egyenlet ezzel szemben nemcsak egyetlen kezdeti állapotra, hanem a kezdeti állapotok egy folytonos sokaságára is meg tudja oldani a mozgási problémát. Hogy azt a legáltalánosabb problémát, amelyet a Hamilton—Jacobi egyenlet alapján meg tudunk oldani megfogalmazzuk, be kell vezetnünk néhány fogalmat. Először állapotunk meg abban, hogy mivel az erő az időtől függ, célszerű a mozgást matematikailag egy négydimenziós térben tárgyalni. Negyedik koordinátának vesszük az időt: $x_4 = t$. Ezen térről feltételezzük, hogy euklidesi. Miközben a tömegpont mozog, annak „helyét“ a négydimenziós térünkben reprezentáló pont egy görbét ú. n. pályagörbét ír le. Az egyes kezdeti állapotátározók legyenek három paraméter függvényei:

$$\begin{aligned} x_i^0 &= x_i^0(u_1, u_2, u_3), \quad i = 1, 2, 3, 4 \\ p_i^0 &= p_i^0(u_1, u_2, u_3), \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (3)$$

Ezen kezdő hely, illetve impulzusfüggvények alapján minden egyes x_i^0 koordinátákkal rendelkező kezdő helyértékhez a (2) egyenlet alapján hozzá tudunk rendelni egy pályagörbét a négy dimenziós térünkben. A (3) alatti kezdőfeltételeket figyelmesebben megnézve, látjuk, hogy abban a háromdimenziós impulzus komponensei vannak megadva. A mozgást mi egy négydimenziós térben vizsgáljuk, mely térben természetesen az impulzusnak négy komponense kell hogy legyen. Ezen vektor első három komponensének vegyük a háromdimenziós impulzusvektor három komponensét. De a negyedik komponensről is tudunk valamit: a pályagörbék a kezdeti helyel

*) Továbbiakban x, y, z, p_x, p_y, p_z helyett gyakran fogom a következő jelölést használni: x_i, p_i , ha $i = 1, 2, 3$.

és a háromdimenziós impulzussal egyértelműen meg vannak határozva. Nyilvánvaló tehát: az impulzus negyedik komponense függvénye kell legyen a helynek és a három első impulzuskomponensnek és ezen negyedik komponens a Newton-egyenletek alapján meghatározható. A negyedik komponens által határozzuk meg, hogy kikötjük: álljon reá egy a (2) alatti egyenletekhez hasonló egyenlet:

$$\frac{dp_4}{dt} = K_4(x, y, z, t).$$

Ezen negyedik komponens csak akkor határozható meg a Newton-egyenlet alapján, ha a *külső erő potenciálból származik*, azaz létezik egy olyan $V = V(x, y, z, t)$ skaláris függvény, amelyre áll:

$$K_i = -\text{grad}_i V(x, y, z, t), \quad i = 1, 2, 3. \quad (4)$$

Ekkor ugyanis a Newton-egyenletekből azonnal kapjuk:

$$-\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2m} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + V \right] = -\frac{\partial V}{\partial t},$$

mely egyenlet alakja teljesen hasonló a fentihez. A zárójelben lévő kifejezés negatívja lesz az impulzus negyedik komponense és $-H$ -val jelöljük:

$$p_4 = -H = -\left(\frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2m} + V \right). \quad (5)$$

Miután potenciálból származó külső erőteret esetében megtaláltuk az impulzus negyedik komponensét megnevezhetjük azon másik föltételt amelynek teljesülése esetében a Hamilton-Jacobi egyenlet alkalmazható. Ezen föltétel:

Két különböző kezdeti helyhez tartozó pályagörbe sohasem metszi egymást. Ekkor a pályagörbék

a) a négydimenziós teret, vagy annak egy, részét folytonosan befedik,

b) minden egyes x, y, z, t ponthoz egy és csakis egy impulzusvektort rendelnek hozzá.

Tehát egyrészt

$$r_i = p_i(x, y, z, t), \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

másrészt, mivel pályagörbék nem metszik egymást

$$\text{rot } \vec{p} = 0.$$

Ekkor tehát létezik egy $S(x, y, z, t)$ függvény amelynek gradiense egyenlő $\vec{p}$ -vel:

$$p_i = \text{grad}_i S(x, y, z, t), \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (6)$$

p_4 -nek, p_1, p_2, p_3 -nak ezen értékeit (5)-be helyettesítve azonnal megkapjuk a Hamilton-Jacobi differenciálegyenletet:

$$S_t + \frac{1}{2m} (S_x^2 + S_y^2 + S_z^2) + V = 0. \quad (7)$$

Összefoglalva az eddigieket kimondhatjuk: a Hamilton-Jacobi egyenlet alkalmazható, ha az erő potenciálból származik és a különböző kezdeti helyekhez tartozó pályagörbék nem metszik egymást.

2. Az S függvény geometriai jelentése.

Vizsgáljuk az S függvény megváltozását a tér x, y, z, t pontján áthaladó pályagörbe mentén:

$$dS = S_x dx + S_y dy + S_z dz + S_t dt.$$

Mivel pályagörbe mentén:

$$m dx = S_x dt, \dots, S_t = -H,$$

írhatjuk:

$$dS = \left[\frac{1}{2m} (S_x^2 + S_y^2 + S_z^2) - V \right] dt.$$

Jelöljük az $\frac{1}{2m} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - V$ kifejezést $L(t, x_i, p_i)$ -vel. Ekkor

$$dS = L dt, \quad (8)$$

hol L -be a pálya menti adatok helyettesítendőek. Mindkét oldalt t szerint integrálva, kapjuk

$$S_2 - S_1 = \int_{t_1}^{t_2} L dt. \quad (9)$$

Tehát a kinetikus potenciál (L) idő szerinti integrálja pályagörbe két pontja között, egyenlő a két ponthoz tartozó S érték különbségével.

3. A Hamilton-Jacobi egyenlet alkalmazhatóságához szükséges föltétel teljesítése.

Az előzőekben kimondottuk azon mozgással kapcsolatos föltételeket amelyek teljesülése esetében a H. J. egyenlet alkalmazható. Mi által biztosítható ezen föltételek teljesülése? Mi fölött rendelkezhetünk mi a külső erőteret kívül? A kezdeti állapotfüggvények fölött. Nekünk tehát a kezdeti állapotfüggvények alkalmas megválasztásával kell a második létezési föltételt biztosítanunk. Mint láttuk a H. J. egyenlet létezése szorosan összefügg az S függvény létezésével, tehát ezen egyenletünk akkor alkalmazható, ha a kezdeti állapotfüggvények alapján egyértelműen meg tudjuk határozni az S függvényt. Matematikailag igazolható, hogy ennek föltétele az, hogy a

$$r_x^0 dx^0 + p_y^0 dy^0 + p_z^0 dz^0 - H^0 dt^0 \quad (9)$$

kifejezés totális differenciál legyen. Ez a föltétele annak, hogy a megadott kezdeti állapotot határozó függvények mellett a H. J. egyenletnek legyen megoldása, ez tehát egyúttal azon föltétel, amelynek teljesülése esetében differenciálegyenletünk alkalmazhatóságához szükséges b) föltétel teljesül.

4. A Hamilton-Jacobi egyenlet alkalmazása, arra az esetre midőn a kezdeti állapotfüggvények háromnál kisebb számú paramétertől függenek.

Ekkor

$$x_i^0 = x_i^0(u_j), \quad p_i^0 = p_i^0(u_j) \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad j < 3. \quad (10)$$

Ez esetben a H. J. egyenlet alkalmazhatóságának feltétele, hogy existáljanak olyan három paramétertől függő kezdő állapotfüggvények, amelyek fenti (10) alatti feltételeket speciális esetként tartalmazzák és amelyekre áll a (9) alatti feltétel.

a) Kezdeti állapotfüggvények két paramétertől függenek. Ez az eset különösen akkor bír igen nagy fontossággal, midőn az impulzus negyedik komponense csakis a negyedik helykoordinátától, az időtől függ. Ekkor:

$$dS = p_x dx + p_y dy + p_z dz - H(t) dt.$$

Mivel dS totális differenciál, p_x, p_y, p_z csakis x, y és z függvényei. Másrészt jobboldali utolsó tagot S -be beleolvasztva kapunk egy $W(x, y, z)$ függvényt amelyre áll:

$$dW = p_x dx + p_y dy + p_z dz. \quad (11)$$

Abban a speciális esetben midőn H az időtől sem függ, vagyis $H = E =$ állandó, W és S között a következő összefüggés áll fenn:

$$S = W - E t.$$

Mivel a W függvény csak x, y, z -től függ ez esetben nem célszerű a problémát matematikailag a négydimenziós térben tárgyalni. Ez esetben sokkal célszerűbb a mozgást matematikailag háromdimenziós térünkben vizsgálni. Mi ezen eset geometriai jelentése?

A kezdeti helyek egy felületet alkotnak. A kezdeti felület minden egyes pontjához megadunk egy t kezdeti időpontértéket és egy kezdeti impulzusvektort. Ezáltal minden kezdeti helyhez egy pályagörbét rendelhetünk hozzá a Newton-egyenlet alapján. Különböző kezdőhelyekhez tartozó pályagörbéknek nincsenek közös pontjaik. Ezt a kezdeti feltételek által biztosítjuk. Kikötjük ugyanis, hogy

$$p_x^0 dx^0 + p_y^0 dy^0 + p_z^0 dz^0 \quad (12)$$

totális differenciál legyen. A W függvény geometriai jelentése: a háromdimenziós valódi pálya mentén elmozdulva:

$$dW = 2 T dt.$$

Azon esetben midőn $H = E =$ állandó a Hamilton-Jacobi egyenlet következőképpen írható:

$$\frac{1}{2m} (\text{grad} W)^2 + V = E.$$

Még egy utolsó megjegyzés ezzel az esettel kapcsolatban. A Hamilton-Jacobi egyenlet egyúttal a kezdő felület mozgását is leírja. Abban a speciális esetben midőn a (12) alatti kifejezés egyenlő zérussal, más szavakkal, ha a kezdőimpulzusok merőlegesek a kezdőfelületre és a kezdőfelület minden egyes pontjához ugyanazt a t időpillanatot rendeljük hozzá a pályagörbék a $W(x, y, z) = \text{const}$ felületek ortogonális trajektoriái. $E = \text{const}$ esetben pedig ezek azok a felületek amelyekbe a t^0 időpillanatbeli kezdőfelület a későbbi $t =$ állandó időpillanatokban átmegy.

b) Kezdeti függvények egyetlen paraméter függvényei. Ez az eset fizikailag csak akkor bír jelentőséggel midőn az első három helykoordináta közül valamelyik a mozgás folyamán állandó, tehát amikor a mozgás síkban történik.

c) Sokkal érdekesebb annak az esetnek a tárgyalása mikor egyetlen kezdeti állapotra akarjuk megoldani a H. J. egyenletet. A kezdeti értékek ugyanis egy differenciálegyenletrendszer, nem pedig egy elsőrendű parciális differenciálegyenlet kezdőfeltételei. Ezen pont elején kimondott alkalmazhatósági feltétel azonban erre az esetre is érvényes. Tudok találni végtelen sok kezdeti állapothatározófüggvényeket amelyekre (9) feltételek teljesülnek. A kezdeti állapotfüggvények mindegyikéhez tartozik ekkor a Hamilton-Jacobi egyenletnek egy $S^*(x, y, z, t)$ megoldása. Ezen megoldás az ötdimenziós x, y, z, t, S térben egy felületet reprezentál. A kezdeti állapot segítségével a Newton-egyenlet alapján meghatározott négydimenziós pályagörbe menti x, y, z, t értékekre azonban valamennyi S^* függvény ugyanazt az értéket kell felvegye. (U. i. S^* meghatározásához felhasznált kezdőfüggvények tartalmazzák a kezdeti állapothatározókat.) Fentiekből az is következik, hogy az S^* integrálfelületek egy görbe mentén érintkeznek egymással és ezen görbe „vetülete” a négydimenziós térben éppen a pályagörbéje a tömegpontnak. Tehát amennyiben egyetlen kezdeti állapotra kívánjuk megoldani a mozgási problémát meg kell keresnünk ezen görbének differenciálegyenletét amelynek mentén integrálfelületek érintkeznek egymással. Az ilyen görbéket a differenciálegyenletek elméletében karakterisztikus görbének nevezzük. Hogy problémánkat megoldhassuk meg kell tehát keresni a H. J. egyenlet karakterisztikus görbéinek differenciálegyenleteit és azokat meg kell oldani az adott kezdőfeltételek mellett. Ezen egyenletek az ú. n. kanonikus egyenletek:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Figyelembe véve, hogy a pálya mentén: $p_i = L_{\dot{x}_i}$ a második kanonikus egyenletcsoportból következnek az Euler-Lagrange féle mozgásegyenletek.

Fenti megállapításainknak még egy érdekes következménye van. A három paramétertől függő kezdő állapotfüggvények geometriailag egy kezdőfelületet reprezentálnak a négydimenziós térben és a kezdőfelület minden egyes pontjához egy impulzusvektort rendelnek hozzá. A kezdőfelületet felfoghatjuk, mint egy felületsereg burkolóját. A felületsereg minden egyes tagjához lehet találni egy impulzusvektorfüggvényt mely (9)-t kielégíti s mely az érintkezési pontban a megadott impulzusértéket veszi fel. Ekkor a felületsereg minden egyes tagjához fog tartozni a H. J. egyenletnek egy megoldása. Ezen megoldások mindegyike az ötdimenziós térünkben egy felületet fog reprezentálni. Ezen felületsereg burkolófelületének egyenlete $S = S(x, y, z, t)$ éppen a H. J. differenciálegyenletnek a megadott kezdő állapotfüggvények melletti megoldása. Ez nem egyéb mint az ú. n. Huygens elv, mely különösen akkor szemléletes, ha ezen pontbeli a) esettel állunk szemben, tehát amikor problémánkat a három dimenziós térünkben tárgyaljuk.

Még említsünk meg egy eljárást, mely a pályae egyenletek ill. a karakterisztikus görbék meghatározására igen gyakran használatos akkor, midőn egyetlen kezdeti állapottal van dolgunk. A karakterisztikus görbék egyenletének meghatározása igen egyszerű abban az esetben, midőn ismerjük a H. J. egyenletnek egy ú. n. teljes integrálját:

$$S = S(x, y, z, t, a, b, c) + \text{const.}$$

hol a, b, c tetszőszerinti állandók. A karakterisztikus görbék egyenleteit megkapjuk ha képezzük a következő egyenleteket

$$\frac{\partial S}{\partial a} = d, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = e, \quad \frac{\partial S}{\partial c} = f,$$

hol d, e, f szintén állandók és ezen egyenleteket feloldjuk x, y, z -re. Ekkor kapjuk:

$$x_i = x_i(t, a, b, c, d, e, f), \quad i = 1, 2, 3.$$

Mi ismerjük egy t^0 időpillanatbeli állapotátározókat. Ezáltal az a, b, c, d, e, f állandók egyértelmű meghatározására éppen hat egyenletünk van. Ezeket feloldva és a kapott értékeket az x_i függvényekbe behelyettesítve nyerjük a pályae egyenleteket.

5. A *Hamilton-elv*. Az 1. pontban említettük, hogy a Hamilton-Jacobi egyenlet alkalmazhatóságához szükséges feltételek teljesülése esetében a Hamilton-elvet második megfogalmazásában is ki szabad mondanunk, tehát a minimum tényleg bekövetkezik. E pontban ezen állításunkat igazoljuk. Tegyük fel, hogy Hamilton-Jacobi egyenlet alkalmazható, vagyis existál az S impulzuspotenciál. Ekkor mint tudjuk valóságos pálya mentén elmozdulva:

$$\frac{dS}{dt} - L(t, x_i, p_i) = 0,$$

hol p_i helyébe a valóságos pálya menti adatokat kell helyettesítenünk:

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Tekintsük pályánknak egy fix x, y, z, t pontját. Vegyük a következő kifejezést:

$$F = S_x \dot{x} + S_y \dot{y} + S_z \dot{z} + S_t - L(t, x_i, m\dot{x}_i).$$

Tekintsük e kifejezésben $\dot{x}, \dot{y}$, és $\dot{z}$ -ot változónak. A valódi pálya mentén vett értékeire ezen változóknak az F a fentiek szerint eltűnik. ($F = 0$). Hogyan viselkednek az F függvény változóink szerinti parciális levezetései a valódi pálya menti adatok esetében? Figyelembe véve, hogy valódi pálya mentén:

$$m\dot{x}_i = p_i = \frac{\partial S}{\partial x_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}$$

kapjuk:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0.$$

A második levezetések viszont

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = -m\delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = 1 \text{ ha } i = j, \quad \delta_{ij} = 0 \text{ ha } i \neq j.$$

Az F függvénynek tehát a valóságos pálya menti értékekre maximuma van. Maximális értéke zérus. Nem valóságos pálya menti adatokra tehát mindig negatív. Ebből a tényből aztán azonnal következik: L idő szerinti integrálja valóságos pálya mentén minimális. (Bővebben I. Carathéodory: Geometrische Optik c. művében 15, 16. old.).

Itten tegyük meg egy megjegyzést. Egyetlen kezdő állapot esetében könnyen belátható, hogy mindig tudok konstruálni egy S^* függvényt, amennyiben a külső erőter potenciálból származik. Más szavakkal: a kanonikus mozgásegyenletek, a Hamilton-elvből levezethető Lagrange-féle mozgásegyenletek csak akkor egyenértékűek a Newton-féle mozgásegyenlettel ha *külső erő potenciálból származik* és az előbbieket csakis ebben az esetben használhatók. A minimum is csak ezen esetben következik be, midőn külső erőnek van potenciálja. E megállapítás alapján felelhetünk egy kérdésre. Szokásos a Hamilton elvet a következőképpen kimondani: a tömegpont úgy mozog, hogy a kinetikus potenciál idő szerinti integrálja a valóságos pálya mentén minimális. Más szavakkal a tömegpont azt a pályát választja ki magának mely pálya mentén fenti integrál minimális. A tömegpont ezek szerint mint egy gondolkodó lény fogható fel, mely mozgás közben választ a számára kínálkozó pályák közül. Megállapíthatjuk, hogy ez a felfogás teljesen helytelen. Ugyanis:

A Hamilton elv akkor és csakis akkor áll, ha a külső erőter potenciálból származik. Ha a külső erőter nem származik potenciálból az elv nem áll. A minimum bekövetkezésének oka tehát nem a tömegpontban, hanem a külső körülményekben keresendő.

A Hamilton elv tehát így fogalmazható meg: amennyiben a külső erőter potenciálból származik a külső körülmények oly módon determinálják a tömegpont mozgását, hogy pályájára egy bizonyos geometriai természetű állítás fennáll: a kinetikus potenciál idő szerinti integrálja valóságos pálya mentén minimális.

6. *Általános koordináták*. Ezen tárgyalásmóddal szemben egy ellenvetés tehető: tárgyalásainkat csak derékszögű koordinátarendszerben végeztük. Hogyan írhatók át a cartesiusi koordinátarendszerre kapott egyenleteink általános görbevonallú koordinátarendszerre vonatkozó egyenletekre? Egyenleteink átírására a Newton egyenlet nem alkalmas, mert vektoregyenlet lévén alakra nézve nem invariáns a koordinátatranszformációkkal szemben. Erre a célra igen alkalmasnak látszik a Hamilton elv, másrészt a következő összefüggésünk:

$$dS = p_x dx + p_y dy + p_z dz - H dt. \quad (13)$$

Ezen összefüggés ugyanis éppen úgy mint a Hamilton elv alakra nézve invariáns a koordinátatranszformációkkal szemben, másrészt létezésük egybe van kapcsolva a H. J. egyenlet létezésével, tehát annak létezési feltételeit magukba foglalják. Mi fenti egyenletre fogjuk végezni megfontolásainkat.

Új koordinátákat legáltalánosabban a következő egyenletek alapján vezethetünk be:

$$x_i = x_i(q_j) \quad i, j = 1, 2, 3, 4.$$

A gyakorlatban azonban x_4 -et általában nem szokás transzformálni, úgyhogy ez esetben transzformációs egyenleteink:

$$x_i = x_i(t, q_j), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Ezen egyenletektől megkívánjuk, hogy az x, y, z koordináták terét képezzék le kölcsönösen és egyértelműen a q_1, q_2, q_3 koordináták terére.

Az $S(x, y, z, t)$ függvényből transformáció után kapunk egy $\bar{S}(q_1, q_2, q_3, t)$ függvényt. Végezzük el a (13) egyenlet jobboldalán is a transzformációt. Kapjuk:

$$d\bar{S}(q_1, q_2, q_3, t) = \bar{p}_1 dq_1 + \bar{p}_2 dq_2 + \bar{p}_3 dq_3 - \bar{H} dt.$$

Ezen új $\bar{S}$ függvényre áll:

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial q_1} = \bar{p}_1, \quad \frac{\partial \bar{S}}{\partial q_2} = \bar{p}_2, \quad \frac{\partial \bar{S}}{\partial q_3} = \bar{p}_3, \quad \frac{\partial \bar{S}}{\partial t} + \frac{1}{2m} [\bar{p}_1^2 + \bar{p}_2^2 + \bar{p}_3^2] + \bar{V} = 0$$

A Hamilton-Jacobi egyenlet alakja tehát ugyanaz marad, következésképpen a Hamilton-elv, kanonikus egyenletek, Lagrange-féle mozgásegyenletek alakja ugyanazok a változók esetében is mint derékszögű koordináták esetében. Általános koordináták esetében látjuk, hogy $\bar{p}_i$ nem arányos q_i -al. Ez az egy lényegtelen különbség mutatkozik a koordináták esetében a derékszögű koordinátarendszerben érvényes kifejezéssel szemben.

E pontban mondottakat összefoglalva kimondhatjuk: az a tény, hogy először derékszögű koordinátarendszerben állapítottuk meg egyenleteinket nem megy az általánosság rovására. Az általános koordináták bevezetésének csak matematikai haszna van, egy számunkra nézve megszokott koordinátarendszerről áttérünk egy új rendszerre, mely rendszerben a probléma matematikai megoldása könnyebbé válik.

Megjegyzés. Problémánknak a négydimenziós térben való tárgyalása nem szükségszerű. Három dimenziós térben való tárgyalásnál a Hamilton-Jacobi egyenletet azon föltevés alapján kapjuk a Newton egyenletből, hogy külső erő potenciálból származik, valamint létezik impulzuspotenciál:

$$K_i = -\text{grad}_i V(x, y, z, t) \quad i = 1, 2, 3 \\ p_i = \text{grad}_i S(x, y, z, t) \quad i = 1, 2, 3.$$

Ezen összefüggéseket Newton egyenletbe helyettesítve azonnal kapjuk a H. J. egyenletet.

Figyelembe véve ugyanis, hogy $\vec{p}$ x, y, z és t -nek a függvénye a Newton egyenletből kapjuk:

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} + \text{grad}_i \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{m} [\vec{p}, \text{rot } \vec{p}]_i = -\text{grad}_i V.$$

Figyelembe véve másrészt, hogy $p_i = \text{grad}_i S(x, y, z, t)$, $i = 1, 2, 3$ ezen

egyenletből nyerjük:

$$\text{grad}_i \left[\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} (vS)^2 + V \right] = 0 \quad i = 1, 2, 3.$$

A gradiens alatti kifejezés, tehát csakis t -nek a függvénye. Ezen t függvényt S -be beleolvasztva nyerjük az ú. n. Hamilton-Jacobi egyenletet.

A következő részben tárgyalásainkat a háromdimenziós koordinátarendszerre vonatkozóan fogjuk végezni.

II. RÉSZ

Kényszert viselő tömegpont esetére vonatkozó megjegyzések

1. Az előző részben igyekeztünk szabad tömegpont mozgására vonatkozó egyenleteknek egy új rendszerezését megadni. Ezen részben először különböző szerzők (Jourdain, Landau, Lifszitz, Nordheim, Réthy, Suslov) eredményeit felhasználva egy helyes tárgyalását adom a problémának, majd e tárgyalás alapján igyekezni fogok egyes még meg nem oldott problémákra ill. a fejlődés folyamán felmerült kérdésekre választ adni, amennyiben az eddigi a kényszerekkel kapcsolatos kérdésekre adott válasz nem lenne kielégítő.

A probléma, amelyet meg akarunk oldani, a következő:

Kerestetnek egy m tömegű tömegpont mozgását leíró egyenletek. Tömegpontnak ismerem kezdeti állapotátározóit, ismerem továbbá azon külső erőt, mely a tömegpontra hat. Tömegpont ezenkívül egy kényszernek van alávetve, mely kényszer tömegpontot csak helyében korlátozza. E kényszer általános alakja*:

$$a_i(t, x_j) dx^i + b(t, x_j) dt = 0. \quad (1)$$

Mi okozza a nehézséget e probléma megoldásánál. Az, hogy a Newton egyenlet nem érvényes kényszer esetében. A Newton egyenletet tehát vagy el kell vetnünk, vagy úgy kell módosítanunk ill. kiegészítenünk, hogy kényszer esetére is alkalmazható legyen. A probléma megoldására a mechanikában két út használatos:

a) A Newton egyenlet kényszer esetében nem érvényes. Itt hasonló nehézséggel állunk szemben, mint relatív mozgás esetében. Relatív mozgás esetében sem érvényes a nem tehetetlenségi rendszerekben a Newton egyenlet, de megmenthető azáltal, hogy a jobboldalon álló erőhöz még bizonyos látszaterőket adunk hozzá. Kényszer esetében helyettesíthető-e a kényszer erővel? Axiomatikusan ki szokás mondani: *Surlódástalan kényszer esetében a kényszer erővel helyettesíthető.* Más szavakkal: surlódástalan kényszer esetében a Newton egyenlet megmenthető oly módon, hogy a jobboldalon álló szabaderőhöz, egy a kényszert helyettesítő ú. n. kényszererőt adunk hozzá:

$$\dot{p}_i = K_i + K'_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2)$$

* $a_i b^i$ alakú kifejezések tárgyalásunkban $a_1 b^1 + a_2 b^2 + a_3 b^3$ kifejezést helyettesíti.

További feladat a kényszererőnek meghatározása a kényszeregyenlet és a kényszer tulajdonságai segítségével. Először alakítsuk át a kényszeregyenletet.

Tegyük fel, hogy ismerjük problémánk megoldását, vagyis a pályae egyenleteket:

$$x_i = x_i(t), \quad i = 1, 2, 3.$$

Ezen pályae egyenletek problémánk megoldásai lévén identikusan kielégítik a kényszeregyenletet:

$$a_i[t, x_j(t)] v^i + b[t, x_j(t)] = 0, \quad (3)$$

ahol v^i a valódi pályamenti sebességvektor i -edik komponense. Tekintsük a pályának egy t paraméterértékhez tartozó x, y, z pontját. Vegyünk ezen pontból történő a kényszeregyenletet kielégítő e^1, e^2, e^3 komponensekkel rendelkező elmozdulást. Ezen elmozduláshoz szükséges idő legyen e^4 . Mivel az elmozdulás a pálya egy pontjából történt, a kényszernek megfelelően, áll:

$$a_i[t, x_j(t)] e^i + b[t, x_j(t)] e^4 = 0. \quad (4)$$

(3)-ból b -t kifejezve és (4)-be helyettesítve, kapjuk:

$$a_i[t, x_j(t)] (e^i - v^i e^4) = 0. \quad (5)$$

Kössük ki még, hogy elmozdulásunk ne essék a valódi pálya irányába, ugyanis akkor (5) identikusan teljesül.

Hogy a kényszererőt meghatározzuk, fel kell használnunk még a D'Alembert—Fourier—Farkas elvet. Ezen elv szerint:

$$K_i^1 e^i = K_i^1 v^i e^4, \quad \text{vagy} \quad -K_i + m \ddot{x}_i (e^i - v^i e^4) = 0, \quad (6)$$

azaz a kényszererő által az e^i komponensekkel rendelkező elmozdulás mentén végzett munka ugyanakkora, mint a valóságos pálya mentén e^4 idő alatt végzett munka. Ezen elv surlódástalan kényszer esetében áll.

Ezen elv felhasználásával, figyelembe véve, hogy az e^i elmozdulásunk tetszőleges, azonnal kapjuk a $\vec{K}$ erő alakját. Még megemlítjük, hogy az $e^i - v^i e^4$ vektort, mely tehát két elmozdulás különbsége virtuális megváltozásnak nevezzük. Abban az esetben midőn $e^4 = 0$ a virtuális megváltozást virtuális elmozdulásnak nevezzük.

b) A második út abban az esetben használható, ha a kényszerföltételt integrálható. Ekkor kényszerföltétel:

$$F(x, y, z, t) = 0.$$

Ez eset geometriai jelentése: a tömegpont egy mozgó, avagy egy álló felületen kell mozgás közben tartózkodjon. Ez utóbbi eset akkor következik be, midőn F nem tartalmazza a t -t.

Mit jelent az, hogy a kényszer súrlódásmentes. Azt, hogy a tömegpont a kényszer terében szabadon mozoghat. Tehát csak fel kell írunk a kényszer terére érvényes Newton egyenletet és azt megoldva, problémánk megoldható. Mint említettük, erre a célra nem célszerű a Newton egyenletet alkalmazni, mert az alakra nézve nem invariáns, tehát igen nehéz számolások lépnek fel. A Newton egyenlet helyett célszerű egy azzal ekvi-

valens a szabad tömegpont mozgására vonatkozó alakra invariáns egyenletet, vagy elvet felhasználni. Erre igen alkalmasnak látszik a Hamilton elv. A Hamilton elv viszont csak akkor használható, ha külső erőter potenciálból származik. Eljárás ekkor: a Hamilton elvben szereplő L függvényben a transzformációt elvégezve ezen transzformált L függvény segítségével ismert módon kapjuk a mozgásegyenleteket. Mégegyszer kihangsúlyozzuk: ezen eljárás csak akkor használható, ha kényszer integrálható és külső erő potenciálból származik.

2. E pontban kimutatjuk, hogy a két eljárás teljesen egyenértékű egymással, a második eljárás használhatóságához szükséges két föltétel teljesülése esetében.

Tekintsük az i -elmozdulás végpontját. E pontot nevezzük a pálya t időpillanathoz tartozó pontjához hozzárendelt pontnak. A hozzárendelt pont-hoz rendeljük hozzá a $t + e^4$ időpontot. Végezzük el ezen eljárást a pálya minden egyes pontjára. Így az e^1, e^2, e^3, e^4 a t függvényei lesznek:

$$e^i = e^i(t), \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Kimutatható (7), hogy integrálható kényszer esetében el lehet érni, mégpedig végtelen sokféleképpen, hogy a hozzárendelt pontok összessége egy folytonos görbét, ú. n. variált pályát alkosson. Ezen pályák mivel az elmozdulások a kényszert kielégítik, szintén kielégítik a kényszeregyenletet. Matematikailag megfogalmazva az eddig kimondottakat: integrálható kényszer esetében mindég találhatók végtelen sokféleképpen olyan $e^i(t)$ függvények, amelyek folytonosak és t szerint folytonosan differenciálhatók. Amennyiben ezen függvényektől megköveteljük, hogy abszolút értékben legyenek elég kicsinyek, akkor ezen függvények az $x_i(t)$ és t függvények variációinak tekinthetők és jogukban áll őket $\delta x, \delta y, \delta z, \delta t$ -vel jelölni. Tehát *csak integrálható kényszer esetében tekinthetők az $e^i(t)$ függvények az $x_i(t)$ és t függvények variációinak.*

Figyelembe véve, hogy a külső erőter potenciálból származik (6) alatti differenciális elvünk így írható:

$$(m \ddot{x}_i + \text{grad}_i V) \cdot (\delta x^i - v^i \delta) = 0.$$

Ezen egyenletünk a variációszámítás szabályait alkalmazva a következő alakra hozható:

$$d(p_i \delta x^i - H \delta t) = \delta(L dt). \quad (7)$$

Abban a speciális esetben pedig, mikor H csak t -től függ, írhatjuk:

$$d(p_i \delta x^i) = \delta(2T dt). \quad (8)$$

Most pedig vessük fel az ú. n. változó határok problémáját. A változó határok problémája (helytelen elnevezés) a következő: milyen föltételek kell teljesüljenek, hogy a variált pálya kielégítse a Newton-egyenletet, tehát maga is egy pályagörbe legyen? Ezen föltételt azonnal meg tudjuk adni a (7) egyenlet alapján: a variált pálya akkor pályagörbe, más szavakkal pályám akkor ágyazható bele pályagörbék sokaságába, ha a baloldalon lévő zárójelben fellépő kifejezés egy $S(x, y, z, t)$ függvény variációja. Mivel

egy S függvény esetében a δ és d műveletek sorrendje felcserélhető:

$$\delta(dS) = \delta(L dt).$$

Ezen összefüggésünk akkor teljesül, ha

$$dS = L dt$$

az S függvényre pedig a következő egyenletek állanak:

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} = p_i, \quad \frac{\partial S}{\partial t} + H = 0.$$

A változó határok problémája erőpotenciál létezése és integrálható kényszer esetében mindég megoldható. Ennek következtében exisztál ez esetben mindég egy S függvény, amelyre áll a Hamilton—Jacobi egyenlet. Ennek következtében érvényes ez esetben a Hamilton-elv. Ezzel problémánkat meg is oldottuk. Kimutattuk, hogy erőpotenciál és integrálható kényszer esetében a két eljárás egyentértékű.

3. Megjegyzések egyes problémákkal kapcsolatban.

a) A mechanikában a kényszerproblémákkal kapcsolatos nehézségeket az 1904-es év elején két szerző Réthy és Jourdain igyekeztek megoldani. A következő problémákat tűzték ki:

1. Mikor variálandó az idő az integrálekben?

2. Mi köze a virtuális elmozdulásnak a variációszámításhoz?

Tényleg ezek azok a kérdések, amelyekre nem ismerve a választ, igen nagy nehézségekbe ütközhetünk. Ezekre a kérdésekre azonban fenti szerzők nem tudnak kielégítő választ adni. Miért? Azért, mert a problémákat túl formálisan kezelték, kapott eredményeiket nem értékelték ki fizikai és geometriai szempontból. Nézzük csak, milyen kérdésekre nem tudtak választ adni, vagy milyen kérdésekre adtak helytelen választ. Lássuk először is mi a gondolatmenetük: a kényszer teszi szükségessé a virtuális megváltozás fogalmának bevezetését. Az integrálható kényszer alakja:

$$F(x, y, z, t) = 0.$$

Keressük azt a variációs operátort, amelyet az F függvényre alkalmazva, ezen operátorra nézve F úgy viselkedik, mintha t -t nem tartalmazná. Ilymódon eljutnak a virtuális elmozdulásnak két kifejezéséhez, az ú. n. Voss és az ú. n. Hölder féle alakokhoz:

$$\delta_0 x_i = \delta x_i - \dot{x}_i \delta t, \quad \delta^* x_i = \delta x_i - \frac{\partial x_i}{\partial t} \delta t.$$

Tárgyalásuk alapján azonban nem tudják eldönteni, hogy melyik alak tekintendő a virtuális elmozdulás kifejezésének. A virtuális elmozdulásnak a matematikai variációval való kapcsolatának integrálható kényszer esetében érvényes alakját aztán kiterjesztik a nem integrálható kényszer esetre is.

Most pedig említsük meg, hogy mi volt a céljuk ezen szerzőknek akkor, midőn az integrálekben az időt variálták? Az idő variálása által általánosabb mozgásegyenleteket kívántak megkapni. Mint később említeni fogjuk

az időnek az elvekben való variálása útján egyáltalán nem kapunk általánosabb mozgásegyenleteket. Az idő variálásának egészen más célja van, az idő variálása más okok miatt célszerű. Megjegyezzük még, hogy az integrálok variálásakor fellépett a virtuális elmozdulásnak Voss-féle alakja.

Mint látjuk, hibája eljárásuknak, hogy formális számolások révén kívánnak megfelelni az egyes kérdésekre, nem vizsgálják a problémát a mozgással kapcsolatban, az egész kérdést mint egy matematikai kérdést fogják fel.

A fenti kérdésekre a következő választ adhatjuk előbbi tárgyalásműköd alapján:

Miért variáljuk az időt? Az egyes változók variálásának célja, hogy egy ú. n. variált pályát konstruáljunk. A valóságos pálya variálásának problémájánál sokkal általánosabb az ú. n. változó határok problémája, amelyet az előző szakaszban foglaltunk meg. Eszerint a változó határok problémája: kerestetik annak feltétele, hogy a variált pálya egy valóságos pálya legyen. Ez a probléma szorosan összefügg azzal a problémával, amelyet az első résben megoldottunk, mikor nem egyetlen kezdőértékre, hanem a kezdőértékek egy folytonos sokaságára oldottuk meg a mozgási problémát. Vegyünk egy az adott kezdő hely és impulzus mellett, egy azzal szomszédos kezdő helyet amelyhez szintén tartozzék egy kezdeti impulzus mely keveset különbözik eredetitől. Ezen kezdeti helyhez tartozzék egy más kezdeti idő. Ebben az esetben célszerű a kezdeti helyeket egymáshoz rendelni, az időt kezdetben variálni. Tehát, ha oly kezdeti helyeket veszünk amelyekhez tartozó kezdeti időpontok különböznek egymástól, akkor az időt is variáljuk. Ha a kezdeti helyekhez tartozó időpillanatok ugyanazok, nem szükséges az időt variálni. Összefoglalva tehát az itt mondottakat: az idő variációja útján egyáltalán nem lehet általánosabb mozgásegyenleteket kapni. Az idő variációját más okokból célszerű bevezetni.

Második kérdéssel kapcsolatban csak annyit jegyzünk meg, hogy láttuk, hogy az ú. n. virtuális megváltozásnak, virtuális elmozdulásnak integrálható kényszer esetében van csak köze a variációszámításhoz. Megállapíthatjuk azt, hogy a Voss és Hölder-féle alak teljesen aequivalens egymással. Ezt a következőképpen láthatjuk be: láttuk, hogy integrálható kényszer esetében (amennyiben külső erő potenciálból származik), a valódi pálya beleágyazható különböző kezdőhellyel rendelkező valódi pályák sokaságába. E pályák egyenlete:

$$x_i = x_i(t, x_0, y_0, z_0) \quad i = 1, 2, 3.$$

Egy pályagörbe mentén x_0, y_0, z_0 állandó és az x_i csakis t -től függ. Pályagörbe mentén tehát x_i -knek t szerinti parciális és totális differenciálja egybeesik. Ezért használtuk mi tárgyalásunkban mindkettő helyett v^i -t. Még meg kell jegyeznünk, hogy mit értünk ez esetben $\delta x, \delta y, \delta z$ alatt:

$$\delta x_i = x_i(t + \delta t, x_0 + \delta x_0, y_0 + \delta y_0, z_0 + \delta z_0) - x_i(t, x_0, y_0, z_0).$$

Tárgyalásunkból az is következik, hogy nem integrálható kényszer

esetében integráelveink nem használhatók. Ez a tény különben igen szépen szemlélhető Szuszlov: Teoreticeszkaja mechanika c. könyve 362, 363. oldalain megoldott kis problémán. Ezt a tényt azért említjük meg, mert szokás felírni az integráelveket arra az esetre is midőn kényszer nem integrálható. Ebben az esetben integráelveket felírni teljesen hibás dolog.

A kolozsvári Bolyai Tudományegyetem
Fizikai Intézete.

IRODALOM

1. Carathéodory C., *Geometrische Optik*, 1937, Springer, Berlin, 1—35 old.
2. Carathéodory C., *Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung*, 1935, Teubner, Leipzig—Berlin.
3. Frank Ph., Mises R., *Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik*, 1930, Vieweg & Sohn, Braunschweig, 227—279 old.
4. Jourdain Ph., *The derivation of Equations in Generalised Coordinates from the Principle of Least Action and allied Principles*, Math. Annalen, 62 k., 413—418 old.
5. Jourdain Ph., *On those Principles of Mechanics which depend upon Processes of Variation*, Math. Annalen, 65 k., 513—527 old.
6. Landau L. i Lifszitz E., *Teoria polia*, 1948, Ogiz Moscova—Leningrad.
7. Nordheim L., *Die Prinzipie der Dynamik*, Handbuch der Physik, V., 2. fejezet, 74—75 old.
8. Nordheim L., Fues E., *Die Hamilton-Jacobische Theorie der Dynamik*, Handbuch der Physik, V., 3. fejezet.
9. Réthy M., *Über das Prinzip der Aktion und über die Klasse mechanischer Prinzipien der es angehört*, Math. Annalen, 58. k., 169—194 old.
10. Réthy M., *Bemerkungen zur Note des Herrn Philip E. B. Jourdain über das Prinzip der kleinsten Aktion*, Math. Annalen, 64. k., 156—159 old.
11. Suslov G. K., *Teoreticeskaja Mechanika*, 1946, Ogiz, Moscova—Leningrad 183—225, 282—301. old.

REZUMAT

Câteva observații asupra principiilor integrale și diferențiale ale mecanicii analitice

de

GABOS ZOLTÁN

Modul cum se tratează azi principiile diferențiale și integrale în cazul unui punct material este foarte formal. Cauza este că la tratarea acestor probleme se folosesc numai rezultatele calculului clasic al variațiilor. În această lucrare încercăm să dăm o nouă tratare a problemei folosindu-ne de rezultatele calculului modern al variațiilor. Tratarea veche nu permite să vedem care este domeniul de aplicabilitate al unor ecuații de mișcare, nu vedem care sunt relațiile între anumite ecuații de mișcare (de exemplu între ecuațiile lui Newton și acelea ale lui Hamilton-Jacobi). Drumul urmat în această lucrare este următorul: se caută condițiile cu ajutorul cărora ecuația lui Hamilton-Jacobi se poate deduce direct din ecuația lui Newton și apoi se arată că aceste condiții sunt suficiente pentru a asigura mini-

mumul integralei care intervine în principiul lui Hamilton. În partea a doua ne ocupăm de mișcarea punctului material cu legături. Căutăm să arătăm că în cazul când condițiile de legătură nu sunt integrabile, deplasarea virtuală nu poate fi considerată în niciun caz ca o variație matematică și în acest caz nu este permis să deducem din principiile diferențiale principiile integrale. Pe lângă aceasta arătăm foarte elementar care este legătura dintre definiția fizică și cea matematică a curbelor caracteristice. În al doilea rând dăm o formulare clară a așa numitei „probleme a variației limitelor“.

Institutul de Fizică
al Universității Bolyai, Cluj.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Об интегральных и дифференциальных принципах аналитической механики.

Габош Золтан.

Современный способ разработки дифференциальных и интегральных принципов при одной материальной частице — очень формален.

Причиной является то обстоятельство, что при решении этих задач применяются только лишь результаты классического вычисления вариаций.

В настоящем очерке мы пытаемся дать новый способ решения задачи, пользуясь результатами современного вычисления вариаций.

Прежний способ решения не позволяет установить область применения некоторых уравнений движения, не видим отношений между некоторыми уравнениями движения (например, между уравнениями Ньютона и Гамильтона-Якоби).

Настоящий очерк идет по следующему пути: ищем условия при помощи которых уравнение Гамильтона-Якоби может быть непосредственно выведено из уравнения Ньютона, затем указывается, что эти условия достаточны для обеспечения минимума интеграла входящего в принцип Гамильтона.

Во второй части мы заняты движением материальной частицы со связями. Стараемся доказать, что в случае, если условия связи не могут быть интегрированы, виртуальное передвижение ни в коем случае не может считаться математической вариацией и в этом случае нельзя выводить интегральных принципов из дифференциальных.

При этом, элементарно указываем на связь характерных кривых, существующую между физическим определением и математическим.

Затем даем ясную формулировку так называемой „проблемы вариации границ“.

RÉSUMÉ

Quelques observations sur les principes intégraux et différentiels de la mécanique analytique

par

GÁBOS ZOLTÁN

La manière dont il est traité aujourd'hui des principes différentiels et intégraux dans le cas d'un point matériel est extrêmement formelle. La raison en est que, dans l'étude de ces problèmes, on n'utilise que les résultats du calcul classique des variations. Dans le présent travail nous tentons d'exposer une nouvelle manière de traiter le problème en nous servant des résultats du calcul moderne des variations. L'ancienne manière ne permet pas de voir quel est le domaine d'applicabilité de certaines équations de mouvement, on ne voit pas quelles sont les relations entre certaines équations de mouvement (par exemple entre les équations de Newton et celles de Hamilton-Jacobi). La voie suivie dans ce travail est la suivante: on recherche à quelles conditions l'équation de Hamilton-Jacobi peut être déduite directement de l'équation de Newton, puis l'on montre que ces conditions sont suffisantes pour assurer le minimum de l'intégrale qui intervient dans le principe de Hamilton. Dans la seconde partie nous nous occupons du mouvement d'un point matériel soumis à des liaisons. Nous tâchons de montrer que, dans le cas où les conditions de liaison ne sont pas intégrables, le déplacement virtuel ne peut être en aucun cas considéré comme une variation mathématique et qu'en ce cas il n'est pas permis de déduire des principes différentiels les principes intégraux. Nous montrons en outre sommairement quelle est la relation entre la définition physique et la définition mathématique des courbes caractéristiques. En second lieu, nous donnons un énoncé clair du problème dit „problème de la variation des limites“.

A VÁLTOZTATÁS VÁLTOZTATÁSÁNAK ÉS A HAMILTON-JACOBI

EGYENLET-RENDSZERREL KAPCSOLATBAN

GÁBOS ZOLTÁN

1955. ÉVI 1. SZÁM

MATEMATIKAI KÖZLEMÉNYEK 1. KÖTET 1. SZÁM 1955. ÉVI 1. SZÁM

1. SZÁM 1955. ÉVI 1. SZÁM 1955. ÉVI 1. SZÁM

1. BEVEZETÉS

A mechanika klasszikus változatában a mozgás leírására az újabb és újabb módszerek alkalmazása egyre inkább a mechanika formális részét képezi. A mechanika klasszikus változatában a mozgás leírására az újabb és újabb módszerek alkalmazása egyre inkább a mechanika formális részét képezi. A mechanika klasszikus változatában a mozgás leírására az újabb és újabb módszerek alkalmazása egyre inkább a mechanika formális részét képezi.

A változások változatosságát vizsgálva láthatjuk, hogy a mechanika klasszikus változatában a mozgás leírására az újabb és újabb módszerek alkalmazása egyre inkább a mechanika formális részét képezi. A mechanika klasszikus változatában a mozgás leírására az újabb és újabb módszerek alkalmazása egyre inkább a mechanika formális részét képezi.

Az újabb és újabb módszerek alkalmazása egyre inkább a mechanika formális részét képezi. A mechanika klasszikus változatában a mozgás leírására az újabb és újabb módszerek alkalmazása egyre inkább a mechanika formális részét képezi.

Az újabb és újabb módszerek alkalmazása egyre inkább a mechanika formális részét képezi. A mechanika klasszikus változatában a mozgás leírására az újabb és újabb módszerek alkalmazása egyre inkább a mechanika formális részét képezi.